Math. P. 448^x Radicke, G.

LEHRBUCH

DER

ARITHMETIK

UND

NIEDEREN ANALYSIS.

LEHRBUCH

DER

ARITHMETIK

UND

NIEDEREN ANALYSIS

ZUM GEBRAUCHE BEI VORLESUNGEN UND ZUM SELBST-UNTERRICHTE

BEARBEITET

VON

D^{R.} G. RADICKE,

PROFESSOR AN DER RHEIN. FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BONN.

ZWEITE MIT EINER ZULAGE VERMEHRTE AUSGABE.

BERLIN,

VERLAG DER NICOLAISCHEN BUCHHANDLUNG.

1853.

Bayerische Staatsbibliothek München

119. D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Bei der Abfassung dieses Lehrbuches war mein Haupt-Bestreben, dasjenige zu beseitigen, was ich hinsichtlich der Entwickelung und Begründung in den bisherigen Darstellungen der Arithmetik und Analysis noch für mangelhaft hielt, so wie dasjenige zu ergänzen, was mir einer weiteren Ausführung und einer Vervollständigung zu bedürfen schien. Eine strenge, hinreichend ausgeführte und Allem vorsehende Methode, geeignet, alle in den Anfangsgründen der rechnenden Mathematik noch etwa vorfindlichen Irrthümer kennen zu lehren, sollte zu einer gesicherten Grundlage für den Calcul im Allgemeinen führen. Sodann sollte eine Erweiterung der Lehren der niederen Analysis für den höheren Calcul, und insbesondere für die Differenzial-Rechnung, eine lückenfreie Basis bieten.

Ob und wie weit dies gelungen ist, gebe ich der Beurtheilung des gelehrten mathematischen Publikums anheim.

Dass die Elemente der Analysis einer Revision bedürften, ist theils auf Anlass der Widersprüche, auf welche man hin und wieder in Rechnungsresultaten geführt wurde, theils auf Grund des augenfällig Ungenügenden in manchen Schlussfolgerungen, noch vor nicht allzu langer Zeit von den gewichtigsten Autoritäten (unter denen ich nur *Abel* hervorhebe) ausgesprochen worden. In der That ist man auch mehrseitig in der neueren Zeit für eine strengere Begründung jener Anfänge der Analysis thätig gewesen. Namentlich hat es z. B. *Cauchy*, der für die Fortbildung der höheren Analysis so Vieles geleistet hat und noch leistet, nicht verschmäht, auch den Elementen seine Aufmerksamkeit zu schenken. Unter den deutschen Mathematikern, welche eine grössere Vollendung der Elementar-Analysis sich zum Ziele setzten, darf ich nur an *Thibaut* und *Ohm* erinnern.

Auf zwei Stücke kam es hierbei im Wesentlichen an.

Fürs E r s t e galt es, rücksichtlich der Rechnungsregeln für die Grundoperationen mit Ausdrücken von e n d l i c h e r Form, die allgemeine Geltung derjenigen Gesetze nachzuweisen, welche man

bei ihrer ersten Auffindung aus dem Operiren mit ganzen Zahlen und theilweise mit Brüchen abstrahirt hatte, oder eventuell da, wo ihre Geltung keine allgemeine ist, die Grenzen zu ermitteln, innerhalb welcher sie anwendbar bleiben.

Sodann handelte es sich zweitens darum, ein sicheres Rechnen mit unendlichen Reihen zu begründen.

Was den ersten Punkt anlangt, so trachtete man meistentheils dahin, von einem möglichst verallgemeinerten Zahlbegriffe ausgehend, für die Erklärung der Grund-Operationen (des Addirens, Subtrahirens, etc.) eine auf jegliche Beschaffenheit der zu verbindenden Ausdrücke anwendbare Fassung zu gewinnen, und jene Gesetze alsdann aus diesen Erklärungen herzuleiten.

Dieser Weg, wäre er ausführbar, würde nichts zu wünschen übrig lassen. Allein zu solchen Erklärungen ist man zur Zeit noch nicht gelangt. Namentlich hat das Imaginäre, da es sich noch nicht in den Zahlbegriff hat hineinzwingen lassen, immer ausgeschlossen bleiben müssen, und selbst innerhalb des Reellen ist das Ziel noch nicht erreicht. Man hat z. B. mehrfach gegen die allgemeinste der bisher hingestellten Multiplikations-Erklärungen eingewendet, dass sie zu den seltsamsten Resultaten führen könne. Aus dieser Erklärung, welche das Produkt als dasjenige bezeichnet, welches aus dem Multiplikandus so entsteht, wie der Multiplikator aus der Einheit, lässt sich nämlich unter andern $\sqrt{3}\sqrt{5}=\sqrt{(5\sqrt{3})}$ folgern, weil, wie $\sqrt{5}$ durch Wurzelausziehung aus dem Fünffachen der Einheit, so $\sqrt{(5\sqrt{3})}$ durch Wurzelausziehung aus dem Fünffachen von $\sqrt{3}$ gebildet ist; und ebenso würde man $a^5a^3=(a.a^5)^3$, $a^3\log 2=\log(2a^3)$ und dergleichen mehr erhalten.

Aber wenn man vielleicht auch dieser Einwendung, so wie den ähnlichen Einwürfen, die sich gegen die anderen Erklärungen erheben lassen, durch mehr oder weniger künstliche Interpretationen oder durch Zusätze möchte begegnen können, so bleiben doch noch andere Einwendungen zu beseitigen, deren Einfluss sich darin schon offenbart, dass selbst die dem Bereiche des Reellen angehörigen wunden Stellen der Arithmetik auf jenem Wege nicht aufgefunden worden sind.

Das was zuweilen den Einklang in den Resultaten störte, kam nicht aus dem Arbeiten mit dem Imaginären, wenigstens

nicht aus dem Imaginären als solchem, wohl aber häufig aus dem unrichtigen Operiren mit der Null und aus dem unrichtigen Verständnisse der Ausdrücke, welche die Null enthalten. Und letzteres lag wieder an einer einseitigen Bestimmung des Nullbegriffs.

Von der Ansicht, dass die Null durch das Nichts zu erklären sei, ist man schon mehrentheils zurückgekommen. In der That klingt es nicht bloss sonderbar, mit einem Nichts rechnen zu sollen, sondern es gibt auch bei der Werthbestimmung selbst mehrerer der einfachsten Ausdrucksformen die Auffassung der Null als Nichts bald einen unrichtigen, bald gar keinen Sinn. Dass die in der Analysis gebrauchte Null mit dem Nichts eine ihrer Eigenschaften (die Eigenschaft, dass die Addition und Subtraktion derselben einen Ausdruck ungeändert lässt) gemein hat, macht die beiden Dinge noch nicht identisch. — Eben so wenig genügt indess eine zweite Erklärung, die man statt der ersten wegen ihrer Unzulänglichkeit eingeführt hat, nämlich die, dass die Null die Grenze des unendlich Klein-Werdens sei; und zwar genügt sie unter andern deswegen nicht, weil gerade bei den Werthbestimmungen, bei denen sie ihren Vorzug vor der ersten Erklärung geltend machen soll, die ungerechtfertigte Voraussetzung gemacht werden muss, dass jede Funktion beim Durchgange des Veränderlichen durch den Nullwerth continuirlich bleibe. Auf welche Widersprüche man aber dadurch kommen kann, beweisen zahlreiche Beispiele, von denen sich einzelne auch im Texte besprochen finden.

Wäre ferner diese Erklärung der Null (als Grenze des unendlich Kleinen) ausreichend, so würden z. B. nicht noch jetzt die Ansichten darüber getheilt sein, ob 0^0 den Werth Eins oder eine unbestimmte Bedeutung habe.

Indem man bei der Aufstellung umfassender Operations-Erklärungen darauf ausging, ganz allgemein dieselben Gesetze zu gewinnen, welche man für den besonderen Fall, dass ganze Zahlen zum Grunde liegen, erhalten hatte, setzte man die allgemeine Gültigkeit dieser Gesetze schon voraus, und versäumte also zu fragen, ob überhaupt auf alle Fälle anwendbare Gesetze überall möglich seien. Wenn man daher auch die einzelnen Fälle hinreichend specialisirt hätte, und dabei auf Mangel an Uebereinstimmung gestossen wäre, so würde man, weil jene Frage nicht

gestellt worden war, nicht an eine beschränkte Gültigkeit des Gesetzes, sondern nur an eine noch unvollkommene Fassung der Operations-Erklärung haben denken können. In Folge dessen findet es sich nicht selten, dass man, auf einen Widerspruch erst am Ende einer zusammenhängenden Rechnung aufmerksam werdend, statt nach dem Grunde des Widerspruchs zu suchen, sich damit begnügt, einen anderen Weg einzuschlagen, der ein befriedigenderes Resultat liefert.

Ein Mangel an Gründlichkeit bleibt ferner, wenn er auch seltner unerwünschte Resultate nach sich zieht, dass man bei dieser Verallgemeinerungsmethode das Imaginäre völlig unberücksichtigt lässt. Zwar soll hier die Erklärung aushelfen, dass das Imaginäre unausführbare Operationen vorstelle, die nur in so weit beibehalten werden, als sie im Verlaufe der Rechnung durch entgegengesetzte Operationen wieder aufgehoben werden können. Aber mit dieser Erklärung ist nichts gewonnen, so lange man nicht bindende Gründe angibt, warum man mit den Ausdrücken unausführbarer Operationen ebenso verfahren dürfe, wie mit denen der ausführbaren. Auch ist es nicht wahr, dass das Imaginäre bloss durch die genau entgegengesetzten Operationen verschwindet.

Ueber die in dieser Schrift befolgte Methode, welche für einzelne Partieen schon theilweise von anderen Mathematikern (von *Cauchy* z. B. für das Imaginäre), in umfassenderer Weise aber erst von *Ohm* angewendet worden ist, bemerke man Folgendes.

Alle Rechnungsregeln lassen sich in Form von Gleichungen darstellen, und aus diesen lassen sich wiederum diejenigen heraussondern, welche nicht anders als aus den Operations-Erklärungen herzuleiten sind, während die übrigen mittels einiger wenigen Grundsätze aus diesen, die in dem ersten Abschnitte der *Arithmetik* unter dem Namen Grundgleichungen aufgeführt und mit römischen Nummern bezeichnet worden sind, abgeleitet werden können. Bei der Begründung der Rechnungsgesetze darf man sich daher begnügen, die allgemeine Gültigkeit der wenigen Grundgleichungen und der angedeuteten Grundsätze zu untersuchen, und es wird, wenn man in grösster Allgemeinheit verfahren will, die Frage zu stellen sein, ob die Grundgleichungen und die Herleitungsgrundsätze unabhängig von jeder Bedeutung, welche man

den in den Gleichungen stehenden Buchstaben geben mag, als richtig angenommen werden dürfen. Sollte aber von der Bedeutung der Buchstaben abgesehen werden, so durfte man auch die Rechnungszeichen, $+$, $-$, $\sqrt{}$, log, etc. nicht mehr als Operationszeichen betrachten, da der Sinn eines Operationszeichens dasjenige zu kennen fordert, womit man operiren soll; man musste also das quantitative Element ganz fallen lassen, und das, was nun allein übrig blieb, das rein Formelle, zuerst für sich betrachten. Da nun der Endzweck ist, zu entscheiden, ob bei der unbedingten Anwendung der in Gebrauch stehenden Rechnungsgesetze irgend wann unrichtige Resultate zum Vorschein kommen können, d. h. ob durch deren unbedingte Anwendung irgend wann Widersprüche zu befürchten seien: so findet man sich auf die Frage zurückgeführt, ob jene Grundgleichungen in rein formeller Beziehung (d. h. unabhängig von der Buchstabenbedeutung, und somit für jede Buchstabenbedeutung) unter Anwendung der gedachten Herleitungs-Grundsätze neben einander bestehen können, und insbesondere, welche Formen die Bestandtheile dieser Gleichungen haben müssen, wenn ein Widerspruch zwischen ihnen eintreten soll. Die sich dabei herausstellenden Fälle sind dann diejenigen, unter welchen die Grundgleichungen (nebst den von ihnen abgeleiteten Gleichungen) ihre allgemeine Gültigkeit verlieren. Da ferner jeder noch so zusammengesetzte Ausdruck als eine durch Operationszeichen hergestellte Verknüpfung von ganzen Zahlen betrachtet werden darf, so sind hiermit zugleich die Bedingungen gegeben, unter denen jene unzulässigen Formen erzeugt werden, d. h. es sind die Ausnahmen aufgefunden, welche die üblichen Rechnungsregeln erleiden.

Bei dieser Art der Behandlung wird es unnöthig, andere als bloss ganze Zahlen zum Ausgangspunkte zu nehmen, da alles, was sonst in dem Zahlbegriffe zusammengefasst wird, als Verknüpfung ganzer Zahlen sich denken lässt, und also dort von selbst erscheint, wo die Verknüpfungen von Elementen, d. h. die allgemeinen Ausdrucksformen besprochen werden, sobald man sich unter diesen Elementen ganze Zahlen denkt. Namentlich hat man die Grundgleichungen nur für ganze Zahlen zu entwickeln, und was man unter den Operations-Verbindungen der verschiedenen Arten nicht-ganzer Zahlen zu verstehen habe, liest sich

von selbst aus den für die entsprechenden Fälle als zulässig erkannten Grundgleichungen heraus. Sollte es daher wünschenswerth sein, verallgemeinerte Operations-Erklärungen aufzufinden, so bieten die in ihre richtigen Grenzen verwiesenen Grundgleichungen einen festen Anhaltspunkt dar.

Was nun die Art betrifft, wie die angegebenen Untersuchungen eingeleitet worden sind, so ist vorerst der Theil der Darstellung, welcher sich auf das rein Formelle bezieht, im ersten Abschnitte der *Arithmetik* bei jeder Rechnungsart von dem Theile, der auf den Inhalt der Formen geht, abgesondert, und jener als vom „Rechnen mit allgemeinen Zeichen", dieser als vom „Rechnen mit Zahlen" handelnd bezeichnet worden. Es wird dem entsprechend ein Unterschied gemacht zwischen den wirklichen (oder natürlichen) Summen, Differenzen, etc., in denen das +, −, etc. als Operationszeichen aufgefasst ist, einerseits, und den Zeichensummen, Zeichendifferenzen, etc. (oder — wie es im Texte gewöhnlich heisst — Summen, Differenzen, etc. allgemeiner Zeichen), in denen das +, —, etc. bloss ein Unterscheidungszeichen von anderen Formen ist, andererseits. — Diese allgemeinen Summen, Differenzen, etc. werden im Zeichen-Rechnen selbstständig und als Symbole eingeführt, welche durch nichts anderes als durch gewisse analytische Merkmale charakterisirt sind, die sich einestheils in den Grundgleichungen nach Massgabe ihrer allgemeinen Gültigkeit ausgesprochen finden, anderntheils aus dem Wesen der Ein- und resp. Mehrdeutigkeit entnommen wurden. — Um diese Merkmale näher zu bestimmen, werden vorläufig a l l e Grundgleichungen ohne Unterschied und die Eindeutigkeit zum Grunde gelegt; alsdann erst wird untersucht, wie weit man daraus Merkmale ziehen könne, die mit einander vereinbar sind. Dadurch erhält man gleichzeitig die Grenzen, innerhalb welcher man die, zugleich die Grundgesetze des Zeichen-Rechnens bildenden Grundgleichungen anwenden darf, und diese Grundgesetze nebst den nachfolgend aus ihnen hergeleiteten secundären Gesetzen sind dann natürlich auch (innerhalb der ihnen zugewiesenen Schranken) die Gesetze für diejenigen Summen, Differenzen, etc., denen ein Inhalt beigelegt ist, vermöge dessen ihnen dieselben analytischen Merkmale zukommen. In den Abtheilungen vom Zahlen-Rechnen

ist daher vornehmlich nur der Nachweis zu liefern gewesen, dass die den natürlichen Summen, Differenzen, etc. beigelegten Bedeutungen in der That von dieser Art sind.

Die Unterscheidung zwischen einem Zahlen-Rechnen und einem Zeichen-Rechnen, und die erwähnte entsprechende Unterscheidung zwischen Zahlen-Ausdrücken und Zeichen-Ausdrücken, etc. könnte als eine Neuerung erscheinen; doch dürfte höchstens der Name, nicht aber die Sache neu sein. Denn da unter andern bei den Verbindungen imaginärer Ausdrücke offenbar an einen bestimmten Inhalt nicht gedacht werden kann, so hat z. B. in der That schon jeder, der allgemeine Rechnungen geführt hat, ohne das Imaginäre auszuschliessen, in Wirklichkeit nur mit Formen gerechnet, also das Zeichen-Rechnen ausgeübt; und streng genommen ist auch sonst überall beim Rechnen, wo nicht gerade numerische Auswerthungen vorkommen, der Inhalt durchaus nicht etwas Influirendes.

Auch ist die Erklärung von Rechnungsformen durch blosse analytische Merkmale ohne Hinweisung auf vorzunehmende Operationen nichts Neues. Für die Potenzen hat *Lagrange* schon in der dritten seiner *leçons sur le calcul des fonctions* darauf hingewiesen; ferner sind *Cauchy's* reine Form-Erklärungen für die Verbindungen imaginärer Ausdrücke genau von eben dieser Art; am vollständigsten und ausgedehntesten aber ist diese Erklärungsweise von *Ohm* und *Crelle* angewendet worden. Treffenderes zur Rechtfertigung und Empfehlung dieser Definitions-Methode lässt sich nicht leicht sagen, als dasjenige, was wir in *Crelle's Theorie der analytischen Fakultäten* (*Berlin* 1823) pag. 13. ff. lesen.

Die Nothwendigkeit aber, dass die analytischen Merkmale, wenn sie als Ausgangspunkt genommen werden sollen, vorher geprüft werden müssen, ob sie sich auch im Allgemeinen wie im Besonderen unter einander vertragen, ist zuerst von *Ohm* erkannt worden. Hierauf aufmerksam gemacht zu haben, und an die Ausführung dieser Prüfung gegangen zu sein, ist ein nicht genug zu würdigendes Verdienst dieses Mannes, da vor ihm ein nothwendiges Requisit mathematischer Strenge in den Elementen der Analysis nicht beachtet worden war.

Was nun den ersten Abschnitt der *Arithmetik*, welcher den Hauptheil des besprochenen Gegenstandes behandelt, hinsichtlich

der Anlage des Ganzen von den entsprechenden Arbeiten *Ohm's* unterscheidet, ist vornehmlich: erstens die stärker hervortretende (mittels Abhandlung in gesonderten Kapiteln auch äusserlich markirte) Trennung des rein Formellen von dem, wo der Inhalt der Formen berücksichtigt wird; zweitens, dass das Formelle als das Allgemeinere den Ausgangspunkt bildet (während *Ohm* vom Besonderen allmälig zum Allgemeinen aufsteigt); und drittens, dass alle Consequenzen, die sich aus den blossen Form-Beziehungen ziehen lassen, diesen sogleich sich anschliessen — was bei der Reichhaltigkeit dieser Consequenzen unmittelbarer vor die Augen führt, dass das Formelle an sich das Wesentlichste bei allem Rechnen ist. Bezugs der Ausführung besteht der Unterschied darin, dass die Uebereinstimmung zwischen den erwähnten analytischen Merkmalen rücksichtlich des Allgemeinen, welche *Ohm* nicht näher erörtert hat, ausführlich discutirt wird, dass ferner die Uebereinstimmung derselben im Besonderen systematisch und mithin in der Art untersucht wird, dass man erkennt, der Gegenstand sei erschöpft und kein Fall übersehen; endlich ist das, was sich auf die Ein- und Mehrdeutigkeit bezieht, in einer Weise eingeführt worden, welche eine gleichartigere und wie mir scheint, noch befriedigendere Behandlung der einzelnen Partieen der berührten Untersuchungen gestattete. Die Unterscheidung und Besprechung mancher besonderen Formen, wie z. B. der *Ohm*'schen Differenz-Produkte, Differenz*-Potenzen, etc. ist bei dem gewählten Gange der Darstellung als entbehrlich erachtet worden. — Was sonst noch Abweichendes sich vorfindet, wird der Leser, welcher das *Ohm*'sche System genauer kennt, durch die modificirte Behandlungsweise des Ganzen gerechtfertigt finden.

Den Abschluss findet die Lehre von den Grund-Operationen im dritten Abschnitte des zweiten Theils, welcher die mehrdeutigen Potenzen und Logarithmen zum Gegenstande hat, und sich dadurch an das siebente und neunte Kapitel der *Arithmetik* schliesst.

Die mehrdeutigen Potenzen werden dort (eben so wie es mit den Sinus und Cosinus in der Analysis nothwendig geschehen muss, wenn man nicht unwissenschaftlicher Weise Sachen aus der Geometrie in das Gebiet der reinen Analysis hinüberziehen will) als Repräsentanten von Reihen eingeführt. — Die eindeutigen

Potenzen waren im sechsten Kapitel (welches von den Zeichen-Potenzen handelte) nur Träger gewisser analytischer Eigenschaften, im siebenten Kapitel dagegen Zeichen, welche einen Inhalt hatten, in Folge dessen sie mit jenen die analytischen Eigenschaften theilten, — aber einen Inhalt, der an das Reell-Sein des Exponenten gebunden war. — Es erweist sich nun, dass jene Reihen bei reellem Werthe des Fortschreitungsbuchstaben unter ihren Werthen einen haben, welcher mit dem Werthe der eindeutigen Potenzen des siebenten Kapitels (wenn der Exponent mit jenem Fortschreitnngsbuchstaben zusammenfällt) unter alleiniger Ausnahme des Falles, wo der Dignand Null ist, übereinstimmt; und dies gibt dazu Anlass, auch für sie den Namen Potenz und die entsprechende Bezeichnung anzuwenden. Doch wird durch ein besonderes an dieser Bezeichnung angebrachtes Abzeichen der Unterschied zwischen den beiderlei Potenzen bemerklich gemacht, und dieses Abzeichen bleibend beibehalten, theils weil die fehlende Uebereinstimmung bei den Potenzen von Null hinderte, die eindeutigen Potenzen rein als einen besonderen Fall der mehrdeutigen anzusehen und auf diesen Grund jene (als Potenzen, welche in diesen schon enthalten seien) ganz fallen zu lassen, theils weil der Umstand dazu nöthigte, dass ihnen wegen der Abweichung in der Zahl der Werthe nicht unbedingt einerlei Gesetze zukommen.

Nach der Bestimmung der neuen Potenz-Werthe wird dann die Untersuchung angestellt, in wie weit die Gesetze der eindeutigen Potenzen auch auf sie anwendbar seien. Dass diese Gesetze für diejenigen Werthe der mehrdeutigen Potenzen, welche zugleich Werthe der eindeutigen sind, gelten mussten, verstand sich von selbst; nicht aber, dass dies auch mit den übrigen Werthen der Fall sein werde. — Auf diese Untersuchung erlaube ich mir hier besonders aufmerksam zu machen, weil das bisher darüber Bekannte nur sehr unvollständig und zum Theil unrichtig war.

Für die Potenzen von Null gibt die Potenz- (oder Exponential-) Reihe gar keinen Werth (d. h. keinen Werth, für den die üblichen Rechnungsregeln noch brauchbar wären), während dies nur theilweise bei den eindeutigen Potenzen der Fall war. Der Umstand aber, dass in den Fällen, wo die eindeutigen Potenzen von Null einen Werth haben, die Summe der Exponential-

reihe bei verschwindend klein werdendem Dignanden sich einer bestimmten Grenze nähert, und zwar einer Grenze, welche mit dem Werthe der eindeutigen Potenzen übereinstimmt, wird benutzt, diese Grenze auf dem Wege der Definition mit als Werth der mehrdeutigen Potenzen gelten zu lassen, um aldann die eindeutigen Potenzen als einen Unterfall der mehrdeutigen auffassen zu können. Gegen diese cumulirende Definition könnte man vielleicht Bedenken erheben, aber schädlich wirken kann dieselbe nicht, wenn in den Rechnungen, in denen die Exponential-Reihe angewendet worden ist, sobald bei den Substitutionen im Endresultate ein Dignand verschwindet, die Rechnung für diesen besonderen Fall wiederholt wird. Dadurch nämlich, dass man die zu substituirenden bestimmten Werthe von vorn herein der Rechnung zum Grunde legt, wird dieselbe bedeutend einfacher und die Anwendung der zusammengesetzten Definition vermieden, so dass das Resultat als ein unzweifelhaftt richtiges neben dem allgemeinen auf die übrigen Fälle bezüglichen stehen darf.

Gestattet man aber die Definition, so erhält man noch für gewisse imaginäre Potenzen von Null einen Werth, und die einzige zweideutige Potenz des sechsten und siebenten Kapitels (0^0) wird zu einer eindeutigen.

Die eindeutigen Potenzen des sechsten Kapitels, obgleich dadurch allgemeiner, dass Dignand und Exponent in ihnen an gar keinen besonderen Inhalt gebunden sind, werden durch die mehrdeutigen ihres Dienstes enthoben, weil in letzteren Dignand und Exponent jeden in der heutigen Analysis vorkommenden Ausdruck vorstellen dürfen, und würden erst dann wieder zur Benutzung kommen müssen, wenn in die Analysis noch höhere Operationen als die der Potenzirung eingeführt werden sollten.

Ueber die Logarithmen, die sich dem jedesmaligen Potenzbegriffe anschliessen, braucht hier nichts bemerkt zu werden.

Was den zweiten Hauptpunkt, das Rechnen mit unendlichen Reihen anlangt, so hat *Ohm* solches unbedingt und unabhängig von jeder Convergenzfrage für zulässig erklärt, sobald die Reihen nur als Formen, d. h. nur als eine Abfolge von Gliedern angesehen werden, welche nach einem gewissen Gesetze zu bilden sind, während Andere überall die Convergenz als Bedingung aufstellen. Mei-

nerseits erachte ich selbst die Erfüllung der Bedingung, dass die Reihen sämmtlich convergiren, nicht für ausreichend.

Eine unendliche Reihe, welche nach dem üblichen Sprachgebrauche die Entwickelung eines geschlossenen Ausdrucks A vorstellt, und nur zwischen gewissen Grenzen convergirt, ist nicht eine reine Umformung von A, da genau identische Ausdrücke für jeden Buchstabenwerth einander gleich sein müssen. Es ist die Sache vielmehr so zu denken, dass die Summe einer beliebigen Anzahl erster Glieder solcher Reihe ein von der Anzahl dieser Glieder abhängiges Ergänzungsglied verlangt, um dem A gleich zu werden, und zwar in der Art, dass dies Ergänzungsglied innerhalb der Convergenzgrenzen, wenn ihm hinlänglich viele Glieder vorausgehen, verschwindend klein wird. Daher darf die Reihe das A nur da ersetzen, wo die Grenze der Convergenz nicht überschritten wird und es sich gleichzeitig nur um einen Näherungswerth handelt. Dieser Art sind z. B. die Entwickelung der nicht-ganzen Potenzen eines Binoms durch den binomischen Lehrsatz *) und die Entwickelung von $\log(1+x)$ durch die logarithmische Reihe. Stellt man also den binomischen Lehrsatz und die Anwendung der logarithmischen Reihe für $\log(1+x)$ unter die Rechnungsgesetze, so sind dieselben durchaus nicht von derselben Geltung, wie die Rechnungsgesetze der gemeinen Arithmetik; sie geben nicht, wie diese, reine, d. h. den Werth unverändert lassende Umformungen. Da nun das Rechnen im Wesentlichen auf Umformungen beruht, so kann ich dem *Ohm*'schen Ausspruche nur dann beipflichten, wenn ich ihn dahin verstehe, dass das Arbeiten mit Reihen, in denen nur das Bildungsgesetz der Glieder beachtet werden soll, unbeschränkt sein darf, so lange bloss Rechnungsgesetze angewendet werden, die nicht auf Reihen von bedingter Convergenz sich stützen.

Selten geht man aber beim Rechnen von Reihen aus, in denen ausschliesslich auf die Form Bezug genommen wird. Fast immer erscheinen sie als Entwickelungen von Funktionen von ge-

*) Für die Entwickelung der Potenz $(1-x)^{-1}$ z. B. ist das Ergänzungsglied $\frac{x^n}{1-x}$.

schlossener Form, sei es dass diese Funktionen gegeben sind oder nur als vorhanden gedacht werden. Alsdann complicirt sich aber die Sache, wofern nicht die Reihen (wie z. B. die Exponentialreihe und die Sinus- und Cosinusreihe, welche zugleich die Definition der Potenzen, der Sinus und Cosinus bilden) unbedingt convergiren und ein genauer Ausdruck für die unterstellten Funktionen sind. Selbst bei der Anwendung der einfachen arithmetischen (also den Werth genau wiedergebenden) Umformungen auf bedingt convergente Reihen kann man unrichtige Resultate für möglich halten, und zwar auch dann, wenn sich die resultirenden Reihen zwischen bestimmten Grenzen noch als convergent erweisen sollten. Denn die Möglichkeit ist nicht von vorn herein ausgeschlossen, dass die Ergänzungsglieder, wenn sie bei der Rechnung beachtet worden wären, sich zu Ausdrücken von endlichem Werthe mit einander verbunden haben würden. Schon bei blossen Aenderungen in der Anordnung der Reihenglieder können Störungen in dem Werthe eintreten. Wenn nämlich z. B. eine Reihe, die nach Potenzen eines Buchstaben geordnet ist, nach Potenzen eines anderen Buchstaben geordnet wird, so werden im Allgemeinen Glieder, die in dem Ergänzungsgliede der einen Reihenform gewissermassen verborgen sind, in der anderen Reihenform als Bestandtheile von Gliedern auftreten, welche ausserhalb des zugehörigen Ergänzungsgliedes erscheinen. Ein Beweis dafür ist, dass in der That die Convergenzgrenzen bei dergleichen Umstellungen oft bedeutende Veränderungen erleiden, und dass z. B. zuweilen die Reihe in der einen Form unbedingt, in der anderen nur bedingt convergirt.

Es bedarf daher ausser dem, dass die Reihen, von denen man ausgeht, und zu denen man durch die Rechnung kommt, convergent sein müssen, der Untersuchung, ob nach der Ausführung der Operationen noch die Werthverhältnisse dieselben sind, wie wenn man es mit endlichen Ausdrücken zu thun gehabt hätte.

Für die Multiplikation von Reihen mit reellen Coefficienten ist diese Untersuchung von *Abel* geführt, der, glaube ich, der Erste gewesen ist, welcher gegen das Verfahren Bedenken erhoben hat, die Rechnungsregeln auf unendliche Reihe in derselben Art wie auf endliche anzuwenden (s. *Crelle's Journal Bd. I p.* 311).

In §. 175 habe ich diese Untersuchung aufgenommen und zugleich auf Reihen mit imaginären Coefficienten ausgedehnt. Im fünften Abschnitte endlich habe ich entsprechende Untersuchungen für die übrigen Rechnungsoperationen angestellt. Zwar ist dabei nur eine besondere Reihenform, die nach ganzen Potenzen eines x fortschreitende, zum Grunde gelegt, allein erstens ist diese Form die wichtigste und fast ausschliesslich in den Anwendungen geforderte, zweitens muss man bei der Entwickelung in andere Formen in der Regel durch diese Reihenform hindurch, und drittens kann das Problem allgemein ohne Voraussetzung einer bestimmten Reihenform gar nicht gestellt werden.

Die hierbei gewonnenen Resultate führen zugleich auf die Lösung der wichtigen Aufgabe, die Merkmale zu bestimmen, an welchen man erkennen kann, ob eine Funktion von x einer normalen Entwickelung nach ganzen Potenzen von x fähig sei, d. h. (nach dem im Buche eingeführten Sprachgebrauche) einer Entwikkelung, die, wenn nicht unbedingt, doch zwischen endlichen Grenzwerthen von x, welche die Null mit in sich begreifen, den Werth der Funktion behält; sowie auf die Bestimmung von Grenzwerthen von x, zwischen denen die Uebereinstimmung zwischen den Werthen der Funktion und ihrer Entwickelung sicher bleibt — also auf Gegenstände, über welche einwurfsfreie Angaben bisher noch nicht existirt haben. Hierdurch gelangt man alsdann auf die Bedingungen für die (normale) Entwickelbarkeit der Funktion $f(x+h)$ nach Potenzen von h, auf welche die Differenzialrechnung (unmittelbar oder mittelbar, je nachdem man sie in der Form der *Lagrange*'schen Funktionsrechnung oder nach der Grenzmethode behandelt) gestützt werden muss, wenn man der Gründlichkeit nicht Abbruch thun will. — Auch für diese Entwickelbarkeit ist mir kein Beweis bekannt, gegen den sich nicht erhebliche Einwendungen machen liessen. — Endlich schliesst sich hieran eine allgemeine, durch das Vorangegangene möglich gewordene genaue Bestimmung der Werthe von x, bei welchen die Continuität einer Funktion von x unterbrochen wird, — worauf unter andern in der Grenzmethode der Beweis für die jedesmalige Existenz einer Grenze mit zu gründen sein würde.

Schliesslich mag hier noch einiges Nähere über die Disposition in dem Werke folgen.

Dem Ganzen geht eine allgemeine Einleitung vorher, welche über das Verhältniss der verschiedenen Zahlenarten zu einander spricht, und in welcher das Geschäft des Rechnens zergliedert wird, um dadurch auf das, was die Analysis zu leisten hat, aufmerksam zu machen. Sie setzt, um mit vollem Nutzen gelesen werden zu können, schon eine gewisse Bekanntschaft mit der Arithmetik voraus, und wird daher, obgleich des allgemeineren Verständnisses wegen alles Speciellere in die Noten verwiesen worden ist, von Anfängern deren Durchlesung am besten bis nach der Lektüre des Ganzen verschoben. Denen, welche schon mit der Analysis bekannt sind, wird sie zugleich dazu dienen, den Gesichtspunkt zu zeigen, von welchem aus Manches im Lehrbuche angesehen sein will.

Die Haupt-Eintheilung in *Arithmetik* und *Analysis* anlangend wird bekanntlich von denen, welche jene nicht mit zu dieser zählen, theils die Arithmetik mit den vier ersten Operationen abgeschlossen, theils ohne scharf angegebene Grenze Einiges von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen hineingezogen. Da nun das Wesentlichste in dem ebenfalls nicht scharf abgegrenzten Gebiete der niederen Analysis (oder der Analysis des Endlichen) sich um die unendlichen Reihen dreht, die Analysis im weitesten Sinne es aber überall mit Umformungen zu thun hat, so ist die Arithmetik als die Lehre von den allgemeinen Umformungen der einfachen Ausdrücke von endlicher Form aufgefasst, und die niedere Analysis auf den elementaren, allgemeinen Theil der Lehre von den unendlichen Reihen beschränkt worden, in der Art, dass die Umformung in die gesuchteste und fruchtbarste Form, in die Form von Reihen, welche nach Potenzen fortschreiten, die Haupttendenz wird. Da die mehrdeutigen Potenzen in ihrer vollen Allgemeinheit sich nur als unendliche Reihen dieser Art betrachten lassen, so gehört dann die Lehre von den mehrdeutigen Potenzen und der damit zusammenhängenden mehrdeutigen Logarithmen in die Analysis.

In dem arithmetischen Theile habe ich die allgemeine Arithmetik von ihren Haupt-Anwendungen abgetrennt. Jene wird im ersten Abschnitte nach den oben angegebenen Principien behandelt, und hat auf Grund des darin befolgten Ganges eine besondere, sonst im Lehrbuche nicht weiter vorkommende Eintheilung

in Kapitel erfahren. Diese Kapitel sind alternirend dem Zeichen- und dem Zahlen-Rechnen gewidmet, und so eingerichtet, dass nach dem gemeinsamen einleitenden ersten Kapitel das 2te, 4te, 6te und 8te Kapitel ein für sich bestehendes, von dem Uebrigen unabhängiges Ganze — die Lehre vom Zeichen-Rechnen — bilden; während die dazwischen liegenden correspondirenden Kapitel vom Zahlenrechnen sich an jene anlehnen.

Die erste Haupt-Anwendung der allgemeinen Arithmetik bildet die besondere Arithmetik. Während in jener alle Ausdrucksformen bei den Formumwandlungen gleich berechtigt erscheinen, wird in dieser das Umformen in Ausdrücke von mehr oder weniger bestimmt vorgeschriebener Form betrachtet. An der Spitze stehen die allgemeinen Umformungen 1) in ganze Funktionen (mit besonderer Rücksicht auf die, als specieller Fall hiervon auftretende Ziffernrechnung) und 2) in die Form $P+Q\sqrt{-1}$. Da in der allgemeinen Arithmetik das Umformen ganz allgemein gefasst worden ist, die Benennung „Ausführung der Operationen“ aber, wie sie in der Ziffernrechnung, und in der in analogem Sinne genommenen Buchstabenrechnung angewendet zu werden pflegt, überall auf eine specielle Endform Bezug hat: so erklärt sich die Stellung, welche beiden angewiesen ist, und namentlich die Trennung der Buchstabenrechnung von der Arithmetik. Da ferner in der Buchstabenrechnung meist nur besondere von den Formen gesucht werden, welche in der Arithmetik in ihrer Totalität behandelt wurden, so bedurfte es in jener fast nur der Namhaft-Machung dieser Formen.

Als zweite Haupt-Anwendung ist die elementare Algebra dargestellt, da die von derselben bezweckte Auflösung der einfachsten Gleichungen nur in einer Abfolge von Umformungen nach den Regeln der Arithmetik, abwechselnd mit der Anwendung eines bestimmten Grundsatzes besteht. Auch lässt sich der Gegensatz zwischen besonderer Arithmetik und Algebra dahin angeben, dass jene das Umwandeln von Ausdrücken in bestimmte Formen, diese das Umwandeln von Gleichungen in eine bestimmte Form bezweckt — nämlich in jene Form, in welcher sich die Auflösung ausspricht.

In der Analysis ist nach einer besonderen Einleitung, welche einige in dieser Disciplin angewendete Begriffe bespricht, im ersten

Abschnitte das Allgemeine über die unendlichen Reihen niedergelegt. Im zweiten Abschnitte wird die Entwickelung der einfachen Funktionen in Reihen vorbereitet und zum Theil (für eindeutige Formen) ausgeführt, während der dritte Abschnitt die Ausführung vollendet. Statt die Aufgabe aber direkt aufzunehmen, wurden hierbei der grösseren Leichtigkeit der Darstellung wegen die Fundamentalreihen sogleich hingestellt, und ihre Eigenschaften aufgesucht, um aus den Eigenschaften derer, welche Entwickelungen einfacher Funktionen sind, diese Funktionen aufzufinden, während die übrigen als Hülfsreihen erscheinen, welche gewissermassen als commensurables Mass für andere unendliche Reihen dienen. Die Lösung der allgemeinen Frage nach der Entwickelung jeder zusammengesetzten Funktion enthält dann endlich der fünfte Abschnitt.

Der vierte Abschnitt ist mehr episodisch eingeschaltet und enthält die weitere Verfolgung der durch die Sinus- und Cosinus-Reihe repräsentirten (Hülfs-) Funktionen, auf welche die vorangegangenen Untersuchungen geführt hatten, so wie der ihnen entsprechenden Bogen-Funktionen, die vergleichsweise jenen ebenso gegenüber stehen, wie die Logarithmen den Potenzen.

Der Gebrauch einiger neuen Benennungen wird Entschuldigung finden, da solche fast durchgängig nur den Zweck haben, Bequemlichkeit im Ausdrucke bei der gewählten Darstellungsweise zu gewähren, so dass sie von selbst schon gar keinen Anspruch auf Anwendung ausserhalb des Lehrbuchs haben.

Der Name Grösse ist nach *Ohm*'s Vorgange nur auf benannte Zahlen beschränkt worden und entspricht also dem, was *Cauchy grandeur* im Gegensatze zu *nombre* und *quantité* nennt. In der That passt auch der Name Grösse für das Negative und Imaginäre zu wenig, und selbst die absoluten Zahlen dürften schicklicher als Mittel zur Bestimmung der Grösse eines Gegenstandes, als selber als Grösse aufgefasst werden.

Bonn, den 3. Aug. 1847.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Erster Theil.

Die Arithmetik.

Erster Abschnitt. Die allgemeine Arithmetik.

Erstes Kapitel. Uebersicht über die einfachen Zahlen- und Zeichen-Verbindungen 23
A. Die Zahlenverbindungen und deren Bezeichnung . . 23
B. Die Verbindungen allgemeiner Zeichen 34

Zweites Kapitel. Die Addition und Subtraktion allgemeiner Zeichen . 38
Grundgesetze; abgeleitete Gesetze; besondere Summen- und Differenz-Werthe; die Null, die additiven und subtraktiven Ausdrücke.

Drittes Kapitel. Die Addition und Subtraktion der Zahlen . . 54
Gesetze der Zahlen-Summen und Zahlen-Differenzen; Berechtigung, beim Zeichen-Rechnen die Summen und Differenzen da als Zahlen-Summen und Zahlen-Differenzen zu betrachten, wo sie als solche eine Bedeutung haben; die positiven und negativen Zahlen.

Viertes Kapitel. Die Multiplikation und Division allgemeiner Zeichen 61
A. Von den Beziehungen der allgemeinen Produkte und Quotienten zu einander 61
Grundgetetze; abgeleitete Gesetze; besondere Produkt- und Quotienten-Werthe, die allgemeine Eins und die umgekehrten Werthe.
B. Von den Beziehungen der allgemeinen Produkte und Quotienten zu den allgemeinen Summen und Differenzen . . . 67
Grundgesetz; beschränkende Grundsätze; abgeleitete Gesetze; besondere Produkt- und Quotienten-Werthe.

Fünftes Kapitel. Die Multiplikation und Division der Zahlen . . 82
A. Von den Produkten, in denen der eine Faktor eine ganze Zahl, der andere Faktor ein allgemeines Zeichen ist . . . 82
Anwendbarkeit der Gesetze des vierten Kapitels auf die vorgenannten Produkte; hinzutretende Relationen.
B. Von den Zahlen-Produkten und Zahlen-Quotienten . . 85
Gesetze der Zahlen-Produkte und Zahlen-Quotienten; gebrochene Zahlen; Berechtigung beim Zeichen-Rechnen die Produkte

Seite

und Quotienten, wenn sie als Zahlen-Produkte und Zahlen-Quotienten eine Bedeutung haben, als solche anzusehen; Bedeutung der allgemeinen Eins; vom Grösseren und Kleineren.

Anhang zum fünften Kapitel. Von der Theilbarkeit der Zahlen . 92

Sechstes Kapitel. Die allgemeinen eindeutigen Potenzen und die ihnen entsprechenden Wurzeln 98

A. Von den Beziehungen der allgemeinen Potenzen und Wurzeln zu einander 98

Grundgesetze; eindeutige und mehrdeutige Wurzeln; abgeleitete Gesetze.

B. Von den Beziehungen der allgemeinen Potenzen und Wurzeln zu den allgemeinen Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten 103

Grundgesetze; besondere Potenz- und Wurzel-Werthe; abgeleitete Gesetze.

Siebentes Kapitel. Die Potenzirung und Radikation der Zahlen . 112

A. Von den Potenzen und Wurzeln, in denen der Exponent eine ganze Zahl, der Dignand und resp. Radikand dagegen ein allgemeines Zeichen ist 112

Anwendbarkeit der Gesetze der allgemeinen Potenzen und Wurzeln; hinzutretende Relationen; Zahl der Wurzelwerthe und Abhängigkeit derselben von einander; die negativen und gebrochenen Potenzen.

B. Von den Zahlen-Potenzen und Zahlen-Wurzeln . . . 122

Gesetze derselben; die absoluten Wurzelwerthe; irrationale Zahlen; das Imaginäre; eindeutige reelle Potenzen; die Potenzen von Null.

Achtes Kapitel. Die allgemeinen eindeutigen Logarithmen . . 135

Grundgesetz; besondere Logarithmen-Werthe; abgeleitete Gesetze.

Neuntes Kapitel. Die Zahlen-Logarithmen 140

Gesetze derselben; eindeutige reelle Logarithmen mit absoluter Basis.

Zweiter Abschnitt. Haupt-Anwendungen der Gesetze der allgemeinen Arithmetik.

I. Die besondere Arithmetik (Verwandlung gegebener Ausdrücke in andere von vorgeschriebener Form) 147

A. Umformung der einfachsten Verbindungen ganzer Funktionen in ganze Funktionen 147

B. Zurückführung der einfachsten Rechnungs-Ausdrücke auf die Form $P+Q\sqrt{-1}$ 150

C. Von der sogenannten Ausführung der Rechnungs-Operationen . 152

a. Die Ziffernrechnung 153

b. Die Buchstabenrechnung 176

D. Von der Reduktion (Zurückführung auf die einfachste Form) . 182

Reduktionen im Allgemeinen; Reduktionen irrationaler Ausdrücke insbesondere.

II. Die Algebra 184

Vom Ordnen der algebraischen Bestimmungsgleichungen; Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade; von der Zahl der Wurzelwerthe der algebraischen Gleichungen im Allgemeinen.

Beilage. Von den benannten Zahlen 205

Zweiter Theil.

Die niedere Analysis.

Seite

Einleitung 219

Das unendlich Grosse und unendlich Kleine; die Nachbarwerthe reeller Zahlen; Continuität der Funktionen; Grenzbegriff; die sogenannten wahren Werthe unbestimmter Ausdrücke.

Erster Abschnitt. Von den unendlichen Summenreihen im Allgemeinen 237

A. Von der Convergenz und Divergenz der Reihen . . 237

B. Von der Gleichheit unendlicher Reihen, die nach Potenzen derselben Veränderlichen fortschreiten . . . 251

C. Von der Entwickelung der Summen und Produkte unendlicher Reihen, die nach Potenzen fortschreiten, in Reihen von derselben Form 257

Zweiter Abschnitt. Von den Fundamentalreihen insbesondere.

A. Die binomische und polynomische Reihe 270

Eigenschaften der binomischen Reihe; Summation derselben; binomischer und polynomischer Lehrsatz.

B. Die Exponential-Reihe 283

Eigenschaften der Reihe; Summation derselben; eindeutige imaginäre Potenzen; Anwendung der allgemeinen Potenzregeln auf die letzteren; natürliche Potenzen.

C. Die logarithmische Reihe 291

D. Die Sinus-Reihe und Cosinus-Reihe 292

Hauptbeziehungen zwischen den Sinus- und Cosinus-Reihen; Continuität derselben; Beziehungen zwischen denjenigen Ausdrücken, welche einerlei Sinus und Cosinus haben.

Dritter Abschnitt. Von den mehrdeutigen Potenzen und Logarithmen.

A. Vom Modulus und Argumente reeller und imaginärer Ausdrücke 306

B. Von den mehrdeutigen Logarithmen mit absoluter Basis . 309

Mehrdeutige natürliche Logarithmen; Werthe derselben; Anwendbarkeit der Gesetze der eindeutigen Logarithmen auf dieselben; mehrdeutige Logarithmen mit beliebiger absoluter Basis.

C. Von den mehrdeutigen Potenzen 316

a. Von den Werthen der mehrdeutigen Potenzen . . 316

b. Von den Bedingungen, unter denen die Gesetze der eindeutigen Potenzen auf die mehrdeutigen anwendbar sind 327

aa. Die Grundgleichungen 331

bb. Die abgeleiteten Gleichungen . . . 358

c. Vervollständigung unvollkommener Potenzgleichungen . 360

D. Verallgemeinerung des Gebrauchs der binomischen und logarithmischen Reihe 362

Binomischer Lehrsatz für imaginäre Dignanden und reelle Exponenten; logarithmische Reihe für imaginäre Logarithmanden,

Seite

binomischer Lehrsatz für imaginäre Exponenten; Werth von 0^0 und $0 \log 0$.

E. Von den Logarithmen mit beliebiger reeller oder imaginärer Basis 384

Vierter Abschnitt. Von den Kreisfunktionen . . 386

Die direkten Kreisfunktionen in der Form $P+Q\sqrt{-1}$; Werthe von z, welche den Gleichungen $\sin z=a+b\sqrt{-1}$, $\cos z=a+b\sqrt{-1}$, $\operatorname{tg} z=a+b\sqrt{-1}$, $\cot z=a+b\sqrt{-1}$ genügen; Beziehungen zwischen den indirekten Kreisfunktionen; indirekte Kreisfunktionen in logarithmischer Form; $\operatorname{tg}^{-1}z$ in Reihenform; die indirekten Kreisfunktionen in der Form $P+Q\sqrt{-1}$; Hauptwerthe der indirekten Kreisfunktionen und Beziehungen zwischen denselben; die Summen und Differenzen indirekter Kreisfunktionen.

Fünfter Abschnitt. Von der Entwickelbarkeit der Funktionen in Reihen, die nach ganzen Potenzen fortschreiten. 410

Einfache und zusammengesetzte Funktionen; normale Funktionen und Entwickelungen. Allgemeine Merkmale normaler Funktionen und Convergenzgrenzen ihrer normalen Entwickelungen; normale Entwickelbarkeit der Funktion f_{x+h} nach Potenzen von h; Lehrsatz über die Unterbrechungen der Continuität der Funktionen.

Einleitung.*)

Von den Zahlen, vom Rechnen und von den Grundsätzen des Rechnens.

1. *Die Zahlen und Grössen.* Die abstrakten oder unbenannten Zahlen dienen theils zur Angabe der Menge von Gegenständen (entsprechend der Frage: wieviel?), theils zur Angabe des Masses von Gegenständen (entsprechend der Frage: wie gross?).

In Rücksicht auf diesen zwiefachen Zweck unterscheiden wir zwei Arten von Zahlen, nämlich:

1) die Zahlen in ihrem engeren, ursprünglichen Sinne, natürliche Zahlen genannt, welche das Mittel des Zählens sind **) und dem ersten Zwecke dienen, und

*) Ueber das Verhältniss dieser Einleitung zum Ganzen des Werks und über deren Benutzung habe ich mich in der Vorrede ausgesprochen.

**) Durch die Bestimmung, Zählmittel zu sein, sind die natürlichen Zahlen hinlänglich charakterisirt. Namentlich schliessen sich z. B. die Brüche dadurch von selbst aus. Denn niemand spricht von $^4/_5$ Behauptungen, $^7/_8$ Freunden etc., obgleich Behauptungen, Freunde etc. zählbare Gegenstände sind; und selbst bei theilbaren Gegenständen wird nicht mit den Brüchen gezählt. Ist nämlich z. B. $^5/_8$ das Resultat einer Zählung, so sind das Gezählte die Achtel, und die eigentliche Zahl, zu der man beim Zählen kommt, ist die Zahl 5. Und bezeichnet man das Mass einer Länge durch $5\,^3/_4$ Fusse, so ist nicht $5\,^3/_4$ die Zahl der Fusse, sondern es ist dieser Zahlausdruck das Resultat zweier Zählungen, bei welchen 5 als Zahl der Fusse, 3 als Zahl der Viertel-Fusse erscheint.

2) die Zahlen im weiteren Sinne, welche das Mittel der Massbestimmung sind, also den zweiten Zweck erfüllen. Die letzteren, welche wir im Gegensatze zu den ersten künstliche Zahlen nennen wollen, enthalten die Reihe der natürlichen Zahlen in sich und ergänzen dieselbe zu einem Continuum.

Wo wir in der Folge von Zahlen sprechen, ohne ein näher bestimmendes Beiwort hinzuzufügen, sind immer die natürlichen Zahlen gemeint.

Dasjenige, was gezählt wird, so wie dasjenige, dessen Ausdehnung durch die künstlichen Zahlen bestimmt wird, nennen wir Grössen.

Im ersten Falle heisst jede einzelne der gezählten Grössen, im zweiten Falle die Grösse, mit deren Ausdehnung die Ausdehnung des zu messenden Gegenstandes verglichen wird — die Grössen-Einheit.

Wir unterscheiden also streng Zahl und Grösse. Da man indess auch Zahlen und Zahlzeichen zählen kann, so werden in besonderen Fällen auch diese als Grössen-Einheiten und Complexe derselben als Grössen betrachtet werden können. So sind z. B. „6 Zahlen“ und „7 Einsen“ Grössen, nicht aber 6 und 7.

Der Ausdruck für eine Grössenmenge oder resp. für ein Grössenmass wird gebildet durch die Verbindung der bestimmenden (natürlichen oder künstlichen) Zahl mit der Grössen-Einheit und heisst benannte Zahl.

2. *Von den Zahlenverbindungen.* Unter Zahlenverbindung verstehen wir jedes aus (natürlichen) Zahlen (die durch Ziffern ausgedrückt sind oder durch Buchstaben vertreten werden können) zusammengesetzte Symbol, wofern demselben Eigenschaften zukommen, welche eine bestimmte Beziehung zu den zusammensetzenden Zahlen haben *).

In solchem Symbol, wenn es aus mehr als zwei Zahlen besteht, können mehr oder weniger Zahlen unter sich wieder eine

*) So sind unter andern $5-3$, $5:7$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{b}$, $4^{1/2}$ Zahlenverbindungen, in denen theils durch die Art, wie die Zahlen zusammengestellt sind, theils durch die verknüpfenden Zeichen: $-$, $:$, $\sqrt{\ }$ und den Bruchstrich die Idee bestimmter Eigenschaften (welche die Bedeutung der Zahlenverbindungen angeben) hervorgerufen werden soll.

Zahlenverbindung bilden und dann durch ein einfaches Zeichen (durch einen einzelnen Buchstaben) ersetzt werden *).

Die Zeichen, durch welche in Zahlenverbindungen die Zahlen oder Zahlenverbindungen mit einander verknüpft sind, und durch welche die Beziehung des Ganzen zu den zusammensetzenden Zahlen angezeigt wird, heissen Rechnungszeichen, die wiederum durch besondere Namen (Additions-, Subtraktions-, Differenzial-, Integralzeichen) etc. von einander unterschieden werden.

Von zwei Zahlenverbindungen sagen wir, sie seien von gleicher Form, wenn in ihnen die Verbindungsweise durch die Rechnungszeichen dieselbe ist; wir sagen, sie seien von gleichem Werth, wenn sie überall, wo es nicht auf die Form ankommt, mit einander vertauscht werden dürfen **).

Existiren mehrere, Zahlen oder Zahlenverbindungen vorstellende Ausdrücke $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, deren jeder durch eine und dieselbe Zahlenverbindung A vertreten werden kann, ohne dass $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ selber unter sich vertauscht werden dürfen ***), so sagt man, A sei mehrdeutig.

Sind dagegen jede zwei Ausdrücke, welche sich durch A vertreten lassen, selber wieder mit einander vertauschbar, so sagt man, A sei eindeutig.

Ist A mehrdeutig, während die von einander verschiedenen (d. h. unter sich nicht vertauschbaren) Ausdrücke $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, an deren Stelle man das A setzen darf, eindeutig sind, so nennt man $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Werthe von A.

3. *Unterscheidung der Gleichungen.* Um zu versinnlichen, dass von zwei Ausdrücken A und B, der erste mit dem zweiten,

*) Darnach ist z. B. $(ab)^c$ eine Zahlenverbindung, auch wenn a, b, c nicht Zahlen, sondern Stellvertreter für Zahlenverbindungen bezeichnen, so dass, wenn etwa a die Stelle von $^3/_4$, b die Stelle von $\sqrt[5]{3}$ und c die Stelle von $^1/_4$ vertritt, die vollständig ausgeschriebene Zahlenverbindung $(^3/_4 \sqrt[5]{3})^{1/2}$ sein würde.

**) Es haben also z. B. $a(b-c)$ und $m(n-p)$ gleiche Form, während $a(b-c)$ und $ab-ac$, obgleich von verschiedener Form, gleichen Werth haben.

***) So ist z. B. sowohl $+4$ als -4 mit $\sqrt{16}$ vertauschbar, obwohl $+4$ und -4 nicht mit einander vertauscht werden dürfen.

oder der zweite mit dem ersten vertauschbar sei, bedient man sich der Formel $A=B$, und nennt selbige eine Gleichung.

Sind A und B eindeutig oder haben im Fall einer Mehrdeutigkeit A und B gleich viele und dieselben Werthe, so dass die Vertauschbarkeit eine gegenseitige ist — so nennen wir $A=B$ eine vollkommene Gleichung. Ist dagegen A mehrdeutig und B eindeutig, oder haben A und B, falls beide mehrdeutig sind, nur einen Werth oder nur einen Theil ihrer Werthe mit einander gemeinschaftlich, so nennen wir $A=B$ eine unvollkommene Gleichung.

4. *Gegenstand der Arithmetik und Analysis.* Die Arithmetik und Analysis bilden zusammen einen Zweig der Mathematik, der sich als diejenige Disciplin bezeichnen lässt, welche das mit dem Namen „Rechnen" belegte Operiren mit Zahlen und Zahlenverbindungen lehrt*).

Worin dieses Operiren besteht, soll nun zunächst in seinen Grundzügen angegeben werden.

5. *Das Rechnen.* In allen Rechnung erfordernden Anwendungen der Mathematik, (in der analytischen Geometrie, in der Mechanik, in den Rechnungsaufgaben des gemeinen Lebens etc.) hat man nie etwas anderes vorzunehmen, als 1) den Bedingungen der jedesmaligen Aufgabe, so weit es thunlich, die Form von Gleichungen zu geben, und 2) aus diesen direkt gebildeten, sogenannten gegebenen Gleichungen neue abzuleiten.

Das letzte Geschäft, das Ableiten neuer Gleichungen aus den vorgegebenen, nennt man das Rechnen; das erste Geschäft (das Ansetzen der Rechnung) bereitet die Rechnung nur vor und erfordert die Kenntniss von der gegenseitigen Abhängigkeit der betrachteten Grössen (d. h. resp. die Kenntniss der Fundamentalgesetze der analytischen Geometrie, der Mechanik etc.).

Die Art, wie beim Rechnen eine Gleichung aus der andern hergeleitet wird, kann eine zwiefache sein. Ist nämlich $A=B$ eine gegebene und $C=D$ eine aus derselben hergeleitete Gleichung, so können sich entweder A und C, B und D bloss durch

*) Man begreift auch zuweilen beide, die Arithmetik und die Analysis unter dem gemeinsamen Namen Analysis, in der dann die Arithmetik den ersten, die Elemente enthaltenden, Theil bildet.

ihre Form, oder auch durch ihren Werth unterscheiden. Im ersten Falle wollen wir $C = D$ eine durch Umformung, im zweiten Fall eine durch Umänderung erhaltene Gleichung nennen.

Das Rechnen besteht sonach nur in Umformen und Umändern von Gleichungen, und dieses Umformen und Umändern geschieht nach bestimmten Grundsätzen, die wir nun, mit Rücksicht auf das, was die Arithmetik und Analysis hierzu zu leisten hat, namhaft machen.

a) *Vom Umformen der Gleichungen.* Das Umformen beim Rechnen setzt voraus, dass man für jede gegebene Zahlenverbindung eine andere von demselben Werth, aber von einer andern dem jedesmaligen Zweck entsprechenden Form anzugeben im Stande sei, und hierzu befähigt uns die Arithmetik und Analysis, deren vornehmster Zweck es eben ist, die mit einander vertauschbaren Ausdrucksformen kennen zu lehren.

Die Gleichungen zwischen den durch die Arithmetik und Analysis als gleichgeltend hingestellten Verbindungsformen (wie z. B. die Gll. $(a+b)c = ac+bc$, $a^c b^c = (ab)^c$) wollen wir, weil sie die Regeln enthalten, nach denen man rechnet, allgemeine Rechnungsregeln nennen.

Die allgemeine Arithmetik beschäftigt sich insbesondere mit den einfachsten Umformungen der einfachsten (nämlich der unter den Namen: Summe, Differenz, Produkt, Quotient, Potenz, Wurzel und Logarithmus in die Mathematik eingeführten) Zahlenverbindungen, und zwar ohne dabei die eine oder die andere Form für die umgewandelten Ausdrücke zu bevorzugen *).

Die besondere Arithmetik, zu welcher namentlich die Ziffernrechnung gehört, behandelt die Umwandlung in besondere bestimmte Formen **), und ist daher nur eine specielle Anwendung der sich auf jede Art der Umformung beziehenden allgemeinen Arithmetik.

*) So ist unter andern das sogenannte Multipliciren algebraischer Summen (also z. B. das Vertauschen von $(a+b)(c-d)$ mit $ac+bc-ad-bd$) nichts weiter als die Verwandlung einer Produktform in eine Summenform; das sogenannte Addiren von Quotienten nichts anderes, als die Verwandlung einer Summenform in eine Quotientenform etc.

**) Derjenige Theil der besonderen Arithmetik, welcher den Namen „Ziffernrechnung“ führt, behandelt die Aufgabe, die verschiedenen Verbindun-

Die Analysis endlich beschäftigt sich mit den zusammengesetzteren Umformungen, (namentlich mit den Umformungen in Reihen *)), so wie mit den Umformungen zusammengesetzterer Zahlenverbindungen.

Es versteht sich von selbst, dass die Arithmetik und Analysis für diejenigen ihrer Rechnungsregeln, welche nicht unbedingt, d. h. nicht unabhängig von der Bedeutung der in ihnen

gen der in Ziffern ausgedrückten Zahlen in eine besondere, die dekadische Form zu bringen, d. h. in die Form einer Summe, deren Glieder Potenzen von 10 zum Faktor haben, oder in die Form eines Quotienten solcher Summen.

Beim allgemeinen Rechnen setzt man z. B. für die Summe 2^3+6^4 nach den allgemeinen Rechnungsregeln bald $2^3+3^4\cdot 2^4$, bald $2^3(1+2\cdot 3^4)$, bald $6^4(1+\frac{1}{2\cdot 3^4})$, etc., weil bald die eine, bald die andere Form für einen zu verfolgenden Zweck bequem sein kann; der Ziffernrechner will dagegen nur eine einzige Form, nämlich die Form 1304, welche eine Abkürzung für die dekadische Summe $1\cdot 10^3+3\cdot 10^2+0\cdot 10^1+4\cdot 10^0$ ist. Ebenso will der letzte für den Quotienten $^1/_8 : {}^5/_{97}$ nur entweder die dekadische Summe 2,425, d. h. die Summe $2\cdot 10^0+4\cdot 10^{-1}+2\cdot 10^{-2}+5\cdot 10^{-3}$ oder den dekadischen Quotienten $\frac{9\cdot 7}{40}$, d. h. $\frac{9\cdot 10^1+7\cdot 10^0}{4\cdot 10^1+0\cdot 10^0}$, während in der allgemeinen Arithmetik die mannigfaltigsten anderen Formen zulässig sind.

*) Dieselben Vortheile, welche die Ziffernrechnung für die Verbindungen numerischer, d. h. in Ziffern ausgedrückter, Zahlen gewährt, indem sie durch die Umwandlung aller Zahlenausdrücke in eine gemeinsame Form die Vergleichung verschiedener Zahlen äusserst bequem macht, bietet die Analysis durch Behandlung der Aufgabe, gleichfalls der bequemen Vergleichung halber, jede dazu fähige Verbindung allgemeiner (d. h. durch Buchstaben vorgestellter) Zahlen in eine Reihe umzugestalten, deren Glieder, wie dort Potenzen von 10, hier Potenzen eines unbestimmt gelassenen (durch einen Buchstaben vorgestellten) Ausdrucks zu Faktoren haben — eine Form, welche eben deshalb auch geeignet ist, den Verlauf stetig sich ändernder Grössen zu ermitteln.

In der niederen Analysis (die Analysis des Endlichen genannt) geschieht die Umwandlung in solche Reihen durch Zurückführung auf einige wenige direkt gefundene Reihen; in der höhern Analysis (in der Differenzial- und Variationsrechnung) nach einer bestimmten allgemeinen Methode, welche sich in dem sogenannten Taylor'schen, und einem demselben verwandten, Lehrsatze ausspricht.

vorkommenden Buchstaben richtig sind, die Grenzen ihrer Gültigkeit zu bestimmen hat *).

Unter Benutzung der allgemeinen Rechnungsregeln, welche das Umformen der Zahlenverbindungen lehren, geschieht dann das Umformen der Gleichungen nach dem folgenden Grundsatze:

„Zwei Ausdrücke sind einander gleich, wenn sie einem und demselben dritten Ausdrucke vollkommen gleich sind."

Ist nämlich C eine Umformung von A, und D eine Umformung von B (sind also $A = C$ und $B = D$ Rechnungsregeln), so leitet man, wenn $A = B$ eine gegebene Gleichung ist, aus dieser durch Umformung die Gleichung $C = D$ her, indem man sagt: da sowohl B als C dem A gleich ist, so ist auch $B = C$, und da deswegen nicht bloss D, sondern auch B dem C gleich ist, so ist auch $C = D$.

Der angeführte Grundsatz hört natürlich auf unbedingt gültig zu sein, wenn die beiden mit einander verglichenen Ausdrücke dem dritten nicht vollkommen gleich sind; d. h. wenn die beiden angedeuteten Rechnungsregeln $A = C$ und $B = D$ unvollkommene Gleichungen sind **).

Es wird daher im Verfolg auf die Rechnung mit mehrdeutigen Ausdrücken ganz besonders Rücksicht genommen werden, und namentlich werden die Grenzen der Vollkommenheit für jede Rechnungsregel und hiermit die Mittel angegeben werden, über die Anwendbarkeit des obigen Umformungsgrundsatzes in jedem besonderen Falle ein sicheres Urtheil zu gewinnen.

*) Vorzugsweise behufs der Ermittelung dieser Grenzen ist im Texte ein Zeichen- und ein Zahlen-Rechnen unterschieden worden.

**) Es ist z. B. 1) $log(a^2) = log[(-a)^2]$ eine vollkommene Gleichung, während $log(a^2) = 2\,log\,a$ und $log(-a)^2 = 2\,log\,-a$ unvollkommene Gleichungen sind. Es hat nämlich $2\,log\,a$ nur die Hälfte der Werthe von $log(a^2)$, und $2\,log(-a)$ gerade die andere Hälfte der Werthe eben dieses Ausdrucks $log(a^2)$. Wollte man daher, die eben angeführten Rechnungsregeln $log(a^2) = 2\,log\,a$ und $log[(-a)^2] = 2\,log(-a)$ benutzend, den Umformungsgrundsatz auf die Gleichung (1) anwenden, so würde man auf die vollkommen unrichtige Gleichung $2\,log\,a = 2\,log(-a)$ kommen.

b) *Vom Umändern der Gleichungen.* Das zweite Geschäft beim Rechnen, welches den Zweck hat, aus Gleichungen zwischen Ausdrücken von gewissem Werthe andere Gleichungen zwischen Ausdrücken von anderem Werthe herzuleiten, besteht vorzugsweise in der Anwendung des unbedingt gültigen Grundsatzes:

„Wenn mit gleichen Ausdrücken dieselben Veränderungen vorgenommen werden, so sind die umgeänderten Ausdrücke einander gleich."

Dieser Grundsatz enthält als besondere Fälle die bekannten Regeln, dass Gleiches zu Gleichem addirt, Gleiches von Gleichem subtrahirt, Gleiches mit Gleichem multiplicirt etc. Gleiches gibt; er schliesst aber auch die Regel, dass Gleiches in Bezug auf denselben Ausdruck differenzirt oder integrirt, Gleiches gibt, und andere in sich.

Geht man dabei von vollkommenen Gleichungen aus, so sind auch die umgeänderten Gleichungen vollkommen; geht man von unvollkommenen aus, so sind die umgeänderten in der Regel gleichfalls unvollkommene, zuweilen jedoch auch vollkommene, unrichtige aber niemals *).

Ausser dem angeführten Grundsatze, welcher bei jeder Rechnung wenigstens einmal zur Benutzung kommt, liefern einige wenige Lehrsätze noch Mittel zur Herleitung umgeänderter Gleichungen, welche aber nur in einzelnen besonderen Fällen anwendbar werden. Es sind dies Lehrsätze, welche aus der Gleichheit ge-

*) So ist z. B. $log\, m + log\, n = log\, (mn)$ eine vollkommene Gleichung, und daher sind auch die umgeänderten Gleichungen

$$(log\, m + log\, n)^p = [log\, (mn)]^p \text{ und}$$

$$(log\, m + log\, n)^p\, [log\, (mn)]^q = [log\, (mn)]^p\, [log\, (mn)]^q$$

vollkommen, nicht aber mehr die Gleichung

$$(log\, m + log\, n)^p\, [log\, (mn)]^q = [log\, (mn)]^{p+q},$$

da dies nicht eine umgeänderte, sondern eine nach der unvollkommenen Rechnungsregel $a^p a^q = a^{p+q}$ umgeformte Gleichung ist.

Wenn Ohm in seinem „System" die unbedingte Richtigkeit unseres Umänderungsgrundsatzes läugnet, so hat dies darin seinen Grund, dass derselbe bei der Anwendung desselben nicht alles Umformen ausgeschlossen denkt.

wisser Zahlenverbindungen auf die Gleichheit bestimmter Bestandtheile derselben schliessen lehren *).

6. *Von den künstlichen Zahlen.* In der Arithmetik erscheinen die künstlichen Zahlen, welche nicht zugleich natürliche Zahlen sind, nicht als etwas Eigenes, sondern als Verbindungen natürlicher Zahlen. Die Rechnung mit künstlichen Zahlen ist daher in der Rechnung mit Zahlenverbindungen schon enthalten, und es ist überflüssig, die für sie geltenden Gesetze (wie dies häufig geschieht) noch eigends zu entwickeln **).

Ihre Bedeutung als Mittel der Massbestimmung kommt nicht in der Arithmetik und Analysis selbst, sondern erst in der Anwendung dieser Disciplinen auf Grössen-Vergleichung zur Sprache, und ergibt sich von selbst aus den Eigenschaften der ihnen entsprechenden Zahlenverbindungen.

Rücksichtlich ihrer Benutzung zur Grössenbestimmung sind die künstlichen Zahlen entweder absolute Zahlen oder relative Zahlen (unter welchem letzten Namen wir hier die positiven und negativen Zahlen und die Null begreifen).

a) Die absoluten Zahlen können sich nur auf Grössen beziehen, die im Raum oder in der Zeit ausgedehnt (und mithin theilbar) sind, und kommen namentlich da in Anwendung, wo die Ausdehnung von Grössen das allein zu Vergleichende ist.

Soll die Ausdehnung einer Grösse *A* mit der Ausdehnung einer anderen mit ihr gleichartigen Grösse *B* verglichen werden, so sind drei Fälle möglich. Entweder lässt sich 1) *A* so theilen, dass jeder einzelne Theil mit *B* einerlei Ausdehnung hat, oder 2) es ist dies nicht der Fall, aber *A* und *B* lassen sich so in gleiche Theile theilen, dass die Theile von *A* mit denen von *B* gleiche Ausdehnung haben, oder endlich 3) es lässt sich weder das eine noch das andere ausführen, d. h. es sind, wie man sich auszudrücken pflegt, *A* und *B* incommensurabel.

*) Die hier gedachten Lehrsätze sind die in der *Arithmetik* §. 79 und in der *Analysis* §§. 21, 22, 23, 89 aufgestellten.

**) So sind z. B. die Brüche nur eine Unterabtheilung der Quotienten, die negativen Zahlen eine Unterabtheilung der Differenzen, etc., und es gelten für sie durchaus keine anderen Gesetze als für die sonstigen Quotienten, Differenzen etc., welche nicht den Werth von Brüchen, negativen Zahlen etc. haben.

Diesen drei Fällen entsprechen eben so viele Unterabtheilungen der absoluten Zahlen, nämlich die **absoluten ganzen Zahlen** (welche mit den natürlichen Zahlen zusammenfallen), die **Brüche** und die **absoluten Irrationalzahlen**.

Im ersten Falle, wenn sich A so theilen lässt, dass jeder Theil mit B einerlei Ausdehnung hat, und a die Zahl dieser Theile ist, nennt man aB (also, falls z. B. B ein Zoll oder eine Minute ist, resp. a Zolle, a Minuten) das Mass von A, die (absolute ganze) Zahl a die **Masszahl** und B die zum Grunde gelegte **Mass-Einheit**.

Im zweiten Falle, wenn etwa der mte Theil von A mit dem nten Theil von B einerlei Ausdehnung hat, kann man sich (die Ausdehnung von B als bekannt vorausgesetzt) eine genaue Vorstellung von der Ausdehnung von A bilden, wenn man die Zahlen m und n kennt. Um als Massausdruck für A wiederum ein Zeichen von der Form αB und von völlig bestimmtem Sinn zu haben, musste man daher für α ein aus den Zahlen m und n zusammengesetztes Zeichen wählen, und um das für α eingeführte Zeichen $\frac{m}{n}$, welches **Bruch** genannt wird, unter Verallgemeinerung des Zahlbegriffs noch den natürlichen Zahlen beizuordnen, musste man, wenn z. B. A grösser als das xfache und kleiner als $x+1$-fache von B ist, dasselbe in der Reihe der natürlichen Zahlen zwischen den Zahlen x und $x+1$ einschalten. Indem man zu diesem Behuf in die Zahl-Einheit selber die Eigenschaft der Ausdehnung, und somit der Theilbarkeit hineinlegte *), durfte man die neue Zahl als das mfache des nten Theils der Einheit erklären.

Da die wirklichen Zahlen m und n dieselbe Beziehung zu einander haben, wie die beiden Glieder derjenigen Zahlenverbindung, die in der Arithmetik unter dem Namen Quotient vorkommt, so wird in Aufgaben, die sich auf **ausgedehnte** Grössen beziehen, umgekehrt jedes Rechnungsresultat, welches die Form eines Quotienten natürlicher Zahlen hat oder annehmen kann, als Bruch auszulegen sein.

*) Auf die Zahleinheit, wenn die Zahl als blosses Zählmittel angesehen wird, findet die Eigenschaft der Ausdehnung oder Theilbarkeit keine Anwendung.

Im dritten Falle endlich, wenn A und B nicht fähig sind, so in gleiche Theile getheilt zu werden, dass die Theile von A denen von B gleich werden, denke man sich B in eine sehr grosse Anzahl, etwa in ν gleiche Theile getheilt, und nenne b die Ausdehnung eines jeden dieser ν Theile. Ist dann A grösser als das μfache und kleiner als das $\mu+1$fache von b, so wird — wenn man wiederum αB als Form für den Massausdruck zum Grunde legt und α in das Gebiet der Zahlen aufnehmen will — weil der Massausdruck $\frac{\mu}{\nu}B$ zu klein, der Massausdruck $\frac{\mu+1}{\nu}B$ zu gross für A ist, α in der aus den absoluten ganzen Zahlen und den Brüchen gebildet gedachten Zahlenreihe zwischen $\frac{\mu}{\nu}$ und $\frac{\mu+1}{\nu}$ einzuschalten sein. Was das für α zu wählende Zeichen betrifft, welches weder eine ganze Zahl noch einen Bruch vorstellen kann, und welches man eine a b s o l u t e I r r a t i o n a l z a h l nennt, so bemerke man, dass man bei der Unvollkommenheit unserer Messungs- und Theilungsmittel durch Messungen selbst nie auf irrationale Zahlen kommen kann, so dass sie nur als Rechnungsresultat, mithin (weil in Rechnungen nie etwas anderes vorkommt als natürliche Zahlen und Verbindungen derselben) in der Form von Zahlenverbindungen erscheinen werden. Man wird daher, um es beim Weiterrechnen mit ihnen möglichst bequem zu haben, für sie eben diese Zahlenverbindungen (Wurzeln, Logarithmen etc. genannt) als Bezeichnung beibehalten können. Diese Zeichen gewähren als Zeichen von ebenso vollkommen bestimmten Eigenschaften, wie die Zahlenverbindungen, die man Brüche nennt, dieselbe Bestimmtheit wie diese.

Da $\frac{\mu}{\nu}B$ eine Ausdehnung ausdrückt, welche um weniger als b von der Ausdehnung von A abweicht, also um so weniger, je kleiner b ist, d. h. je grösser die Anzahl ν der Theile von B genommen wurde, so hat man die Irrationalzahlen auch als Brüche von unendlich grossem (und daher unherstellbarem) Nenner gedacht. — Bei grossem Werth von ν nennt man $\frac{\mu}{\nu}$ einen N ä h e r u n g s w e r t h von α, und dieser kann in der Praxis als hinreichend genau die Ausdehnung von A bestimmend, statt α benutzt werden.

Durch die Einführung der Irrationalzahlen sind die Lücken in der Reihe der (discreten) natürlichen und gebrochenen Zahlen ausgefüllt, so dass die absoluten Zahlen ein Continuum bilden, und sich (um als Bild die einfachste ausgedehnte Grösse zu wählen) unter dem Bilde einer nach der einen Seite hin ins Unbegrenzte verlaufenden geraden Linie denken lassen.

b) Die relativen Zahlen. Will man die Zahlen nicht bloss als Mittel benutzen, das Mass einer Grösse schlechthin auszudrücken, sondern zugleich da, wo Entfernungen von einem gegebenen Anfangspunkte (sei es im Raume oder in der Zeit) bestimmt werden sollen, durch sie auch das Vor oder Hinter diesem Anfangspunkte bezeichnen, so muss man in den Zahlen noch Qualitäten unterscheiden. Am einfachsten lassen sich diese Unterschiede dem Auge an den Zahlzeichen sichtbar machen, wenn man, die Zeichen der absoluten Zahlen beibehaltend, diese mit einem besondern Abzeichen versieht, je nachdem sie den Entfernungen in der einen, oder den Entfernungen in der entgegengesetzten Richtung als Masszahl dienen sollen. — Man hat nun in der That solche (künstliche) Zahlen eingeführt, die eine doppelte Reihe bilden, welche man von einem gemeinsamen Anfangspunkte ausgehend zu denken hat, und von denen die eine Reihe (den Entfernungen der einen Richtung entsprechend) gleichsam nach vorwärts, die andere (den Entfernungen der entgegengesetzten Richtung entsprechend) gleichsam nach rückwärts sich ausdehnt, so dass sich das ganze Gebiet dieser Zahlen unter dem Bilde einer Geraden denken lässt, die von einem in derselben ein für allemal gewählten Punkte nach beiden Seiten ins Unendliche fortläuft. Den gemeinsamen Anfangspunkt hat man mit 0 (Null) bezeichnet, und die Zahlen der vorschreitenden Reihe positive Zahlen, die der zurückschreitenden Reihe negative Zahlen genannt. Nimmt man als Abzeichen der positiven Zahlen das Additionszeichen (+), als Abzeichen der negativen Zahlen das Subtraktionszeichen (—), so kann man diese Abzeichen gleichzeitig als Rechnungszeichen behandeln, und die Rechnungsgesetze der positiven und negativen Zahlen sind dann keine anderen, als die der Summen und Differenzen, also einfacher Zahlenverbindungen *). Umgekehrt lässt sich hieraus die Folgerung ab-

*) Schreitet man vom Nullpunkt aus in der Reihe der negativen Zahlen zu-

leiten, dass in Aufgaben, wo es sich um Ausdehnungen der erwähnten Art handelt, die Rechnungsresultate von absolutem Zahlenwerth als Ausdehnungen in der einen Richtung aufgefasst werden dürfen, und bei Rechnungsresultaten, die sich in der Form einer Differenz absoluter Zahlen, in welcher der Subtrahend grösser als der Minuend ist, darstellen lassen, der Ueberschuss des Subtrahenden über den Minuenden — Ausdehnungen in der entgegengesetzten Richtung bezeichnet.

Während der Gebrauch der absoluten Zahlen schon eingeschränkter ist, als der Gebrauch der natürlichen Zahlen (insofern jene **nur** auf ausgedehnte Grössen anwendbar sind), ist wiederum die Anwendung des Negativen eingeschränkter als die der absoluten Zahlen. Direkt findet das Negative nur da seine Stelle, wo Richtungsverschiedenheiten einen Sinn haben und zwar Verschiedenheiten nach **zwei entgegengesetzten** Seiten. Wo man sonst noch des Negativen sich bedient, ist es eine Uebertragung bei

rück bis zu einem Punkt, der über alle negative Zahlen, die man gerade zu betrachten hat, hinausliegt, und nimmt diesen Punkt für einen Augenblick (statt der Null) als Anfangspunkt der Zahlenreihe, so dass man alle zu betrachtenden Zahlen auf einer und derselben Seite hat, so wird, weil nunmehr eine Unterscheidung von Vorwärts und Rückwärts überflüssig geworden ist, auch ein Unterschied von Zahlenqualitäten unnöthig, und alles lässt sich als absolute Zahlen denken. Die bisherige Null erscheint alsdann selbst als absolute Zahl, die bisherigen positiven Zahlen werden absolute Zahlen, die grösser als Null sind, also etwas zu der (bisherigen) Null Addirtes, und die negativen Zahlen werden absolute Zahlen, die kleiner als Null sind, also etwas von Null Subtrahirtes. Die entsprechenden Zeichen $0+a$, $0-a$, welche nunmehr keine Zahlen, sondern Summen und Differenzen sind, sagen aus, dass die Entfernung resp. um a grösser, und um a kleiner als die Entfernung der Null (von dem neu hineingedachten Anfangspunkt) ist. Indem man die Null nicht mit hinschreibt, sondern nur hinzudenkt, so dass die Ausdrücke jener Entfernung $+a$ und $-a$ werden, versieht das $+$ und $-$ Zeichen zugleich die Stelle des Abzeichens der vor- und zurückschreitenden Zahlen.

Zu der Einführung und Bezeichnungsweise der positiven und negativen Zahlen ist man auf dem hier angegebenen Wege **nicht** gekommen, wie denn überhaupt der Weg, auf dem eine Wissenschaft sich ausbildet, nicht immer der systematische ist. Man ist vielmehr darauf gekommen, als man solchen Rechnungsresultaten, die in der Form unmöglicher Differenzen erschienen, einen Sinn unterzulegen sich bemühte.

Grössenpaaren, die in solchem Verhältnisse zu einander stehen, dass die Vermehrung der einen einer ebenso grossen Verminderung der anderen gleichkommt, und die daher in derselben Beziehung zu einander stehen, wie die beiden Glieder einer Differenz absoluter Zahlen.

Die positiven Zahlen fallen ihrem Werthe nach mit den absoluten Zahlen zusammen, d. h. in den Rechnungen darf man jede absolute Zahl a und die ihr entsprechende positive Zahl $+ a$ mit einander verwechseln.

Das was wir, um den Gegensatz zu den natürlichen Zahlen stärker hervorzuheben, künstliche Zahlen genannt haben, nennt man gewöhnlich (die Fähigkeit, auf Grössen bezogen zu werden, ins Auge fassend) reelle Zahlen.

Dem Vorstehenden nach können wir nun die reellen Zahlen, im Hinblick auf ihre Anwendung bei der Grössenvergleichung, bestimmter bezeichnen als Mittel, das Mass der Ausdehnung von (ausgedehnten) Grössen mit oder ohne den Nebensinn einer bestimmten von zwei entgegengesetzten Messungs- oder Ausdehnungsrichtungen, so wie die absoluten Zahlen als diejenige Unterabtheilung derselben, welche die Grössenausdehnung ohne weitere Nebenbeziehung auszudrücken bestimmt ist. Oder es lassen sich, wenn man bei der Aufstellung des Zahlbegriffs die künstlich hineingebrachte und complicirende, dem Rechner fremdartige Unterscheidung einer Richtungsverschiedenheit aus dem Spiele lassen will, die absoluten Zahlen als den Massstab aller Ausdehnung (mithin selbst als das abstrakt Ausgedehnte und daher Theilbare) auffassen, und dann unter dem Reellen die Rechnungsausdrücke denken, welche fähig sind, in die Form einer Differenz absoluter Zahlen gebracht zu werden.

Innerhalb der Arithmetik und Analysis selber, wo Grössen gar nicht zur Sprache kommen, hat man dagegen, wie schon oben bemerkt wurde, die reellen Zahlen nur als Zahlenverbindungen anzusehen.

7. *Das Imaginäre und die werthlosen Formen.* Jede Zahlenverbindung, die nicht den Werth einer reellen Zahl hat, nennt man imaginär. Was die Benennung „imaginär" betrifft, so schreibt sie sich davon her, dass man die Analysis und die Lehre von der Grössenbestimmung (welche nur eine besondere, wenn auch die

hauptsächlichste Anwendung der Analysis ist) von einander ungetrennt lassend, von Jeglichem verlangte, dass es auch einen Sinn in der Grössenwelt habe *), und geneigt war, alles was nicht Zahl ist, als ein Nonsens zu betrachten. In der Grössenwelt hat man allerdings noch nichts dem Imaginären Entsprechendes gefunden, oder auch nur für dasselbe einen Sinn der Art ermittelt, wie man z. B. einen in das Negative hineinzulegen gewusst hat **). Allein

*) Indem man die Zahlen (die natürlichen wie die künstlichen) selber als Grössen auffasste, und man einerseits in der Analysis nur ein Rechnen mit Grössen sah, andrerseits aber doch mit dem Nicht-Reellen, auf welches sich der Begriff „Grösse" nicht wollte anwenden lassen, zu rechnen sich veranlasst fand, so nannte man dasselbe imaginäre oder eingebildete Grössen, um damit zu bezeichnen, dass man beim Rechnen das Nicht-Reelle, obgleich es in Wirklichkeit keine Grösse sei, doch als Grösse denken und behandeln müsse. Warum es aber als Grösse gedacht und behandelt werden dürfe, ist nirgends klar ausgesprochen. — Man bedient sich für den Ausdruck imaginäre Grösse auch zuweilen des Namens unmögliche Grösse, oder überträgt auch, um den Ausdruck zu verbessern, das Prädicat unmöglich auf die Operation. Nennt man aber z. B. eine Wurzel von nicht-reellem Werth eine unmögliche Radication, so kann man mit demselben Recht die Brüche unmögliche Divisionen und das Negative unmögliche Subtraktionen nennen.

**) Man hat zwar gemeint, eine geometrische Bedeutung des Imaginären entdeckt zu haben; indess hat es damit folgende Bewandtniss.

Die imaginären Ausdrücke lassen sich sämmtlich auf die Form $p+q\sqrt{-1}$ zurückbringen, wo p und q reelle Zahlen vorstellen. Denkt man sich daher unter p und q rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, so entspricht jedem imaginären Werth ein besonderer Punkt in der Ebene der Coordinatenaxen (während das Reelle, als dem Fall, wo $q=0$ ist, angehörig, den Punkten der Abscissenaxe correspondirt), und man kann daher die ausserhalb der Abscissenaxe liegenden stetig auf einander folgenden (continuirliche Linien bildenden) Punkte einer Ebene als ein Bild für die Continuität und Aufeinanderfolge imaginärer Werthe benutzen, ebenso wie sich die Punkte einer geraden Linie als Bild für die continuirliche Aufeinanderfolge reeller Zahlen gebrauchen lassen. Ganz dasselbe leistet aber auch alles andere, was gleichfalls die Eigenschaft hat, welche den Vergleich des Imaginären mit der Ortslage der Punkte einer Ebene gestattete — nämlich die Eigenschaft, von zwei reellen Zahlen (oder von zwei durch reelle Zahlen bestimmbaren Grössen) abzuhängen.

Auf Grund jener Vergleichbarkeit des Imaginären mit Ebenen-Punkten

für die Analysis ist es gleichgültig, ob die Ausdrücke, mit denen sie sich beschäftigt, ein Grössenmass vorstellen können oder nicht, da sie nicht die Gesetze der Grössenverhältnisse, sondern die Gesetze der Zahlenverbindungen betrachtet. Bei der Behandlung der sich auf Grössen beziehenden Aufgaben sind die Gleichungen des Ansatzes nicht Gleichungen zwischen Grössen, sondern Gleichungen zwischen Verbindungen derjenigen Zahlen, welche entweder die Menge dieser Grössen ausdrücken, oder deren Masszahlen zusammensetzen, und nach der Vollendung des Ansatzes, also dann, wenn die Benutzung der Analysis beginnt, hat man es nicht mehr mit den Grössen, sondern mit den Beziehungen der aufgestellten

hat man nun die Behauptung aufgestellt: dass, wie das Positive und Negative Grössen entspricht, die nach zwei entgegengesetzten Richtungen hin abgemessen werden, so das Imaginäre dem entspreche, was auf den übrigen, von diesen beiden Hauptrichtungen abweichenden Richtungen abzumessen ist (die Grösse des Abzumessenden durch den Radius Vektor des Punktes (p, q), die Schiefe der Richtung durch den Winkel zwischen dem Radius Vector in der Abscissenaxe bestimmt gedacht).

Sollte aber der Zusammenhang zwischen dem Imaginären und den Abmessungen in schiefer Richtung ein tieferer sein, als der eben angedeutete ganz zufällige, so müssten gewiss geometrische Aufgaben existiren, in denen ein imaginäres Resultat von der Form $p+q\sqrt{-1}$ wirklich auf einen Punkt mit den Coordinaten p und q hindeutet — was nicht der Fall ist.

Dass man einige bekannte Beziehungen zwischen imaginären Ausdrücken mit Hülfe jener Parallelisirung hat finden können, kam daher, dass, wenn man die Bestandtheile p und q von $p+q\sqrt{-1}$ einmal als Coordinaten einführte, alle Beziehungen zwischen Coordinaten sich wiederum nothwendig den Bestandtheilen imaginärer Ausdrücke anpassen lassen mussten — es war eine Bewegung in einem Cirkel. Die *Einführung* des p und q als Coordinaten war eben das Willkürliche. — Das was die Täuschung vergrössern musste, war, dass dasjenige, was man beim Imaginären Modulus und Argument nennt, aus ganz natürlichen Gründen den Polar-Coordinaten des Punktes (p, q) entspricht.

Bei dem Räsonnement, in welchem man einen Beweis für die Nothwendigkeit zu erkennen glaubte, dass p und q coordinaten-artige Grössen seien, hat man ohne alle Berechtigung einen geometrischen Satz, der für absolute Linienlängen gilt und bewiesen wird, auf Linien ausgedehnt, denen positive und negative Zahlen als Masse untergelegt worden sind.

Zahlenverbindungen zu thun. Nach Vollendung der Rechnung endlich, also nachdem die Analysis ihre Dienste geleistet hat, ist das Resultat erst wieder auf die Grössen zu beziehen, und zu fragen, ob es, ihnen als Masszahl untergelegt, einen Sinn bietet. Während der Rechnung betrachtet man die Zahlenverbindungen eben nur als Zahlenverbindungen, d. h. als Zeichen, welche vermöge gewisser Eigenschaften nach bestimmten Gesetzen Formumwandlungen zu erfahren fähig sind. Ob sie reell oder imaginär sind, d. h. ob sie unter ihren Eigenschaften auch die haben, dass sie sich in Differenzen absoluter Zahlen umformen lassen oder nicht, hat nur dann Interesse, wenn sie zufällig bei imaginärem Werthe anderen Gesetzen der Formumwandlung gehorchen sollten, als bei reellem Werthe, und selbst dann hat das Reelle vor dem Imaginären keinen Vorzug, sondern sie sind gleichberechtigt und von gleichem Range als Formen, die sowohl in dem einen, wie in dem andern Falle nach bestimmten Gesetzen sich richten.

Was nun die Bedeutung des Resultats in den Rechnungen betrifft, so hat dasselbe, wenn es auf Grössen bezogen werden soll, allemal einen Sinn und ist, so zu sagen, ein mögliches, so oft es den Werth einer natürlichen Zahl hat; hat es den Werth einer künstlichen Zahl, so kann es je nach der Natur der Grössen bald ein mögliches bald ein unmögliches sein. Ist es z. B. einer gebrochenen oder irrationalen Zahl gleich, so ist es nur in denjenigen Aufgaben ein mögliches, in denen die Grössen ausgedehnte sind ($^5/_6$ Würfe, $^3/_{100}$ Worte, $^2/_3$ Spaziergänge würden unmögliche Resultate sein). Wenn es den Werth einer negativen Zahl hat, so verliert es seinen Sinn, wenn es sich nicht um Grössenpaare handelt, die in demselben Verhältnisse stehen, wie die Glieder einer Differenz. Ein Resultat von imaginärem Werthe verliert völlig seinen Sinn, wenn es sich überhaupt um Grössen handelt; es behält aber einen analytischen Sinn, d. h. einen Sinn als Zeichen, welches vermöge bestimmter Eigenschaften in festen Beziehungen zu natürlichen Zahlen steht, und bleibt daher in allen rein analytischen Aufgaben, (d. h. wo Ausdrücke von bestimmten analytischen Eigenschaften gesucht werden) ein gültiges Resultat.

Endlich ist aber noch der Fall denkbar, dass das Resultat

gar keinen, also auch keinen analytischen Sinn mehr hat (wie z. B. bei analytischen Aufgaben, wenn gar keine Ausdrücke von den geforderten Eigenschaften existiren). Solche Resultate haben immer noch das Aussehen von Zahlenverbindungen, ohne aber wirklich welche zu sein, insofern ihnen die Eigenschaften abgehen, welche die Verbindungen von derselben Form sonst charakterisiren. Formen von dieser Beschaffenheit werden wir unter dem Namen werthloser oder bedeutungsloser Formen kennen lernen. Es sind dieselben in der Analysis ebenso wichtig und unentbehrlich, wie das Reelle und Imaginäre. Nämlich ebenso wie z. B. die imaginären Formen die Unmöglichkeit eines auf Grössen sich beziehenden Resultats anzuzeigen bestimmt sind, so ist die werthlose Form bestimmt, die Unmöglickeit eines analytischen Resultats anzuzeigen.

Schlussbemerkung. Wenn wir im Folgenden bei der Entwickelung der Arithmetik und Analysis nicht die künstlichen Zahlen als etwas schon Fertiges hinstellen und zum Grunde legen (wie man es meistens thut, indem man die Anwendung der Rechnung auf Grössen-Verhältnisse ins Auge fassend, die Zahl durch Erweiterung ihres Gebiets sogleich zu einem ausreichenden Grössen-Vergleichungsmittel ausgebildet denkt), sondern jene Disciplinen als eine für sich bestehende, von ihren Anwendungen unabhängige Wissenschaft behandelnd, nur die natürlichen Zahlen zur Grundlage nehmen, und die Gesetze für deren Verbindungen aufsuchen, so dass wir die verschiedenen Arten der künstlichen Zahlen bei der Entwickelung der Eigenschaften, welche diesen Verbindungen zukommen, von selber entstehen lassen: so geschieht dies deswegen, weil wir diesen Gang für einfacher und wissenschaftlicher halten. Abgesehen nämlich davon, dass man im ersten Falle neben den Zahlen, deren Einheiten als etwas Ausgedehntes, Theilbares aufgefasst werden müssen, dennoch auch die natürlichen Zahlen handhaben muss, insofern die Zahlen in den Zahlenverbindungen oft als blosses Zählmittel, also als etwas aus unausgedehnten, untheilbaren Einheiten Bestehendes auftreten — ist man erstens gezwungen, für jede besondere Art der (künstlichen) Zahlen die Rechnungsgesetze fast bei jeder Operation besonders zu entwickeln (wobei man überdies hin und wieder Ein und Dasselbe doppelt erhält — einmal als Gesetz für künstliche

Zahlen, das andere Mal als Gesetz der ihnen entsprechenden Zahlenverbindungen), und zweitens muss man, da sich das Imaginäre bis jetzt noch nicht unter einen allgemeinen Zahlbegriff hat bringen lassen, wenn man gründlich verfahren will, neben der Lehre von den Operationen mit künstlichen Zahlen eine Lehre von den Operationen mit imaginären Ausdrücken noch besonders aufstellen. Bei dem zweiten Gange der von uns befolgt werden soll, hat man es dagegen mit nichts weiterem als mit Zahlenverbindungen zu thun, und die verschiedenen Arten künstlicher Zahlen sammt dem Imaginären (als Dinge, welche unter dem Begriff der Zahlenverbindungen subsummirt sind) werden mit einem Schlage, und bei allen Operationen nach einer und derselben Methode abgehandelt. Es hat also das letzte Verfahren offenbar den Vorzug der Einheit und Einfachheit für sich.

Ueberdies wird man bei der ersten Methode, wenn man die Lehre vom Imaginären besonders und mit genügender Gründlichkeit behandeln will — entweder in derselben Art verfahren müssen, wie wir es mit den Zahlenverbindungen insgesammt im Folgenden gethan haben, oder man wird (weil man bei allen neu einzuführenden Rechnungsformen Gleichmässigkeit in der Behandlung bezwecken muss) wenigstens die Voruntersuchung eintreten lassen müssen, welche Attribute man dem Imaginären beilegen darf und muss, damit es denselben Rechnungsregeln unterworfen bleibt, wie das Nicht-Imaginäre. Diese Untersuchung (aber allgemein auf alle Zahlenverbindungen ausgedehnt) ist es aber, welche unserer Darstellung zu Grunde liegt, so dass man jedenfalls direkt oder indirekt auf unsere Entwickelungen zurückkommen muss. Geschieht dies aber, so ist die vorangegangene besondere Behandlung der künstlichen Zahlen mehr oder weniger überflüssig gewesen.

Erster Theil.

Die Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Die allgemeine Arithmetik.

Erstes Capitel.

Uebersicht über die einfachen Zahlen- und Zeichen-Verbindungen.

A. Die Zahlenverbindungen und deren Bezeichnung.

§. 1. *Verhältniss der Arithmetik und Analysis zur Grössenlehre.* Das Material der Arithmetik und Analysis sind die eigentlichen oder natürlichen Zahlen (d. h. diejenigen Zahlen, die eine Reihe bilden, welche mit der einfachen Einheit beginnt und in welcher jede folgende eine Einheit mehr enthält als die vorhergehende). Diese Wissenschaften beschäftigen sich nämlich damit, die natürlichen Zahlen auf bestimmte Arten mit einander zu verknüpfen, und die Beziehungen, in denen diese Verknüpfungen zu einander stehen, auszumitteln.

Die nicht-natürlichen Zahlen lassen sich in die Kategorie der gedachten Zahlenverknüpfungen stellen; wir werden dieselben stets durch Hinzufügung eines näher bestimmenden Beiwortes von den natürlichen Zahlen, welche wir schlechtweg Zahlen nennen werden, unterscheiden.

Das Material der Grössenlehre sind die Grössen, mit welchem Namen wir zählbare und messbare Gegenstände belegen, wenn an ihnen ihre Menge resp. ihre Ausdehnung betrachtet werden soll. Die Aufgabe der Grössenlehre ist nämlich, die Beziehungen, in denen Grössen hinsichtlich ihrer Menge oder Ausdehnung zu einander stehen, zu ermitteln und ihre Menge oder Ausdehnung selber aus diesen Beziehungen bestimmen zu lehren.

Zur Angabe der Menge und der Ausdehnung von Grössen dienen die Zahlen und Verknüpfungen derselben, dergestalt dass

jeder Beziehung zwischen Grössen eine entsprechende Beziehung zwischen Zahlen und Zahlen-Verknüpfungen zum Grunde liegt, und demnach für eine vollständigere Grössenlehre die Arithmetik und Analysis die nothwendige Grundlage bilden.

§. 2. *Bezeichnung der Zahlen.* Wenn man von einer Zahl allgemein sprechen, und also Jedem überlassen will, wie viel Einheiten er sich darunter denken wolle, so bezeichnet man dieselbe durch Buchstaben, statt durch Ziffern; man bedient sich aber der Buchstaben als Zahlzeichen auch dann, wenn die Zahl zwar eine bestimmte, aber von unbekanntem Werthe ist, oder drittens als Abkürzungszeichen für bekannte Zahlen.

Will man versinnlichen, dass eine Zahl durch Vermittelung von anderen Zahlen gebildet worden ist, so stellt man dieselbe durch ein zusammengesetztes Zeichen vor, in welchem die vermittelnden Zahlen als Bestandtheile vorkommen. Durch die Art, wie diese Zahlen zu einem zusammengesetzten Zeichen verbunden sind, wird dann die Art und Weise der Entstehung der fraglichen Zahl angedeutet. Jedes zusammengesetzte Zahlzeichen dieser Art nennen wir eine zahlbezeichnende Zahlenverbindung. — Die einfachsten derselben sind diejenigen, die wir im nächsten §. unter dem Namen der Zahlensummen, der Zahlenprodukte und der Zahlenpotenzen näher betrachten wollen.

§. 3. *Direkte zahlbezeichnende Zahlenverbindungen.*

a) die Zahlensumme ist das Zeichen für diejenige Zahl, welche durch Vereinigung der Einheiten zweier anderen Zahlen gebildet ist. Werden diese beiden Zahlen durch a und b vorgestellt, so ist das Zeichen der Zahlensumme $a+b$ (sprich a plus b) oder $b+a$, je nachdem zu den Einheiten der Zahl a die der Zahl b oder zu den Einheiten der Zahl b die der Zahl a hinzugefügt worden sind. — a und b heissen die Summanden oder Glieder der Summe, und das Vereinigen derselben zur neuen Zahl $a+b$ heisst: b zu a addiren.

Es ist hiernach also z. B. die Summe von 3 und 5 nicht 8, sondern $3+5$, da der Name Summe nur dem die Bildungsweise der Zahl angebenden Zeichen beigelegt worden ist, dem Zeichen 8 aber die Entstehung aus den Zahlen 3 und 5 nicht angesehen werden kann. Das Zeichen 8 ist nur ein Ausdruck für den Werth der Summe.

b) Das Zahlenprodukt ist das Zeichen für diejenige Zahl, welche dadurch entstanden ist, dass man eine Zahl so oft zu sich selbst addirt hat, als eine zweite Zahl Einheiten enthält. Ist a die Zahl, welche zu sich selbst addirt worden ist, und war das Addiren ein bmaliges, so ist das Zeichen für das Zahlenprodukt $a \times b$ oder $a \cdot b$ oder ab (sprich: a mal b). Die Zahlen a und b heissen die Faktoren oder Glieder des Produkts. Will man beide von einander unterscheiden, so nennt man a den Multiplicandus und b den Multiplicator. Das Bilden der durch das Zeichen ab vorgestellten Zahl heisst: a mit b multipliciren.

Wir erinnern wiederum, dass z. B. das Zahlenprodukt von 2 und 4 durchaus nicht 8, sondern $2 \cdot 4$ ist, weil 8 ein einfaches Zahlzeichen, das Zahlenprodukt aber als zahlbezeichnende Zahlenverbindung seiner Erklärung zufolge ein zusammengesetztes (die Entstehung einer Zahl versinnlichendes) Zahlzeichen ist.

c) Die Zahlenpotenz ist das Zeichen für eine Zahl, welche dadurch entstanden ist, dass man eine Zahl so oft mit sich selbst multiplicirt hat, als eine zweite Zahl Einheiten enthält. Bezeichnet man die letzten beiden Zahlen resp. mit a und b, so ist das Zeichen für die Zahlenpotenz a^b (sprich: a hoch b, oder a auf der bten Potenz, oder bte Potenz von a). Die Zahl a heisst der Dignand, die Zahl b der Exponent der Potenz. Das Bilden der Zahl a^b aus den Zahlen a und b heisst: a mit b potenziren.

Setzt man also z. B. für 2^3 die Zahl 8, so ist die nicht die 3te Potenz von 2, sondern nur ein Ausdruck für den Werth dieser Potenz; die Potenz selbst ist das zusammengesetzte Zahlzeichen 2^3.

§. 4. ***Bedeutung der Klammern.*** Sind die Zahlen, welche in einer Zahlenverbindung zu einem zusammengesetzten Zahlzeichen verbunden werden sollen, selber durch zusammengesetzte Zahlzeichen vorgestellt, so schliesst man dieselben, um jede Zweideutigkeit zu verhüten, in Klammern (Parenthesen).

Sind also z. B. $a + b$ und c Zahlen, welche zu einem Zahlenprodukt zu vereinigen sind, so bezeichnet man dasselbe durch $(a + b)c$, statt durch $a + b \cdot c$, da man dem letzteren Zeichen nicht würde ansehen können, ob es ein Produkt aus $a + b$ und c oder eine Summe aus a und $b \cdot c$ vorzustellen hat. Ebenso bezeichnet man die Zahlensumme der Zahlen ab und $c + d$ durch

$(ab) + (c + d)$, das Zahlenprodukt aus a und b^c durch $a\,(b^c)$, die Zahlenpotenz aus $a + b$ und cd durch $(a + b)^{(cd)}$. Für $(a+b)^{(cd)}$ dürfte man indess auch $(a + b)^{cd}$ schreiben, weil das letzte Zeichen sich nicht auf zwiefache Weise auslegen lässt.

§. 5. *Erklärung.* Um zu versinnlichen, dass zwei Ausdrücke mit einander vertauscht werden dürfen, schreibt man sie, getrennt durch das Zeichen $=$ (ausgesprochen: gleich) neben einander, und nennt die entstehende Formel eine Gleichung.

So wäre z. B. $2 \cdot 4 = 3 + 5$ eine Gleichung, weil die beiden Ausdrücke $2 \cdot 4$ und $3 + 5$ als Zeichen für ein und dieselbe Zahl 8 *) mit einander vertauschbar sind.

§. 6. *Indirekte zahlbezeichnende Zahlenverbindungen.* Wenn eine Zahl mit einer anderen zu einer dritten Zahl (durch Addition, Multiplication, Potenzirung oder durch irgend eine andere Operation) verbunden worden ist, so kann man für die erste oder die zweite Zahl ein besonderes Zeichen wünschen, welches ihren Zusammenhang resp. mit der zweiten und dritten oder mit der ersten und dritten Zahl versinnlicht. Solches Zeichen, welches natürlich im ersten Falle die 2te und 3te Zahl, im zweiten Falle die 1te und 3te als Bestandtheile in sich enthalten muss, und demnach wiederum ein zusammengesetztes Zahlzeichen sein wird, nennen wir eine indirekte zahlbezeichnende Zahlenverbindung. Jeder der drei Zahlenverbindungen des §. 3 (die wir behufs des Gegensatzes direkte genannt haben) werden sonach zwei indirekte entsprechen. Diejenigen derselben, welche sich wesentlich von einander unterscheiden, sind die folgenden.

a) Die Zahlendifferenz. Bezeichnet man den Werth der Summe $a + b$ durch c, so kann man für die Zahl a ein anderes Zeichen haben wollen, welches anzeigt, in welchen Zusammenhang sie mit den Zahlen b und c gebracht werden kann, nämlich, dass sie mit b durch Addition verbunden, die Zahl c hervorbringen würde. Das dafür eingeführte Zeichen ist $c - b$, in welchem man c den Minuenden oder das erste Glied, und b den Sub-

*) Wir sagen absichtlich, dass $2 \cdot 4$ und $3 + 5$ eine und dieselbe Zahl vorstellen, nicht dass sie gleiche Zahlen vorstellen, weil es zwei gleiche Zahlen nicht gibt. Jede Zahl ist nur einmal in der Zahlenreihe vorhanden.

trahenden oder das zweite Glied nennt. Das Zeichen $c - b$ selbst (die erste der zur Zahlensumme gehörigen indirekten zahlbezeichnenden Zahlenverbindungen) nennen wir Zahlendifferenz.

Setzt man in die Gleichung $a + b = c$ für a das neu eingeführte Zeichen $c - b$, so geht dieselbe über in

$$(c - b) + b = c.$$

Diese Gleichung lässt sich als Symbol für die Erklärung der Zahlendifferenz betrachten, da sie ausspricht, dass das Zeichen $c - b$ etwas ist, welches, wenn man b zu demselben addirt, c gibt, oder (wenn wir uns der eben eingeführten Namen bedienen), dass die Zahlendifferenz eine Zahl vorstellt, welche ihren Minuenden hervorbringt, wenn man zu ihr den Subtrahenden addirt.

Will man von den Zahlen b und c auf die Zahl a zurückgehen (will man also die durch $c - b$ vorgestellte Zahl bilden), so muss man von den Einheiten der Zahl c die Einheiten der Zahl b hinwegnehmen. Dieses (in einem Vermindern der Einheiten von c bestehende) Bilden der Zahl $c - b$ heisst b von c subtrahiren.

Aehnliches, wie über die Zahl a, (das erste Glied unserer Summe) lässt sich nun auch über die Zahl b (das zweite Glied deselben), sagen. Man kann nämlich für die Zahl b ein Zeichen verlangen, welches ihren Zusammenhang mit a und c ausdrückt, d. h. welches zu erkennen gibt, dass sie zu a addirt, c gibt, etc. Dies weiter zu verfolgen ist aber überflüssig, da offenbar $a + b$ und $b + a$ einerlei Zahl vorstellten, die Frage nach dem zweiten Gliede von $a + b$ also zusammenfällt mit der eben erledigten Frage nach dem ersten Gliede einer Summe (nämlich nach dem ersten Gliede der gleichgeltenden Summe $b + a$). Da b in demselben Verhältniss zu a und c, wie a zu b und c steht, so müssen wir als Zeichen für die Zahl b die Form $c - a$ wählen, so dass auch die zweite zur Zahlensumme gehörige indirekte Verbindung eine Zahlendifferenz ist.

b) Der Zahlenquotient. Bezeichnet man den Werth des Zahlenprodukts ab durch c, so kann man für die Zahl a ein anderes Zeichen haben wollen, welches anzeigt, in welchem Zusammenhange sie hier zu b und c steht, nämlich, dass sie mit b multiplicirt, die Zahl c geben würde. Das dafür eingeführte Zeichen ist $c : b$ oder $\frac{c}{b}$ (sprich: c durch b), in welchem man c den Di-

videnden oder das erste Glied, b den Divisor oder das zweite Glied nennt. Das Zeichen $c:b$ selbst (die erste der zum Zahlenprodukt gehörenden indirekten Verbindungen) nennen wir Zahlen-Quotient.

Setzt man in die Gleichung $ab = c$ für a das eben eingeführte Zeichen $c:b$, so verwandelt sie sich in

$$(c:b)\ b = c.$$

Diese Gleichung kann die Stelle der Erklärung des Zahlen-Quotienten vertreten, da sie unmittelbar ausdrückt, dass derselbe mit seinem Divisor multiplicirt, den Dividenden gibt.

Will man von den Zahlen b und c auf die Zahl a zurückgehen (also die durch $c:b$ vorgestellte Zahl bilden), so muss man die Einheiten von c in b Gruppen von gleichvielen Einheiten vertheilen. Die Zahl der Einheiten jeder Gruppe ist dann die Zahl a. Dieses durch eine Theilung der Einheiten von c geschehende Bilden der Zahl $c:b$ heisst: c durch b dividiren.

Die zweite zum Zahlenprodukt gehörende indirekte Verbindung, welche sich auf die Bildung der Zahl b aus den Zahlen a und c bezieht, fällt ihrem Wesen nach mit dem eben besprochenen Zahlenquotienten zusammen, da sich in der Folge zeigen wird, dass ab und ba einerlei Werth haben, b also ebenso mit a und c, wie a mit b und c zusammenhängt.

c) Die Zahlenwurzel. Bezeichnet man den Werth der Zahlenpotenz a^b durch c, so kann man für die Zahl a ein Zeichen verlangen, welches anzeigt, in welchem Zusammenhange sie hier mit b und c steht, nämlich, dass sie mit b potenzirt, die Zahl c geben würde. Das dafür eingeführte Zeichen ist $\sqrt[b]{c}$ (sprich: bte Wurzel aus c), in welchem man c den Radicanden, b den Wurzelexponenten nennt. Das Zeichen $\sqrt[b]{c}$ selbst (die erste der zur Zahlenpotenz gehörende indirekte Verbindung) nennen wir Zahlenwurzel.

Setzt man in die Gleichung $a^b = c$ für a das eben eingeführte Zeichen $\sqrt[b]{c}$, so verwandelt sich dieselbe in

$$(\sqrt[b]{c})^b = c.$$

Diese Gleichung, welche ausdrückt, dass die mit ihrem Exponenten potenzirte Zahlenwurzel den Radicanden gibt, kann dem-

demnach als Erklärung für die Bedeutung einer Zahlenwurzel gelten.

Das Bilden der durch $\sqrt[b]{c}$ vorgestellten Zahl aus den Zahlen b und c heisst: „c durch b radiciren" oder „die bte Wurzel aus c ziehen."

Hiernach ist also z. B. 3 der Werth von $\sqrt[2]{9}$, weil 3^2, d. h. $3 \cdot 3$ den Werth 9 hat: es ist 2 der Werth von $\sqrt[4]{16}$, weil 2^4, d. h. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ den Werth 64 hat; etc.

d) Der Zahlenlogarithmus. Wird wiederum der Werth von a^b durch c vorgestellt, so kann man ferner auch für die Zahl b ein Zeichen verlangen, welches erkennen lässt, in welchem Zusammenhange sie hier mit den zahlen a und c steht, nämlich dass man auf die Zahl c kommen würde, wenn man mit ihr die Zahl a potenzirt. Als Zeichen für dieselbe führen wir die Form $log_a\, c$ ein (sprich: Logarithmus von c für die Basis (oder Grundzahl) a). Dabei nennen wir c den Logarithmanden, a die Basis oder Grundzahl, und das Zeichen selbst (die zweite zur Zahlenpotenz gehörende indirekte Verbindung) — Zahlen-Logarithmus.

Setzt man in die Gleichung $a^b = c$ für b das eben eingeführte Zeichen, so verwandelt sie sich in

$$a^{log_a\, c} = c,$$

welche Gleichung die Bedeutung des Zahlen-Logarithmen (die sich in der Eigenschaft ausspricht, dass die Basis mit ihm potenzirt, den Logarithmanden gibt) unmittelbar erkennen lässt.

Das Bilden der durch $log_a\, c$ vorgestellten Zahl aus den Zahlen a und c heisst „c durch a logarithmiren".

Sonach ist z. B. 2 der Werth von $log_3 9$, weil $3^2 = 9$ ist; ferner 4 der Werth von $log_2 16$, weil $2^4 = 16$ ist; 5 der Werth von $log_{10} 100000$, weil $10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$ ist; etc.

§. 7. *Ueber die Zulässigkeit des Fortlassens der Klammern.* Dass die Klammern nothwendig sind, um zusammengesetzteren Ausdrücken völlige Bestimmtheit zu geben, ist schon in §. 4 bemerkt worden. Es würde z. B. der Ausdruck $a - b : a \cdot c$ unentschieden lassen, ob damit die Differenz $a - [(b : a) \cdot c]$ oder die Differenz $a - [b : (ac)]$, oder das Produkt $[(a - b) : a] \cdot c$ oder das Produkt $[a - (b : a)] \cdot c$ oder endlich der Quotient

$(a-b):(ac)$ gemeint sei — man müsste denn eine Uebereinkunft getroffen haben, wie die Buchstaben mit einander zu verbinden seien, wenn die bestimmenden Klammern fehlen. Dies ist in der That geschehen, damit in möglichst vielen Fällen durch Fortlassung von Klammern die zusammengesetzten Ausdrücke eine einfachere Gestalt erhalten. Um die Regel, nach welcher man die nach jener Uebereinkunft fortgelassenen Klammern sich zu ergänzen habe, bequem aussprechen zu können, nennen wir die Additions- und Subtraktions-Verbindungen die Verbindungen des niedrigsten Ranges, die Multiplikations- und Divisions-Verbindungen die des nächst höheren Ranges, und lassen darauf nacheinander die Potenz-, Wurzel- und Logarithmen-Verbindungen im Range folgen. Die Regel lautet alsdann so:

„Steht inmitten einer Formel ein Ausdruck, welcher weder mit dem nächst vorhergehenden, noch mit dem darauf folgenden durch eine Klammer verknüpft ist, so hat man ihn mit dem vorhergehenden zu verbinden, wenn die Verbindung mit diesem von demselben Range sein würde, wie die Verbindung mit dem nachfolgenden; sind diese Verbindungen aber von ungleichem Range: so hat man ihn mit demjenigen zu verbinden (d. h. durch eine Klammer verbunden zu denken), mit welchem er eine Verbindung höheren Ranges bildet."

Beispiele. In $a-b+c$ ist b mit dem vorhergehenden Ausdrucke a, nicht mit c zu verbinden, weil die Verbindung mit a (d. h. $a-b$) von demselben Range ist, wie die Verbindung mit c (d. h. wie $b+c$). Es ist also $a-b+c$ gleichbedeutend mit $(a-b)+c$.

Ebenso steht $a:b\cdot c$ für $(a:b)c$, nicht für $a:(b\cdot c)$, weil $a:b$ und bc Verbindungen von einerlei Range sind.

Ferner ist in $(a-b)+(c:d)-(ab)$ der mittlere Ausdruck $c:d$ mit dem vorhergehenden $a-b$, nicht mit dem folgenden Ausdruck ab zu verbinden, weil $(a-b)+(c:d)$ und $(c:d)-(ab)$ von demselben Range sind, so dass die Formel, vollständig geschrieben, $((a-b)+(c:d))-(ab)$ sein würde.

Ist ferner $a-b-c+d-f$ gegeben, so hat man zunächst b mit a zu verbinden (wegen des gleichen Ranges von $a-b$ und $b-c$), also zuvörderst $(a-b)-c+d-f$ dafür geschrieben zu denken. Dann hat man das c mit dem vorhergehenden

Ausdrucke $a - b$ zu verbinden (wegen des gleichen Ranges von $(a-b)-c$ und $c+d$), also $[(a-b)-c]+d-f$ darunter zu verstehen. Was den nächsten Buchstaben d betrifft, so ist er wiederum aus demselben Grunde mit dem vorhergehenden Ausdrucke $(a-b)-c$ zu verbinden, und die ganze Formel daher eine Abkürzung für $([(a-b)-c]+d)-f$.*)

Ebenso steht a^{b^c} für $(a^b)^c$ wegen des gleichen Ranges von a^b und b^c.

In $a-bc$ ist b mit c und nicht mit a zu verbinden, also $a-(bc)$ darunter zu denken, weil bc von höherem Range als $a-b$ ist; es steht $a:b-c$ für $(a:b)-c$, weil $a:b$ einen höhern Rang als $b-c$ hat; es steht ab^c für $a(b^c)$, nicht für $(ab)^c$, weil die Verbindung b^c höher ist als die Verbindung ab; es steht $\sqrt[b]{a}^c$ für $(\sqrt[b]{a})^c$, nicht für $\sqrt[b]{(a^c)}$, weil $\sqrt[b]{a}$ von höherem Range als a^c ist; es steht $log_n a^b$ für $(log_n a)^b$, weil a mit n in höherer Verbindung steht als mit b; es steht $log_n a-b$ und $log_n ac$ aus gleichem Grunde resp. für $(log_n a)-b$ und $(log_n a)c$, und das obige $a-b:ac$ für $a-[(b:a)c]$, etc.

Darauf, dass man die Klammern da fortlässt, wo von selbst schon ein Missverständniss unmöglich ist, haben wir schon im §. 4 hingewiesen. So kann z. B. unter $\frac{a-b}{ac}$ von selbst schon nichts anderes als $\frac{(a-b)}{(a-c)}$, unter a^{b-c} nichts anderes als $a^{(b-c)}$, unter $\sqrt[bc]{a}$ nichts anderes als $\sqrt[(bc)]{a}$ verstanden werden, etc.

§. 8. ***Das Operiren mit Zahlzeichen.*** Das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, etc., welches nach dem Obigen in einem vom

*) Man kann hieraus als Umkehrung folgende Regel abstrahiren: Wenn mehrere Ausdrücke bloss durch Additionen und Subtraktionen oder bloss durch Multiplicationen und Divisionen mit einander zu verbinden sind, und zwar so, dass zuerst der erste mit dem zweiten vereinigt werden soll, dann diese Verbindung des ersten und zweiten mit dem dritten Ausdrucke, hierauf die so entstehende Verbindung mit dem 4ten Ausdrucke, die daraus entstehende Verbindung mit dem 5ten Ausdrucke, etc. so lässt man die Klammern, welche jene Ausdrücke unter sich verknüpfen sollten, fort. Sind also z. B. die Ausdrücke ab, $c:d$, $a^c b$, k auf die genannte Weise durch blosse Subtraktionen zu verbinden, so würde man statt des Ausdrucks $([(ab)-(c:d)]-(a^c b))-k$, bloss $(ab)-(c:d)-(a^c b)-k$ schreiben dürfen.

Verstande ausgeführten Bilden von Zahlen besteht, wird durch das Bilden der Zeichen versinnlicht, die wir oben Zahlensumme, Zahlendifferenz, etc. genannt haben. Durch die Anwendung dieser, so wie der sonstigen mathematischen Zeichen wird es möglich, den ganzen Gang bei allem Rechnen durch Zeichen zu versinnlichen, und man kann daher auch das Versinnlichen der Rechnungsthätigkeit durch das Hinschreiben der correspondirenden Zeichen selber ein Rechnen, und namentlich jenes Bilden der Zahlenverbindungs-Zeichen selber resp. ein Addiren, Subtrahiren, etc. nennen. Es tritt dann dem wahren (Verstandes-) Rechnen mit Zahlen, ein Rechnen mit Zahlzeichen an die Seite, und letzteres kann das erste ersetzen, da man ja in der That immer nur das Resultat des Rechnens braucht, und dieses aus demjenigen (letzten) Zeichen, welches das Operiren mit den Zahlzeichen als Resultat gibt, sich herauslesen lässt. Demzufolge heisst dann bei dem Rechnen mit Zahlzeichen z. B. „b zu a addiren" nichts weiter, als „hinter a ein $+b$ schreiben"; „a mit b potenziren" nichts anderes als „ein b oben rechts an a hinschreiben"; „a mit b radiciren" nichts weiter als „das Zeichen $\sqrt[b]{}$ vor a hinschreiben"; etc., und in diesem Sinne werden wir daher, da wir das Rechnen fortan als ein Rechnen mit Zahlzeichen zu betreiben gedenken, von hierab die Ausdrücke: Addiren, Subtrahiren etc. gebrauchen.

§. 9. *Die Zahlenverbindungen ohne Zahlbedeutung.* Der Zusammenhang, in welchem die verschiedenen Combinationen der in §. 3 u. §. 6 aufgezählten Zahlenverbindungen zu einander stehen, ist es, welchen die Arithmetik und Analysis zu entwickeln hat (vgl. §. 1). Die Aussprüche dieses Zusammenhanges (welche, wie wir in der Folge sehen werden, sich durch Gleichungen versinnlichen lassen) nennen wir die Gesetze der Zahlenverbindungen, über deren Benutzung beim Rechnen mit Zahlzeichen sich im voraus Folgendes bemerken lässt.

Die direkten Verbindungen, welche wir in §. 3 kennen gelernt haben, bestehen unabhängig von dem Werthe der beiden in ihnen combinirten Zahlen, d. h. es lässt sich aus diesen beiden Zahlen stets, welchen Werth sie auch immer haben mögen, eine Zahlensumme, ein Zahlenprodukt, eine Zahlenpotenz bilden. Dies

ist dagegen nicht der Fall mit den indirekten Verbindungen des §. 6. Eine Zahlendifferenz lässt sich nur bilden, wenn der Minuend grösser als der Subtrahend ist; ein Zahlenquotient lässt sich aus zwei Zahlen nur bilden, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist; eine Zahlenwurzel $\sqrt[a]{b}$ nur dann, wenn gerade b sich in ein Produkt von a Faktoren zerlegen lässt, deren jeder gleich viele Einheiten enthält; ein Zahlenlogarithmus $log_a b$ endlich nur in dem verhältnissmässig sehr seltenen Falle, wenn die Zahl b durch mehr oder weniger oft wiederholte Multiplication von a mit sich selber erzeugt werden kann. Es gibt z. B. keine Zahl 3 — 7, d. h. keine Zahl, welche um 7 Einheiten vermehrt, nur 3 Einheiten enthalten würde; es gibt keine Zahl 3 : 7, d. h. keine Zahl, die, nachdem man ihre Einheiten 7mal zu sich selbst hinzugezählt hat, 3 Einheiten enthalten würde; etc. Wenn man aber auf Grund des §. 8 mit Zahlzeichen rechnet, so lässt es sich nicht vermeiden, weil die zur Anwendung kommenden Zahlen von dem verschiedensten Grössenverhältnisse sein können, dass solche Zeichen, wie 3 — 7, 3 : 7, etc. mit unterlaufen, und man kann sich dessen nicht einmal bewusst werden, wenn die Zahlen unbestimmt gelassen, d. h. durch Buchstaben bezeichnet sind. Dies kann dann wieder zurückwirken auf direkte Verbindungen, indem bei weiteren Combinationen diese Formen als Glieder von Summen, Produkten und Potenzen auftreten können, und somit summen-, produkt- und potenzförmige Zeichen erscheinen, auf welche die Erklärungen des §. 3 nicht mehr passen. Wir werden nun solche Zeichen nicht zurückweisen, (weil wir sonst das ganze Rechnen mit Zahlzeichen aufgeben müssten), dieselben aber zum Unterschiede von den zahlbezeichnenden Zahlenverbindungen, Zahlenverbindungen ohne Zahlbedeutung (insbesondere „Summen ohne Zahlbedeutung", „Differenzen ohne Zahlbedeutung", etc.) nennen — den Ausdruck Zahlenverbindung schlechthin da anwendend, wo wir davon absehen, ob sie eine Zahlbedeutung haben oder nicht.

Die Bedeutung des Addirens, Subtrahirens, etc., wie sie am Schluss des §. 8 hingestellt ist, bleibt natürlich auch für Zahlenverbindungen ohne Zahlbedeutung passend.

Ob das Rechnen mit Zahlzeichen aber zulässig sei, hängt von der Antwort auf die Frage ab, ob oder unter welchen Bedin-

gungen man ein richtiges Ergebniss zu erwarten habe, wenn man sich beim Rechnen mit Zahlzeichen durch das etwaige Vorkommen von Summen, Differenzen, etc. ohne Zahlbedeutung nicht stören lässt. Um diese Frage (wann die Gesetze der zahlbezeichnenden Zahlenverbindungen auch auf Zahlenverbindungen ohne Zahlbedeutung angewendet werden dürfen, ohne dass man unrichtige Resultate zu fürchten hätte), in möglichst grösster Allgemeinheit zu behandeln, werden wir bei den dahin gehörigen Untersuchungen den Gebrauch der Zeichen $a+b$, $a-b$, ab, etc. noch weiter ausdehnen, als es eben schon geschehen ist, indem wir von jedweder Bedeutung des a und b ganz abstrahiren. — Das Nähere hierüber in den folgenden §§.

B. Von den Verbindungen allgemeiner Zeichen.

§. 10. *Die Zeichenverbindungen.* Von dem Rechnen mit Zahlzeichen unterscheiden wir noch ein Rechnen mit allgemeinen Zeichen, und werden in gesonderten Capiteln die für dasselbe geltenden Gesetze entwickeln. Wir bedienen uns bei diesem neuen Rechnen noch der Buchstaben, aber nicht als Repräsentanten von Zahlen oder Zahlenverbindungen, sondern als Elemente, d. h. als Zeichen, denen wir keinen besondern Werth oder Inhalt beilegen, und welche nur die Bestimmung haben, als Material für die Bildung neuer zusammengesetzter Zeichen zu dienen. Die Bildung dieser zusammengesetzten Zeichen bewerkstelligen wir mittels derselben Zeichen, die wir für das Rechnen mit Zahlzeichen behufs der Bildung von Zahlenverbindungen eingeführt haben, nämlich mittels der Zeichen $+$, $-$, $\sqrt{}$, *log*, etc., natürlich aber ohne dadurch auf die Thätigkeiten hinweisen zu wollen, welche sie in den Zahlenverbindungen hervorzurufen bestimmt sind. Die so gebildeten Formen, welche hiernach das Aussehen von Summen, Differenzen, Produkten etc. erhalten, werden wir resp. allgemeine Summen, allgemeine Differenzen etc., oder Summen allgemeiner Zeichen, Differenzen allgemeiner Zeichen, etc. nennen, übrigens auch bei ihnen die Namen: Summand, Minuend, Subtrahend, etc. für die Bestandtheile derselben, sowie die Namen „Addiren“, „Subtrahiren“, etc. (im Sinne des §. 8) beibehalten.

Während z. B. *ab*, als Zahlenprodukt aufgefasst, ausser an die Form des Zeichens *ab* auch an die Thätigkeit erinnert, welche nach dem Früheren durch das Multiplications-Zeichen versinnlicht werden sollte (an ein *b*maliges Addiren des *a* zu sich selbst) — so fällt, wenn wir *ab* als allgemeines Produkt auffassen, mit dem Zahlensinne der Buchstaben zugleich die Möglichkeit jener Verstandes-Operation fort, und es bleibt nichts als die blosse Form für die Betrachtung übrig.

Beim Rechnen mit allgemeinen Zeichen hat man es also nur mit Zeichenformen und deren Vergleichung zu thun, während beim Rechnen mit Zahlzeichen ausser den Formen auch die (Zahlen-) Werthe der Formen in Betracht kommen können.

§. 11. *Von der Vergleichung der Verbindungen allgemeiner Zeichen.* Damit die verschiedenen Zeichenformen, von deren Bildung im vorigen §. gesprochen worden ist, mit einander verglichen werden können (und sonach ein Rechnen mit allgemeinen Zeichen möglich werde), müssen sie Beziehungen zu einander haben. Da aber zwischen ihnen, als willkürlich gewählten Zeichen, ein natürlicher Zusammenhang nicht existirt, so müssen wir einen solchen noch herrichten, und dies thun wir dadurch, dass wir bestimmte dieser Formen herausheben, und sie für gleichgeltend mit anderen bestimmten dieser Formen erklären. Da wir nach §. 5 alle gleichgeltende (d. h. mit einander vertauschbare) Ausdrücke zu Gleichungen verbinden können, so werden diese Grundbeziehungen als Gleichungen sich darstellen lassen, bei deren Aufstellung man nur darauf zu sehen hat, dass sie einander nicht widersprechen, und dass sie genügen, aus ihnen auch einen Zusammenhang zwischen den complicirtesten Formen abzuleiten.

Dies Ableiten geschieht vornehmlich nach folgenden zwei allgemein gültigen Grundsätzen.

1) Ist von zwei Ausdrücken *a* und *b* jeder mit einem dritten, *c*, vertauschbar, so lässt sich auch *a* mit *b* vertauschen — oder mit andern Worten:

„Sind zwei Ausdrücke einem dritten gleich, so sind sie auch unter sich gleich."

2) Sind *a* und *b* mit einander vertauschbar, und nimmt man mit *a* und *b* einerlei Veränderungen vor,

so sind auch die aus dieser Veränderung hervorgehenden Ausdrücke einander gleich.

So folgt also z. B. daraus, dass a und b mit einander vertauschbar sind, dass auch $\sqrt[c]{a}$ mit $\sqrt[c]{b}$, ac mit bc etc. vertauscht werden dürfe*).

§. 12. *Gebrauch des Wortes „Werth" bei Zeichenverbindungen.* Von zwei mit einander vertauschbaren Ausdrücken A und B sagen wir, sie seien von gleichem (oder einerlei) Werthe. Statt dessen werden wir uns erlauben, auch zu sagen, A sei ein Werth von B, wenn A die einfachste Form ist, welche sich für B substituiren lässt, oder, wenn man B zu charakterisiren hat, und A ein Ausdruck von schon bekannten Eigenschaften ist (dem analog, wie man es bei Zahlenausdrücken zu halten pflegt**).

*) Die Wahl der Grundgleichungen, welche die Zeichenverbindungen in Zusammenhang zu bringen haben, ist an sich willkührlich. Um aber die möglichst grösste Uebereinstimmung zwischen dem Rechnen mit allgemeinen Zeichen und dem Rechnen mit Zahlzeichen hervorzubringen, werden wir dieselben so wählen, dass sie auch richtig bleiben, wenn man sich unter den Buchstaben statt der allgemeinen Elemente, Zahlen denkt, welche die Zeichenverbindungen in zahlbezeichnende Zahlenverbindungen verwandeln. Die Folge davon wird sein, dass auch alle Beziehungen zwischen den Zeichenverbindungen, welche mittels der angeführten beiden Grundsätze aus den Grundgleichungen hergeleitet werden können, wegen der allgemeinen Gültigkeit dieser Grundsätze zugleich Beziehungen zwischen den entsprechenden zahlbezeichnenden Zahlenverbindungen sein werden, so dass die Gesetze der Zeichenverbindungen sämmtlich zugleich Gesetze der letzteren sind, wenn auch nicht umgekehrt nothwendig jedes Gesetz dieser letzteren ein Gesetz für die entsprechenden Zeichenverbindungen sein wird.

**) So z. B. sagen wir, der Werth von $(a-b)+b$ sei a, weil a einfacher als $(a-b)+b$ ist; ferner sagen wir behufs der Erklärung von a^3, der Werth von a^3 sei $a \cdot a \cdot a$, indem wir für die Potenzform die gleichgeltende, ihren Eigenschaften nach bekanntere Produktform angeben; eben so der Werth von $3a$ sei $a+a+a$, indem wir für das Produkt die als bekannter vorausgesetzte Summenform angeben. Ferner sagen wir, der Werth $3 \cdot 9$ sei 27, indem wir für das Produkt $3 \cdot 9$ die bekanntere oder üblichere Form $20+7$ hinstellen, etc. Namentlich werden wir also z. B. sagen, der Werth der Zeichenverbindung B sei die Zeichenverbindung A, wenn A eine niedrigere (und deswegen als bekannter vorauszusetzende) Verbindung ist als B.

§. 13. *Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit der Zeichenverbindungen.* Sind jede zwei Ausdrücke, welche für eine Zahlenverbindung A gesetzt werden dürfen, wieder unter sich vertauschbar, so sagt man, A sei e i n d e u t i g.

Existiren mehrere Ausdrücke $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, welche für eine Zahlenverbindung A gesetzt werden dürfen, ohne unter sich vertauschbar zu sein, so nennt man A mehrdeutig, und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ heissen, falls sie selber eindeutig sind, die Werthe von A.

Zweites Capitel.

Die Addition und Subtraktion allgemeiner Zeichen.

§. 14. *Die allgemeinen Summen und Differenzen, die Ziffernsummen und Zifferndifferenzen.* Unter dem Addiren zweier allgemeiner Zeichen a und b verstehen wir dem §. 10 zufolge das Hinschreiben der allgemeinen Summe $a+b$, und unter dem Subtrahiren derselben das Hinschreiben der allgemeinen Differenz $a-b$, und nennen in beiden Formen (in $a+b$ und $a-b$) a das erste, b das zweite Glied, so wie insbesondere das erste Glied einer solchen Differenz — Minuend, deren zweites Glied — Subtrahend.

Da die Elemente a und b willkürlich gewählte Zeichen sind, deren etwaiger eigenthümlicher Werth gar nicht in Betracht kommt, so kann man dieselben auch durch Ziffern vertreten lassen, wofern man nur auf ihren Sinn als Zahlzeichen nicht Rücksicht nimmt. Solche allgemeine Summen und Differenzen, deren Elemente durch Ziffern vorgestellt sind, werden wir resp. Ziffernsummen und Zifferndifferenzen nennen.

Der Ausdruck $3+4$, als Ziffernsumme aufgefasst, hat demnach keinen Zahlenwerth und ist blosse Ausdrucksform, während $3+4$ als Zahlensumme aufgefasst, den Zahlenwerth 7 hat. — Es würde übrigens selbst nichts schaden, wenn man bei den Ziffern der allgemeinen Summe $3+4$ an die Zahlen 3 und 4 dächte, weil das Zeichen + hier nicht wie bei Zahlensummen die Bildung einer neuen Zahl versinnlichen soll, der Gedanke an die Zahl 7 also gar nicht hervorgerufen werden kann.

§. 15. *Grundsätze.* Um Mittel zu haben, einerseits aus gegebenen Gleichungen andere herzuleiten, andererseits über die Statthaftigkeit und Unstatthaftigkeit solcher Gleichungen zu entscheiden, in denen Additions- und Subtraktions-Ausdrücke vorkommen, stellen wir hier folgende Grundsätze auf.

Sind $c+b=a$ und $d+b=g$ richtige Gleichungen, so erklären wir

1) a und g für Zeichen von einerlei Werthe, sobald c und d als mit einander vertauschbar anerkannt sind.

2) a und g für Zeichen von verschiedenem Werthe, wenn c und d als verschieden von einander anerkannt sind.

Der erste dieser Grundsätze drückt aus, dass Summen, welche gemeinschaftliche Glieder haben, nicht mehr als e i n e n Werth haben sollen, dass also allgemeine Summen e i n d e u t i g seien, und wir werden demnach, wenn $c+b=a$ eine anerkannt richtige Gleichung ist, die Gleichung $c+b=g$ für unstatthaft erklären müssen, so oft a und g nachweislich verschieden sind.

Aus dem zweiten Grundsatze folgt, dass wenn die Gleichung $c+b=a$ und $d+b=a$ neben einander bestehen sollen, auch $c=d$ sein müsse, und wir haben hierin ein zweites Mittel aus der Richtigkeit einer Gleichung auf die Unrichtigkeit einer anderen zu schliessen. — Fassen wir den Inhalt dieses Grundsatzes in die Form einer Vorschrift zur Prüfung der Gleichheit zweier Ausdrücke, so lautet er so:

Um zu erfahren, ob zwei Ausdrücke c und d einander gleich seien, addire man zu beiden einen und denselben Ausdruck, so dass, wenn man den letzteren durch b vorstellt, die Summen $c+d$ und $d+b$ entstehen. Lassen sich dann diese beiden Summen in einen und denselben Ausdruck umformen, so ist $c=d$.

§. 16. *Grundsätzliche Beziehungen zwischen den allgemeinen Summen und Differenzen.* Um verschiedene allgemeine Summen und Differenzen in Beziehung zu einander zu bringen, erklären wir 1) die Summen $a+b$ und $b+a$, 2) die Summen $(a+b)+c$ und $(a+c)+b$, 3) die Summe $(a-b)+b$ und den Minuenden a ihres ersten Gliedes — für Ausdrücke von einerlei Geltung, d. h. wir legen die Gleichungen

I) $a+b=b+a$,

II) $(a+b)+c=(a+c)+b$,

III) $(a-b)+b=a$,

dem Rechnen mit allgemeinen Summen und Differenzen zum Grunde.

Nennt man Summen von der Form $a+b$ zweigliedrig, Summen von der Form $(a+b)+c$ dreigliedrig, und bei letzteren

a, b, c resp. das 1ste, 2te und 3te Glied, so lassen sich die beiden ersten Gleichungen, wie folgt, aussprechen:

„In zweigliedrigen Summen darf man die beiden Glieder, in dreigliedrigen Summen das zweite und dritte Glied mit einander vertauschen."

Die dritte Gleichung ertheilt der allgemeinen Differenz die Eigenschaft, den Minuenden zu geben, wenn zu ihr der Subtrahend addirt wird.

Rechtfertigung der gleichzeitigen Aufstellung der Gleichungen (I-III.) Der Aufnahme der für allgemeine Summen aufgestellten Gleichungen (I-III) steht nichts entgegen, sobald ihrem Nebeneinander-Bestehen durch die einzigen bis jetzt vorhandenen, auf Summen sich beziehenden Grundsätze des §. 15 nicht gewehrt wird.

Die Gleichung (II) darf aber neben der Gleichung (I) bestehen, weil die letztere nur zu Vertauschungen der Glieder in zweigliedrigen Summen berechtigt, also für den ersten Ausdruck der Gleichung (II) (für den Ausdruck $(a+b)+c$) nur die Statthaftigkeit der Umformung in $c+(a+b)$, $(b+a)+c$, $c+(b+a)$ fordert, und für den zweiten Ausdruck $(a+c)+b$ nur die Statthaftigkeit der Umformung in $b+(a+c)$, $(c+a)+b$, $b+(c+a)$. — Enthielte nämlich die Gleichung (II) einen Widerspruch gegen (I), so müsste irgend eine der 4 ersten Summen mit irgend einer der 4 letzten Summen nach §. 15 nicht von demselben Werthe sein dürfen. Die Grundsätze des §. 15 haben aber nur ihre Anwendung auf Summen, die eines oder beide Glieder gemeinschaftlich haben, während in keiner der 4 ersten Summen ein Glied vorkommt, welches zugleich ein Glied einer der 4 letzten Summen wäre (in den ersten kommen nur die Glieder c, $a+b$, $b+a$, in den letzten nur die Glieder b, $a+c$, $c+a$ vor); mithin ist die Gleichung (II) völlig unabhängig von der Gleichung (I).

Was die Gleichung (III) betrifft, so tritt dieselbe mit der (II) nicht in Widerspruch, weil sie keine dreigliedrige Summen enthält, und der Gleichung (I) könnte sie nur dann entgegen sein, wenn der Summe $b+(a-b)$, mit welcher allein die in (III) enthaltene Summe nach Gleichung (I) vertauscht werden darf, schon im Bisherigen ein von a verschiedener Werth beigelegt worden wäre.

Anmerkung. Denken wir uns unter den Elementen Ziffern, so liefert die Gleichung (III) ein neues Zeichen für die Ziffer a, während man nach §. 14 sich unter dieser Ziffer wiederum die durch sie vorgestellte Zahl denken darf. Es ist dann also z. B. $a=7$, $b=9$ setzend, $(7-9)+9$ ein neues Zeichen oder eine nunmehr erlaubte Schreibweise für die Zahl 7. Die grundsätzliche Aufstellung der Gleichung (III) gibt somit unter andern zu erkennen, dass man es als erlaubt ansehen wolle, das Zeichen $(7-9)+9$ statt des Zeichens 7 für die Zahl 7 zu gebrauchen — immer aber die Zeichen — und + als allgemeine, nicht als Verminderungs- und Hinzufügungs-Zeichen genommen. Da das — und + nur Zeichen sind, die zur Unterscheidung verschieden gebildeter Symbole dienen, so hat $(7-9)+9$ an sich keinen Sinn, also namentlich auch keinen Sinn, der mit diesem aus der willkürlichen Annahme der Gleichung (III) gezogenen Sinne im Widerspruche stände. Anders wäre es, wenn man bei dem + und — an irgend etwas dächte, was dem Zeichen $(7-9)+9$ an sich schon einen Sinn zu geben im Stande wäre.

§. 17. *Eindeutigkeit der allgemeinen Differenzen.* Die Frage, ob die Differenz $a-b$ mehrerlei vorzustellen fähig, oder, wie die Summen, nur eindeutig sei, beantwortet sich aus dem zweiten Grundsatze des §. 15 und der Gleichung (III) des §. 16. Dürfte nämlich $a-b$ einmal mit einem Zeichen z bezeichnet werden, ein anderes Mal mit einem anderen Zeichen x, welches einen von z verschiedenen Werth hätte, so würde man aus der Gleichung (III), indem man dort für $a-b$ einmal z, das andere Mal x setzte, die beiden Gleichungen $z+b=a$ und $x+b=a$ erhalten, welche nach dem erwähnten Grundsatze nicht neben einander bestehen können, wenn x von z verschieden gedacht wird. Es müssen daher die allgemeinen Differenzen überall als eindeutig angesehen werden.

§. 18. *Vollständigkeit des Gegensatzes der Addition und Subtraktion.* Die Gleichung (III) lehrte, dass die Addition eines Ausdrucks die Subtraktion desselben Ausdrucks aufhebe. Es hebt aber auch umgekehrt die Subtraktion eines Ausdrucks dessen Addition auf, d. h. es ist

a) $$(a+b)-b=a.$$

Prüfen wir nämlich diese Gleichung nach der am Schlusse des §. 15 gegebenen Vorschrift, indem wir zu beiden Ausdrücken

der Gleichung, nämlich zu $(a+b)-b$ und b, einen und denselben Ausdruck addiren, so ergibt sich, wenn wir zu diesem zu addirenden Ausdrucke das Zeichen b wählen, einerseits $[(a+b)-b]+b$, andererseits $a+b$, während nach Gleichung (III) in der That $[(a+b)-b]+b$ mit $a+b$ einerlei Geltung hat*). Da also beide Additionen auf denselben Ausdruck $a+b$ führen, so sind nach §. 15 die ursprünglichen Ausdrücke $(a+b)-b$ und a von einerlei Werthe.

Man nennt auf Grund des vollständigen Gegensatzes der Addition und Subtraktion auch das $+$ und $-$ entgegengesetzte Zeichen.

Anmerkung. Die Vorschrift des §. 15 zur Prüfung der Gleichheit zweier Ausdrücke lässt sich, wie auch die Folge bewähren wird, mit Aussicht auf Erfolg überall da anwenden, wo der eine Ausdruck eine Differenz ist. Indem man dann als Ausdruck, welcher zu den beiden auf ihre Gleichheit zu prüfenden Formen zu addiren ist, den Subtrahenden dieser Differenz wählt, bietet die Gleichung (III) sofort eine einfache Umformung.

In dem gegenwärtigen Falle hatten wir auf der einen Seite der zu prüfenden Gleichung in der That eine Differenz, nämlich $(a+b)-b$; es war also der Subtrahend b dieser Differenz als das jederseits zu Addirende zu wählen (wie wir es oben wirklich gethan haben), um sofort die Gleichung (III) in Anwendung bringen zu können.

Sprechen wir daher die Vorschrift des §. 15 hier specieller so aus, wie wir sie beständig in diesem Capitel anwenden werden, wo eine Differenz ins Spiel kommt:

„Man addire zu beiden zu prüfenden Ausdrücken den Subtrahenden desjenigen Ausdrucks, welcher die Differenzform hat, und sehe zu, ob die resultirenden Summen (von denen die eine nun in Folge der Gleichung (III) dem Minuenden jener Differenz gleich wird) sich als vertauschbar erkennen lassen.“

*) Man darf, um sich davon zu überzeugen, das allgemeine Zeichen a der Gleichung (III) nur durch das ebenfalls allgemeine Zeichen $a+b$ ersetzen.

§. 19. *Von der successiven Verbindung dreier Elemente durch Addition und Subtraktion.* Ist in einer Summe oder Differenz das eine Glied zweigliedrig, so dass drei Elemente erscheinen, so kann man, wenn man diese Elemente resp. a, b, c nennt, auf keine anderen, als auf die folgenden Formen kommen: 1) wenn das erste Glied zweigliedrig ist, auf die Summen $(a+b)+c$ und $(a-b)+c$, und auf die Differenzen $(a+b)-c$ und $(a-b)-c$; 2) wenn das zweite Glied zweigliedrig ist, auf die Summen $a+(b+c)$ und $a+(b-c)$, und auf die Differenzen $a-(b+c)$ und $a-(b-c)$. Es lässt sich nun die Frage stellen, ob nicht vermöge der Grundbeziehungen (I—III) unter diesen 8 Formen sich irgend welche als gleichgeltend erkennen lassen, d. h. ob nicht die drei Elemente a, b, c sich auf verschiedene Weise durch Addition und Subtraktion unter einander verknüpfen lassen, ohne dass gleichzeitig der Werth geändert wird. In der That findet man, dass jene 8 Formen zu je dreien einander gleich sind, und namentlich, dass jede der 4 ersten mit einer der 4 letzten vertauschbar ist, wie dies sich in den folgenden Gleichungen ausspricht.

1) $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$

2) $(a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c)$

3) $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$

4) $(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c)$.

Beweise. Zu 1. Die Gleichheit des ersten und zweiten Ausdruckes ist schon in Gleichung (II) ausgesprochen; die des ersten und dritten folgt so: Für den ersten Ausdruck $(a+b)+c$ lässt sich nach Gleichung (I) $(b+a)+c$ setzen und für diesen nach Gleichung (II) $(b+c)+a$, während diese Summe sich wiederum nach Gleichung (I) in $a+(b+c)$, d. h. in den dritten Ausdruck der in Rede stehenden Gleichung umformen lässt.

Zu 2. Zur Prüfung der Gleichheit von $(a-b)+c$ und $(a+c)-b$ wenden wir die Vorschrift der Anmerkung zu §. 18 an, addiren beiderseits den Subtrahenden b des zweiten Ausdrucks und gewinnen so die Ausdrücke $[(a-b)+c]+b$ und $[(a+c)-b]+b$ oder (da der letzte nach Gleichung (III) identisch mit $a+c$ ist), die Ausdrücke $[(a-b)+c]+b$ und $a+c$.

Da ferner nach Gleichung (II) in dreigliedrigen Summen das zweite Glied mit dem dritten vertauscht werden darf, so ist $[(a-b)+c]+b$ identisch mit $[(a-b)+b]+c$, d. h. (da zufolge der

Gleichung (III) $(a-b)+b=a$ ist) mit $a+c$. Mithin sind $(a-b)+c$ und $(a+c)-b$ einander gleich, weil beide Ausdrücke durch Addition desselben b denselben Werth, nämlich den Werth $a+c$ annehmen.

Prüfen wir ebenso die Ausdrücke $(a-b)+c$ und $a-(b-c)$, indem wir wiederum zu beiden den Subtrahenden $b-c$ des zweiten Ausdrucks addiren, so kommen wir auf

$$[(a-b)+c]+(b-c) \text{ und } [a-(b-c)]+(b-c),$$

oder, weil der letzte derselben zufolge der Gleichung (III) dem Minuenden a gleich ist, auf

$$[(a-b)+c]+(b-c) \text{ und } a.$$

In der dreigliedrigen Summe $[(a-c)+c]+(b-c)$, (deren drei Glieder $a-b$, c und $b-c$ sind), lassen sich aber nach (II) das zweite und dritte Glied mit einander vertauschen, so dass dieselbe sich $[(a-b)+(b-c)]+c$ schreiben lässt, während man wiederum, (wie die bei (I) stehende Gleichung $(a+b)+c=a+(b+c)$ lehrt), bei einer dreigliedrigen Summe statt zur Summe des ersten und zweiten Elements das dritte zu addiren, zum ersten Elemente die Summe des zweiten und dritten addiren darf, also in unserem Falle statt $[(a-b)+(b-c)]+c$ auch $(a-b)+[(b-c)+c]$ setzen kann. Es ist aber nach Gleichung (III) $(b-c)+c=b$, mithin $(a-b)+[(b-c)+c]=(a-b)+b$, und diese Summe wiederum gleich a. Es geben folglich die beiden Formen $(a-b)+c$ und $a-(b-c)$, wenn man zu ihnen $b-c$ addirt, Ausdrücke, die mit a vertauschbar und demnach zufolge des §. 18 einander gleich sind.

Die Ausführung der Beweise zu den Gleichungen (3 und 4) halten wir für überflüssig, da sie auch ein Anfänger nach dem Muster der Beweise für die Gleichungen (2) leicht selbst wird ausführen können. Immer wird nach der Anmerkung zu §. 18 der Subtrahend desjenigen Ausdrucks, welcher die Differenzform hat, addirt, und die mit dem andern Ausdrucke gebildete Summe nach den schon anerkannten Gleichungen umgeformt. Bei der Prüfung des ersten und zweiten Ausdrucks der Gleichung (3) geschehen diese Umformungen successiv nach (II und III), bei der Prüfung des ersten und dritten Ausdrucks nach (I und III); bei der Prüfung des ersten und zweiten Ausdrucks der Gleichungen (4) nach

2 und III), bei der Prüfung des zweiten und dritten nach den Gleichungen (1, III, III).

§. 20. *Erklärung der algebraischen Summe.* Das Addiren und Subtrahiren führt den gemeinsamen Namen des algebraischen Addirens, und die Summe und Differenz den gemeinsamen Namen algebraische Summe. Fasst man nur die beiden Glieder der Summe oder Differenz ins Auge, so nennt man die algebraische Summe eine zweigliedrige; ist das erste Glied selber zweigliedrig, so nennt man sie dreigliedrig; ist das erste Glied dreigliedrig, so nennt man sie viergliedrig etc. Sonach ist z. B. $a+(b-c)$ zweigliedrig, $(a+b)-c$ dreigliedrig, $([(a+b)-c]+(p+q))-(m+n)$ fünfgliedrig *). Man sieht sogleich, dass die Klammern, welche die einzelnen Glieder einer mehrgliedrigen algebraischen Summe mit den vorangehenden Gliedern verbinden, solche sind, welche nach §. 8 fortgelassen werden dürfen, so dass, wenn diese Klammern in der That fortgelassen sind, die freien (nicht innerhalb der Klammern stehenden) + und — Zeichen die Trennungszeichen der einzelnen Glieder bilden.

Hiernach sind somit von den Ausdrücken, die in den Gleichungen (1—4) des §. 19 zu je dreien in jeder Zeile durch die (=) Zeichen mit einander verknüpft sind, die je ersten und zweiten Ausdrücke (welche auch ohne Klammern geschrieben werden dürfen) dreigliedrige, die dritten Ausdrücke zweigliedrige algebraische Summen.

Das den einzelnen Gliedern einer algebraischen Summe vorstehende Zeichen + oder — heisst das Vorzeichen dieses Gliedes.

Zusatz. Die vorstehenden Benennungen befähigen uns, den Inhalt der Gleichungen des §. 19 in einige bequem zu behaltende Regeln zusammenzufassen. Beachtet man nämlich, dass in den Gleichungen (1—4) jeder erste Ausdruck in den danebenstehen-

*) Von den beiden Hauptgliedern $[(a+b)-c]+(p+q)$ und $m+n$ ist nämlich zunächst das erste zweigliedrig, bestehend aus den Gliedern $(a+b)-c$ und $p+q$; von diesen hat wiederum das erste, $(a+b)-c$, zwei Glieder, nämlich $a+b$ und c, während hievon wiederum das erste zwei Glieder, nämlich die Glieder a und b hat; die fünf Glieder der algebraischen Summe sind also: $a, b, c, p+q$ und $m+n$.

den übergeht, wenn man das zweite Glied mit seinem Vorzeichen zum dritten Gliede, und das dritte mit seinem Vorzeichen zum zweiten macht, so lässt sich der Inhalt der vorderen Gleichungen so in Worte fassen:

Erste Regel. Der Werth einer algebraischen dreigliedrigen Summe ändert sich nicht, wenn man das zweite und dritte Glied sammt ihren Vorzeichen mit einander vertauscht;

oder auch so:

Bei zwei aufeinanderfolgenden Additionen oder Subtraktionen hat die Ordnung des Addirens und Subtrahirens keinen Einfluss auf den Gesammtwerth des Ausdrucks.

Um möglichst einfach aussprechen zu können, wie man die ersten Ausdrücke in den Gleichungen (1—4) in die dritten, und diese in jene umwandeln könne, wollen wir uns, aber nur während der Umwandlung, die ersten Glieder der algebraischen Summen, welche sonst natürlich kein Vorzeichen haben, als mit einem + Zeichen versehen denken, so dass also $a+(b+c)$, $a-(b-c)$, etc. während der Umwandlung durch $a+(+b+c)$, $a-(+b-c)$, etc. ersetzt gedacht werden. Dies angenommen sieht man beim Vergleichen der ersten und dritten Ausdrücke, dass aus dem dritten der erste hervorgeht a) bei den Gleichungen (1 und 3), wo das zweite Glied eine addirte algebraische Summe ist, wenn man die Glieder dieser algebraischen Summe einzeln zum ersten Gliede a algebraisch addirt (d. h. addirt oder subtrahirt, jenachdem das Vorzeichen ein + oder — ist); b) bei den Gleichungen (2 und 4), wo das zweite Glied eine subtrahirte algebraische Summe ist, wenn man die Glieder der letzteren, nachdem man ihre Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandelt hat, einzeln zum ersten Gliede a algebraisch addirt. Man hat sonach die

Zweite Regel. Statt eine algebraische zweigliedrige Summe zu addiren, kann man ihre Glieder einzeln nacheinander addiren; statt eine solche zu subtrahiren, darf man deren Glieder nach Umkehrung der Vorzeichen einzeln nach einander algebraisch addiren.

Bedenkt man, dass die ersten Ausdrücke in den Gleichungen (1—4) ohne Klammern geschrieben werden dürfen, so könnte man sich auch so ausdrücken: Eine Klammer, welche eine zweigliedrige algebraische Summe einschliesst, und ein + oder — Zeichen vor sich stehen hat, darf sammt ihrem Vorzeichen fortgelassen werden, wofern man, falls das Vorzeichen der Klammer ein — Zeichen ist, die Vorzeichen der in der Klammer stehenden Glieder vorher in die entgegengesetzten verwandelt.

Will man die dritten Ausdrücke der Gleichungen (1—4) aus den ersten herstellen, so darf man die Regel nur umkehren. Daher die

Dritte Regel: Man darf in einer dreigliedrigen algebraischen Summe das zweite und dritte Glied in ein einziges zusammenfassen, und zwar in ein zu addirendes Glied, wenn man den Gliedern ihre Vorzeichen lassen will, in ein zu subtrahirendes Glied, wenn man in demselben die Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandeln will.

§. 21. *Ausdehnung der Regeln des §. 20 auf beliebig vielgliedrige algebraische Summen.*

Erste Regel. In jeder algebraischen Summe lassen sich die Glieder, welche dem ersten Gliede folgen, beliebig mit einander vertauschen, wofern man nur ihre Vorzeichen mit vertauscht.

Beweis. Die algebraische Summe sei vorgestellt durch die Formel $P = a+b-c-d+e-f+g$ etc.

Um nachzuweisen, dass die Glieder beliebig angeordnet werden dürfen, hat man nur zu zeigen, dass ein beliebiges Glied, etwa das Glied $-f$, jede beliebige andere Stelle einnehmen kann. Es sei nun $-f$ das nte Glied der Summe und A ein abgekürztes Zeichen für die algebraische Summe der $n-2$ ersten Glieder von P, so dass man hat

$$P = A+e-f+g+ \text{ etc.} = (A+e-f)+g+ \text{ etc.}$$

Da nun $A+e-f$ als dreigliedrige Summe angesehen werden kann, deren erstes Glied A ist, und demnach nach §. 20 sich in $A-f+e$ umformen lässt, so ist noch $P = A-f+e+g+$ etc., und demnach nunmehr $-f$ das $n-1$ste Glied von P. Lässt sich aber $-f$ aus der nten Stelle in die $n-1$te bringen, so lässt es

sich auch ebenso aus der $n-1$sten in die $n-2$te, aus der $n-2$ten in die $n-3$te Stelle, und mithin in jede frühere Stelle bringen.

Bezeichnet man andererseits $A+e$ durch B, so hat man ferner $P=B-f+g+$ etc., während nach §. 20 $B-f+g$ als dreigliedrige Summe sich in $B+g-f$ und daher P in $B+g-f+$ etc. umwandeln lässt, d. h. in eine algebraische Summe, in welcher $-f$ aus dem nten Gliede das $n+1$ste geworden ist. Auf demselben Wege lässt sich durch wiederholte Anwendung der ersten Regel des §. 20 das Glied $-f$ aus der $n+1$sten Stelle in die $n+2$te, aus dieser in die $n+3$te bringen etc., so dass die Richtigkeit der vorgegebenen Regel völlig einleuchtet.

Zweite Regel. Statt eine beliebig vielgliedrige algebraische Summe zu addiren, darf man ihre Glieder einzeln nach einander algebraisch addiren; statt eine solche zu subtrahiren, darf man ihre Glieder einzeln nach einander umgekehrt algebraisch addiren (d. h. die zu addirenden Glieder subtrahiren, die zu subtrahirenden addiren) — das erste Glied, welches ohne Vorzeichen ist, allemal als ein ursprünglich addirtes angesehen.

Beweis. Legen wir die algebraische Summe

$$P = M + (a + b - c - d + e - f + \text{ etc.})$$

zum Grunde, und zeigen zunächst, dass ein beliebiges Glied, etwa d aus der Summe $a+b-c-d+e-f+$ etc. herausgelassen und für sich zu M algebraisch addirt werden dürfe. Man bemerke zuerst, dass man nach der vorigen Regel das d (mit Wahrung seines Vorzeichens $-$) zum letzten Gliede jener Summe $a+b-c$ etc. machen kann, so dass, wenn die algebraische Summe der übrigen Glieder derselben durch A bezeichnet wird, noch

$$P = M + (A - d)$$

ist, während nach der zweiten Regel des §. 20 $M+(A-d)$ in $M+A-d$, und dies in $M-d+A$ umgeformt werden kann. Was aber hier mit dem beliebigen Gliede d geschehen ist, lässt sich auch mit jedem anderen Gliede der algebraischen Summe $a+b-c-d+e-f+$ etc. ausführen; mithin ist die Richtigkeit der obigen Regel, so weit sie auf addirte algebraische Summen Bezug hat, dargethan.

War die gegebene algebraische Summe dagegen eine subtrahirte, und z. B.

$$P = M - (a + b - c - d + e - f + \text{etc.}),$$

so hat man noch $P = M - (A - d)$, während dies nach §. 20 in $M - A + d$ und dann in $M + d - A$ verwandelt werden darf. Es ist also wiederum erlaubt, jedes beliebige Glied aus der zu subtrahirenden Summe $a + b - c - d +$ etc. herauszunehmen und für sich mit entgegengesetztem Zeichen algebraisch zu addiren, — was zu beweisen war.

Die Erweiterung der dritten Regel des §. 20 bedarf keiner Erörterung, da sie nur eine Umkehrung der zweiten ist.

§. 22. *Lehrsatz.* Jeder durch Additionen und Subtraktionen beliebig entstandene Ausdruck lässt sich auf die Form einer Differenz bringen, deren beide Glieder wirkliche Summen der dem Ausdrucke zum Grunde gelegten Elemente sind.

Beweis. Da ein, durch Addition und Subtraktion aus Elementen zusammengesetzter Ausdruck nichts weiter als eine algebraische Summe sein kann, deren Glieder aber selber wieder algebraische Summen oder algebraische Summen von algebraischen Summen sein können, so lässt sich nach der zweiten Regel des §. 21 zunächst der Ausdruck in eine algebraische Summe umformen, deren einzelne Glieder jene Elemente selber sind.

Haben wir z. B. den Ausdruck

$$A - \{a + [(b - c) - (c - (d - [e - f]))] - g\} + \text{etc.}$$

so bekommt man nach und nach durch wiederholte Anwendung jener Regel die folgenden Ausdrücke:

$$A - a - ((b - c) - (c - (d - [e - f]))) + g + \text{etc.},$$
$$A - a - (b - c) + (c - (d - [e - f])) + g + \text{etc.},$$
$$A - a - b + c + c - (d - [e - f]) + g + \text{etc.},$$
$$A - a - b + c + c - d + [e - f] + g + \text{etc.},$$
$$A - a - b + c + c - d + e - f + g + \text{etc.}$$

Ist nun diese Umformung geschehen, so kann man nach der ersten Regel des §. 21 die Glieder so anordnen, dass die addirten Glieder voranstehen, was in unserem Beispiele auf

$$A + c + c + e + g + \text{etc.} - a - b - d - f - \text{etc.}$$

führt, und dann nach der dritten Regel die subtrahirten Glieder in ein einziges subtrahirtes zusammenfassen, was im vorstehenden Falle

$$(A+c+c+e+g+ \text{etc.}) - (a+b+d+f+ \text{etc.})$$

gibt und allemal auf die im Lehrsatze verlangte Form führt.

§. 23. *Ueber die allgemeinen Summen und Differenzen mit gleichen Gliedern.* Das Bisherige enthält vollständig alles, was sich aus den Grundbeziehungen für allgemeine Summen und Differenzen, deren Glieder ganz beliebig sind, entwickeln lässt, und man könnte nur noch untersuchen wollen, ob die gefundenen Gesetze nicht noch besondere bemerkenswerthe Resultate für den Fall liefern, dass die Glieder nicht mehr ganz beliebig sind, also wenn entweder 1) beide Glieder einander gleich sind, oder 2) wenn die Glieder zwar ungleich, aber nicht mehr beliebig ungleich sind.

Was den ersten Fall betrifft, so bietet die Summe mit gleichen Gliedern $(a+a)$ keine Eigenthümlichkeiten dar, und wird dieselbe erst später bei der Multiplikation weiteren Betrachtungen unterworfen werden. Die allgemeine Differenz mit gleichen Gliedern zeigt dagegen die im folgenden Lehrsatze ausgesprochene Eigenschaft.

Lehrsatz. Alle Differenzen, in denen der Subtrahend dem Minuenden gleich ist, haben einerlei Werth.

Beweis. Sind m und p beliebig von einander verschieden, so soll $m - m = p - p$ sein. Um die Richtigkeit dieser Behauptung nachzuweisen, addiren wir, die Vorschrift der Anmerkung zu §. 18 befolgend, zu den beiden Ausdrücken $m - m$ und $p - p$ den Subtrahenden der einen dieser beiden Differenzen, etwa m, und erhalten dadurch die Ausdrücke

$$(m - m) + m \text{ und } (p - p) + m$$

von denen der erste nach Gl. (III) den Werth m hat, und der zweite nach Gl. (I) in $m + (p - p)$, und dann nach der zweiten Regel des §. 20 in $m + p - p$ umgeformt werden kann, während nach §. 18 wiederum $m + p - p = m$ ist. Es haben somit $(m - m) + m$ und $(p - p) + m$, und folglich auch $m - m$ und $p - p$ einerlei Werth.

Haben aber sämmtliche Differenzen, in denen der Subtrahend dem Minuenden gleich ist, denselben Werth, so darf man sie auch überall durch dasselbe Zeichen vorstellen, und in der That bezeichnet man sie durch das Zeichen 0 (Null).

§. 24. *Von den besonderen Summen- und Differenzwerthen.* Die zweite im vorigen §. angeregte Frage ist, ob es Summen

und Differenzen mit ungleichen Gliedern gebe, welche besondere Eigenthümlichkeiten zeigen. Da nun einerseits solche Eigenthümlichkeiten nur darin bestehen können, dass sie mit Ausdrücken vertauschbar sind, welche einfacher sind, als die allgemeinen Ausdrücke, welche die gefundenen allgemeinen Gleichungen für algebraische Summen von beliebig verschiedenen Gliedern liefern [d. h. darin, dass sie (im Sinne des §. 12 gesprochen) besondere Werthe annehmen], und da wir andererseits bis jetzt nächst den Summen und Differenzen nichts anderes, mithin auch nichts Einfacheres kennen, als Glieder von Summen und Differenzen: so reducirt sich die Frage darauf, ob in den Summen und Differenzen die Glieder so bestimmt werden können, dass sie einem ihrer Glieder gleich werden.

Wir fragen demnach, in welchen Fällen $a+b=a$*), $a-b=a$, $a-b=b$ sein werde.

Die Gleichung $a+b=b$ gibt nun, wenn man auf jeder Seite b subtrahirt, $(a+b)-b=b-b$, d. h. nach §. 18 und §. 23, $a=b-b$ oder $a=0$; mithin kann nicht $a+b=b$ sein, wenn nicht a den Werth Null hat — oder mit andern Worten: eine Summe $a+b$ kann nicht einen besondern Werth haben, d. h. einem ihrer Glieder gleich werden, wenn nicht das andere Glied gleich Null ist.

Die Gleichung $a-b=a$ gibt, wenn man jederseits erst b addirt und dann a subtrahirt, $a-a=b$, d. h. $0=b$; mithin muss der Subtrahend den Werth Null haben, wenn eine Differenz dem Minuenden gleich werden soll.

Die Gleichung $a-b=b$ gibt, wenn man jederseits b addirt, $a=b+b$; und es muss also der Minuend gleich $b+b$ sein, wenn die Differenz dem Subtrahenden gleich werden soll.

Da aber die Summe $b+b$ nichts sich Auszeichnendes weiter in sich schliesst, so bleiben als besondere Summen- und Differenzwerthe nur bemerkenswerth

(5) $$a+0=0+a=a,\ a-0=a,$$

welche Gleichungen aussprechen, dass ein Ausdruck ungeändert

*) Da in allgemeinen Summen die Glieder mit einander vertauscht werden können, so unterscheidet sich die Frage, wann eine Summe ihrem ersten Gliede gleich werde, nicht von der Frage, wann dieselbe ihrem zweiten Gliede gleich werde.

bleibe, wenn man zu demselben die Null addirt, oder von demselben die Null subtrahirt.

Die Summe $0+a$, welche mit a einerlei Werth hat, pflegt man abkürzungsweise mit Unterdrückung des ersten Gliedes, $+a$ zu schreiben; ebenso schreibt man der Abkürzung halber $-a$ für die Differenz $0-a$. — Die Summe $+a$ werden wir fortan einen additiven Ausdruck, die Differenz $-a$ einen subtraktiven Ausdruck nennen.

Zusätze. 1. Setzt man in die Gleichungen (1—4) für b den bestimmten Werth Null, so gehen dieselben, wenn man die eben genannten Abkürzungen anwendet, und für $a+0$ und $a-0$ sogleich das gleichbedeutende a setzt, über in

$$(6)\quad \begin{array}{ll} a+c=a+(+c), & a+c=a-(-c), \\ a-c=a+(-c), & a-c=a-(+c). \end{array}$$

Diese Gleichungen lehren, dass man, statt einen additiven Ausdruck $+c$ zu addiren oder zu subtrahiren, nur dessen zweites Glied (das c) zu addiren oder zu subtrahiren braucht; und dass man, statt einen subtraktiven Ausdruck zu addiren oder zu subtrahiren, nur dessen zweites Glied resp. zu subtrahiren oder zu addiren nöthig hat.

2. Stellt a das erste Glied einer algebraischen Summe vor, so vermehrt man dadurch, dass man für a die gleichbedeutende Summe $+a$ setzt, die algebraische Summe um ein Glied (um das verschwiegene Glied Null), und das vorher erste Glied a wird dann zweites Glied. Daher kann man die erste Regel in §. 20 und 21, welche lehrt, dass alle Glieder einer algebraischen Summe mit Ausschluss des ersten beliebig geordnet werden können, weiter ausdehnen und die Anordnung sämmtlicher Glieder für beliebig erklären, wofern man nur das erste Glied wie ein mit dem Vorzeichen + versehenes behandelt.

Zugleich sieht man, dass das + Zeichen, welches in §. 20 bloss hülfsweise vor dem ersten Gliede algebraischer Summen hinzugedacht worden ist, in der That auch als Rechnungszeichen hinzugeschrieben und beibehalten werden darf, weil dasselbe nur das Hinzutreten des (den Gesammtwerth nicht ändernden) Gliedes Null ausdrückt.

Schlussbemerkung. Wir erinnern hier zum Schlusse, dass alles für die Addition und Subtraktion in diesem Kapitel Ent-

wickelte Folgerungen sind, die einzig und allein aus den beiden Grundsätzen des §. 15 und den drei grundsätzlichen Relationen des §. 16 fliessen, so dass alles lediglich auf der Eindeutigkeit der Summen und Differenzen (§. 15), auf der Vertauschbarkeit der Glieder in zwei- und dreigliedrigen Summen (Gleichungen I und II), und dem in Gleichung (III) ausgesprochenen Gegensatze der Addition und Subtraktion beruht. Die nächsten Folgerungen waren die Gleichungen (1—4), und alles Spätere wiederum nur das Ergebniss einer einmaligen oder wiederholten Anwendung dieser letzten Gleichungen.

Drittes Kapitel.

Addition und Subtraktion der Zahlen.

§. 25. *Gesetze der Addition und Subtraktion der Zahlen.*

1. Die für allgemeine Summen und Differenzen in §. 15 und §. 16 hingestellten Grundsätze und Grundbeziehungen sind, wie aus dem Begriffe der Zahlensumme und der Zahlendifferenz von selbst folgt, auch für Zahlensummen und Zahlendifferenzen gültig.

Was nämlich zunächst die Grundsätze des §. 15 betrifft, so ist an sich klar, dass sich durch Vereinigung der Einheiten zweier Zahlen nicht mehr als eine Zahl bilden lässt, d. h. dass Zahlensummen eindeutig sind; so wie, dass der Werth einer Zahlensumme sich ändern muss, wenn die Einheiten des einen Summanden vermehrt oder vermindert werden, d. h. dass auch die Zahlendifferenzen eindeutig sind.

Was ferner die Grundgleichungen des §. 16 betrifft, so sagt die Gleichung (I), wenn $a+b$ und $b+a$ als Zahlensummen aufgefasst werden, nur die unbestreitbare Thatsache aus, dass man auf dieselbe Einheitsmenge komme, man möge die Einheiten der Zahl b zu den Einheiten der Zahl a, oder die Einheiten der Zahl a zu denen der Zahl b hinzufügen. Die Gleichung (II) sagt, auf Zahlensummen bezogen, die ebenso unbestreitbare Thatsache aus, dass man auf dieselbe Zahl komme, man möge die Einheiten der Zahlen a, b, c in der Ordnung a, b, c, oder in der Ordnung a, c, b mit einander vereinigen. Die Gleichung (III) endlich spricht die schon im §. 6 gegebene Erklärung der Zahlendifferenz aus und bleibt sonach gleichfalls gültig; nur hat dieselbe für Zahlendifferenzen eine eingeschränktere Geltung als für allgemeine Differenzen, weil bei allgemeinen Differenzen a und b beliebige Elemente sein dürfen, bei Zahlendifferenzen aber nicht beliebige Zahlen, da sie ihren Sinn verliert, so oft a kleiner als b ist.

2. Sämmtliche Gesetze der allgemeinen Addition und Subtraktion sind auch auf Zahlensummen und Zahlendifferenzen anwend-

bar, weil sie eine Folge der Sätze des §. 15 und 16 sind, die wir so eben als anwendbar haben anerkennen müssen. Es ist aber an sich klar, dass diese Gesetze bei ihrer Anwendung aufhören, Gesetze der Zahlensummen und Zahlendifferenzen zu sein, sobald auch nur in einer einzigen der erscheinenden Differenzen der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, weil man es alsdann nicht mehr mit reinen Zahlendifferenzen zu thun hat.

§. 26. *Von den Summen und Differenzen ohne Zahlbedeutung.* Dass beim Rechnen mit Zahlzeichen nach den für Zahlensummen und Zahlendifferenzen als gültig befundenen Gesetzen des vorigen Kapitels, Differenzen, in denen der Subtrahend grösser als der Minuend ist, und somit Summen und Differenzen ohne Zahlbedeutung erscheinen, brauchte nicht als störend angesehen zu werden, wenn in solchem Falle die Resultate gleichfalls immer Zahlenverbindungen ohne Zahlbedeutung würden — insofern ein Resultat ohne Zahlenwerth so gut wie gar keines, und mithin auch kein unrichtiges Resultat ist. Der Erfolg lehrt inzwischen, dass das Resultat trotz dem sehr wohl einen Zahlenwerth haben kann*), und man darf daher mit Recht fragen, was man alsdann von demselben zu halten habe. Hätte man in den Rechnungen nie etwas anderes anzuwenden als Additionen und Subtraktionen, so würde man sich leicht helfen können. Es ist nämlich nicht schwer, den Zahlbegriff so zu erweitern, dass die Werthe sämmtlicher Summen- und Differenzformen, zu denen die Anwendung der Gesetze des zweiten Kapitels auf Zahlen führen kann, noch als Zahlen erscheinen, und es lässt sich dabei bequem eine solche dem erweiterten Zahlbegriffe angepasste Erklärung für die Addition und Subtraktion aufstellen, dass die Grundsätze und Grundgleichungen der §§. 15 und 16 richtig bleiben — und in der That hat man in den meisten Lehrbüchern diesen Weg eingeschlagen. Allein es erscheinen bei der Aufnahme anderer Operationen als derer des Addirens und Subtrahirens, Rechnungsformen,

*) So z. B. liefert die Gleichung (2) des §. 19, nämlich die Gleichung $(a-b)+c=(a+c)-b$, wenn man sich unter a, b, c resp. die Zahlen 5, 7, 11 denkt, die Gleichung $(5-7)+11=(5+11)-7$, in welcher der Ausdruck zur Rechten zu einer wirklichen Zahl (zur Zahl 9) führt, während der Ausdruck zur Linken eine Differenz ohne Zahlbedeutung in sich schliesst.

die unter einen allgemeinen Zahlbegriff zu bringen noch nicht gelungen ist, so dass man sich am Ende dennoch gezwungen sieht, diese (späteren) Rechnungsformen als Zeichen ohne Zahlbedeutung stehen zu lassen, und auf ein Rechnen mit Zeichen, denen nicht nothwendig eine Zahlbedeutung zukommt, zurückzugehen. Es würden also dennoch Fälle erscheinen, in denen das + und — nicht mehr Operationszeichen, sondern blosse äussere Verknüpfungszeichen sind, die zur Bildung zusammengesetzterer Zeichen dienen.

Aus diesem Grunde gehen wir den kürzeren Weg und sprechen sogleich von der Berechtigung, an die Stelle des Rechnens mit Zahlen das Rechnen mit allgemeinen Zeichen zu setzen.

Die Elemente bei der allgemeinen Addition und Subtraktion des 2ten Kapitels dürfen wir uns auf Grund des Nachweises im §. 25, als Zahlen, und dabei dann die Ziffernsummen und Ziffern-differenzen (sobald sie alle als Zahlensummen und Zahlendifferenzen einen Sinn haben) als Zahlensummen und Zahlendifferenzen denken, und wissen sicher, dass wir dabei auf richtige Resultate kommen. Und haben die Ziffernsummen und Zifferndifferenzen keinen Sinn als Zahlensummen und Zahlendifferenzen, mithin keinen Sinn als Zahlzeichen, oder sind die Elemente auch nicht einmal Zahlen, sondern solche Rechnungsformen, auf die vorher hingedeutet worden [oder gar Rechnungsformen, wie sie die jetzige Mathematik noch nicht kennt, wie sie aber wohl bei einer weiteren Entwickelung der Mathematik sich darbieten könnten, also irgend etwas von einer Zahl beliebig Verschiedenes]: so würden dennoch die Resultate nie unrichtig werden können, weil sie zuletzt doch immer nur nothwendige Folgen der §§. 15 und 16 sind — wofern wir nur diese beiden §§. als Grundlage des Rechnens bestehen lassen dürfen. Dass dies aber ohne Weiteres geschehen dürfe, erleidet kein Bedenken, da diese Sätze nur fordern, dass man 1) überall $(a-b)+b$ als ein mit a gleichbedeutendes Zeichen ansehe, (also z. B. $(7-9)+9$ noch als ein Zeichen für die Zahl 7 betrachte), dass man 2) $a+b$, was auch a und b vorstellen mögen, noch immer als identisch mit $b+a$ behandele (in unserem Beispiele also auch noch $9+(7-9)$ als ein Zeichen für $(7-9)+9$ und mithin für die Zahl 7 ansehe), dass man 3) die Formen $(a+b)+c$ und $(a+c)+b$ noch überall als gleich betrachte, und dass man end-

lich 4) aus $a+b=c$ und $a+b=g$ stets noch auf $c=g$, und aus $a+b=c$ und $d+b=c$ auf $a=d$ schliessen wolle. Etwas Widersinniges thun wir dadurch nicht, weil sich sonst ein Widerspruch zwischen diesen Forderungen im vorigen Kapitel hätte herausstellen müssen.

Somit darf und soll unser ferneres Addiren und Subtrahiren stets ein allgemeines Addiren und Subtrahiren sein, bei welchem es aber frei steht, da, wo es die Natur der Glieder zulässt, die allgemeinen Summen und Differenzen als Zahlensummen und Zahlendifferenzen aufzufassen.

Wir dürfen also (obgleich es nicht nothwendig ist) die Summen und Differenzen überall, wo es angeht, als Zahlensummen und Zahlendifferenzen ansehen; wir müssen sie aber offenbar als solche ansehen in den Resultaten, sobald wir diese auf bestimmte Grössen anwenden wollen. Erlaubt die Form des Resultats nicht, daraus eine Zahl zu bilden, so ist dies ein Beweis, dass die Aufgabe, auf welche es sich bezieht, in der Art, wie sie gestellt worden, keine Lösung hat. Denn das Resultat ist etwas mit Nothwendigkeit aus den Bedingungen der Aufgabe Gefolgertes; fordert dasselbe also eine unausführbare Operation, so müssen diese Bedingungen unter sich einen Widerspruch enthalten haben. Wie man jedoch zuweilen ein solches Resultat benutzen könne, um eine sich auf die in der Aufgabe vorkommenden Grössen beziehende Wahrheit herzuleiten, wird weiter unten angegeben werden.

§ 27. *Die positiven und negativen Zahlen.* Die Summe $0+a$ oder $+a$, welche wir allgemein einen additiven Ausdruck genannt haben, nennt man in dem besonderen Falle, dass a eine Zahl vorstellt — eine positive (ganze) Zahl und deren zweites Glied a den absoluten oder numerischen Werth derselben. Die Differenz $0-a$ oder $-a$, die wir allgemein einen subtraktiven Ausdruck genannt haben, nennt man in dem besonderen Falle, dass a eine Zahl vorstellt — eine negative (ganze) Zahl, und deren zweites Glied a wiederum den absoluten oder numerischen Werth derselben*).

*) Der Unterschied zwischen positiver Zahl und additivem Ausdruck, so wie zwischen negativer Zahl und subtraktivem Ausdruck ist wohl fest zu halten. Es kann z. B. ein additiver Ausdruck auch einer negativen,

Die positiven und negativen Zahlen sind also dieser Erklärung zufolge nicht *Zahlen*, sondern gewisse Summen und Differenzen.

Die in den Gleichungen (6) des §. 24 sich aussprechende Regel enthält nun als besonderen Fall (nämlich wenn c eine Zahl bezeichnet) die Regel: dass man, statt eine positive Zahl zu addiren oder zu subtrahiren auch bloss deren numerischen Werth addiren oder subtrahiren dürfe, und dass man, statt eine negative Zahl zu addiren oder zu subtrahiren, auch den numerischen Werth derselben resp. subtrahiren oder addiren dürfe.

§. 28. *Zusatz.* Jede Differenz zweier Zahlen ist entweder einer wirklichen Zahl, oder der Null, oder einer negativen Zahl gleich.

Sind nämlich a und b Zahlen, so ist $a-b$ eine wirkliche Zahl, wenn a g r ö s s e r als b ist; es ist $a-b=0$, wenn a g l e i c h b ist; endlich ist $a-b$ einer negativen Zahl gleich, wenn a k l e i n e r als b ist. Das letzte sieht man ein, wenn man bemerkt, dass man nach §. 24, $a-b=0+(a-b)$ hat, während nach Gleichung (3), $0+(a-b)$ $=0-b+a$, und nach Gleichung (2), $0-b+a=0-(b-a)=-(b-a)$ ist, und dass, weil b grösser als a ist, $b-a$ eine wirkliche, mithin $-(b-a)$ eine negative Zahl vorstellt. Zugleich erkennt man, dass man den numerischen Werth dieser der Differenz $a-b$ gleichen negativen Zahl (nämlich die Zahl $b-a$) erhält, wenn man den Minuenden vom Subtrahenden subtrahirt.

§. 29. *Folgerung.* Aus §. 22 folgt, dass, wie man auch Zahlen durch Addition und Subtraktion mit einander verknüpfen möge, der entstehende Ausdruck sich jedesmal auf die Form einer Differenz bringen lässt, in welcher die beiden Glieder reine Summen der E l e m e n t e, d. h. hier, reine Summen von Z a h l e n sind. Da nun jede Summe von Zahlen wiederum eine Zahl vorstellt, so kommt man demnach jedesmal auf eine D i f f e r e n z wirklicher Zahlen, die nach dem §. 28 wiederum entweder einer wirklichen Zahl, oder der Null, oder einer negativen Zahl gleich ist.

ein subtraktiver Ausdruck einer positiven Zahl gleich sein. So ist unter andern der subtraktive Ausdruck $-a$ eine positive Zahl, wenn a den Werth -7 hat, und unter derselben Voraussetzung der additive Ausdruck $+a$ eine negative Zahl.

Bemerkung über den Sinn der Resultate von negativem Zahlenwerthe in Aufgaben, welche sich auf bestimmte Grösseneinheiten beziehen.

Ergibt sich bei einer Aufgabe, die sich auf bestimmte Grössen bezieht, eine negative Zahl als Resultat, so ist dies, wie schon oben erwähnt wurde, ein Beweis, dass die Aufgabe keine Lösung hat, d. h. dass die Bedingungen, welche der Aufgabe zu Grunde gelegt sind, einen Widerspruch enthalten. Es gibt inzwischen oft der numerische Werth des negativen Resultats die Lösung einer Aufgabe, die in enger Beziehung zu der gegebenen steht.

Zunächst bemerke man, dass die Differenz $a - a$ oder die Null, wenn das Subtrahiren von Zahlen als ein Hinwegnehmen der Einheiten des Subtrahenden von denen des Minuenden gedacht wird, so oft a eine wirkliche Zahl ist, das Hinwegnehmen so vieler Einheiten fordert als vorhanden sind; man kommt also nicht auf eine Zahl, sondern auf einen Mangel aller Einheiten, und es entspricht demzufolge jener Null bei der Anwendung auf Grössen das „Nichts." — Ist nun die negative Zahl $- b$ das Resultat der Rechnung bei einer sich auf Grössen beziehenden Aufgabe, so muss dieselbe, falls ihr irgend ein Sinn untergelegt werden soll, wegen $(-b)+b=0$ etwas vorstellen, was zu b Einheiten der gesuchten Grösse hinzugefügt, die Null hervorbringt, d. h. etwas, was b Einheiten derselben zu compensiren im Stande ist. Existirt nun eine Grössenart, welche in solchem Verhältnisse zu der gesuchten Grössenart steht, dass die Vermehrung der einen um irgend eine Anzahl Einheiten der Verminderung der anderen um ebenso viele Einheiten gleichkommt, dass also b Einheiten der einen, b Einheiten der anderen zu compensiren vermag, so würden b Einheiten der neuen Grössenart die vom Rechnungsresultate geforderte Bedingung erfüllen. Man dürfte daher nur die Aufgabe dahin umändern, dass man statt nach der Zahl der alten Einheiten, nach der Zahl jener neuen Einheiten fragte, um eine Antwort möglich zu machen, und würde dann als Resultat den numerischen Werth des alten (vorher unbrauchbaren) Resultats erhalten.

Wäre z. B. gefragt worden, wie weit man vorwärts gekommen sei, wenn man 4 Schritte vorwärts und 9 Schritte zurück gehe, so würde das Resultat „— 5 Schritte vorwärts" zu erkennen geben, dass die Frage eine unstatthafte war. Da aber die

Verminderung von vorwärts gerichteten Schritten gleichkommt einer Vermehrung von ebenso vielen rückwärts gerichteten Schritten, so kommt man dem Vorstehenden zufolge auf die mit der gestellten zusammenhängende, aber einer Antwort fähige Aufgabe, wenn man statt nach vorwärts gerichteten, nach rückwärts gerichteten Schritten fragt, und der numerische Werth von — 5, auf die neue gefragte Einheit, auf „rückwärts gerichtete Schritte“ bezogen, ist dann die Lösung derselben.

Wird ferner gefragt, wieviel Thaler man übrig behalte, wenn man nach einer Einnahme von 4 Thalern 7 Thaler ausgäbe, so würde man auf „— 3 Thaler“ kommen. Die übliche Antwort, die man aus diesem Resultate herausliest, nämlich, dass man 3 Thaler Schulden habe, ist wiederum nicht die Antwort auf die gegebene Frage, sondern auf die umgekehrte, nämlich auf die Frage: welches die geringste Summe Schulden sei, die man machen müsse, um bei einem Besitze von 4 Thalern 7 Thaler ausgeben zu können.

Existirt indessen keine Grössenart, welche in der oben erwähnten Beziehung zur gesuchten Grösse steht, so lässt sich der Widerspruch zwischen den Bedingungen der Aufgabe und dem Fragesatze nicht durch Aenderung der Frage lösen, und es kann selbst nicht auf künstliche Weise ein anderer Sinn in das negative Resultat gebracht werden, als der, dass die Frage eine ungereimte gewesen sei, wie z. B. wenn man nach der Zahl der Mitglieder einer Versammlung, nach der Länge einer Dreiecksseite, nach dem Inhalte einer geometrischen Figur, etc. gefragt hätte. Wären die negativen Zahlen an sich etwas, was sich wie die wahren Zahlen allgemein auf Grössen, d. h. auf zählbare Gegenstände beziehen liesse, so müssten sie auch bei Fragen der letzten Art einen Sinn liefern.

Viertes Kapitel.

Die Multiplikation und Division allgemeiner Zeichen.

A. Von den Beziehungen der allgemeinen Produkte und Quotienten zu einander.

§. 30. *Das allgemeine Produkt und der allgemeine Quotient.* Die Verknüpfung zweier allgemeinen Zeichen a und b durch ein Multiplikationszeichen (die Form ab, $a \cdot b$ oder $a \times b$) heisst allgemeines Produkt, ihre Verbindung durch ein Divisionszeichen (die Form $a:b$ oder $\frac{a}{b}$) ein allgemeiner Quotient. Im Zeichen ab heissen die Elemente a und b Faktoren oder Glieder des Produkts, im Zeichen $a:b$ heissen sie Glieder des Quotienten oder resp. Dividend und Divisor. Der Akt des Hinschreibens der Formen ab und $a:b$ heisst resp. allgemeines Multipliciren und Dividiren.

§. 31. *Grundsätze für die Vergleichung von Produkten, die eines oder beide Glieder gemeinschaftlich haben.*

Für die Produkte stellen wir zwei Grundsätze auf, welche mit den im §. 15 für Summen gegebenen völlig übereinstimmen, indem wir, wenn $cb = a$ und $db = g$ gegebene Gleichungen sind

1) a und g für Zeichen von einerlei Werthe erklären, wenn c und d als vertauschbar anerkannt sind, und

2) a und g für Zeichen von verschiedenem Werthe, wenn c und d als verschieden angenommen werden sollen.

Der erste dieser Grundsätze drückt aus, dass Produkte, welche gemeinschaftliche Faktoren haben, nicht mehr als einen Werth haben sollen, und wir werden demnach, wenn $cb = a$ eine anerkannt richtige Gleichung ist, die Gleichung $cb = g$ für unstatthaft erklären, so oft a von g nachweislich verschieden ist. Aus dem zweiten Grundsatze folgt, dass wenn die Gleichungen $cb = a$

und $db = a$ nebeneinander bestehen sollen, auch $c = d$ sein müsse, und wir haben hierin ein zweites Merkmal, aus der Richtigkeit einer Gleichung auf die Unrichtigheit einer anderen zu schliessen.

Fassen wir den Inhalt des zweiten Grundsatzes in die Form einer Vorschrift zur Prüfung der Gleichheit zweier Ausdrücke, so lautet er so:

Ist zu prüfen, ob zwei Ausdrücke c und d einander gleich seien, so multiplicire man beide mit einem und demselben Ausdrucke*), so dass, wenn man diesen letzten durch das Zeichen b vorstellt, die Produkte cb und db entstehen. Lassen sich dann beide Produkte durch einerlei Ausdruck ersetzen, so ist $c = d$.

§. 32. *Grundsätzliche Beziehungen zwischen den allgemeinen Produkten und Quotienten.* Als Grundgleichungen für die Produkte und Quotienten setzen wir vorläufig folgende fest:

(IV) $ab = ba$; (V) $(ab)c = (ac)b$; (VI) $(a:b)b = a$

d. h. es möge das Zeichen ab mit ba, das Zeichen $(ab)c$ mit $(ac)b$, und das Zeichen $(a:b)b$ mit dem Dividenden seines ersten Gliedes einerlei Geltung haben.

Nennen wir ab ein zweigliedriges, $(ab)c$ (wofür nach §. 8 auch abc geschrieben werden kann) ein dreigliedriges Produkt, und in letzterem a, b, c resp. das erste, zweite, dritte Glied, so lässt sich der Inhalt jener Gleichungen resp. auch so aussprechen:

1) In zweigliedrigen Produkten sind die beiden Glieder mit einander vertauschbar,

2) in dreigliedrigen Produkten darf man das zweite und dritte Glied mit einander vertauschen,

3) der Quotient hat die Eigenschaft, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividenden zu geben.

Rechtfertigung der Gleichungen (IV—VI). Da wir für die Prüfung der Statthaftigkeit von Gleichungen bis jetzt nur die Grundsätze der §§. 15 und 31 besitzen, die Grundsätze des §. 15 aber hier, wo keine Summen- und Differenzformen vorhanden sind, nicht in Rede kommen können; da ferner andererseits von der Verträglichkeit der Gleichungen (IV—VI) mit den Gleichungen

*) Ist der eine der beiden Ausdrücke c und d ein Quotient, so multiplicirt man mit der meisten Aussicht auf Erfolg, mit dem Divisor desselben.

(I—III) nicht gesprochen werden kann, weil bis jetzt noch keine Beziehungen zwischen Summen und Produkten aufgestellt worden sind: so bleibt nur zu untersuchen, ob die Gleichungen (IV—VI) unter sich vereinbar sind, ohne den Grundsätzen des §. 31 zu nahe zu treten.

Die Gleichung (V) aber ist unabhängig von der Gleichung (IV), und daher neben derselben statuirbar, weil in den beiden Gruppen von Ausdrücken, welche wir vermöge der Gleichung (IV) berechtigt sind, für $(ab)c$ und $(ac)b$ zu setzen (nämlich resp. $c(ab)$, $(ba)c$, $c(ba)$ und $b(ac)$, $(ca)b$, $b(ca)$) keiner einen seiner beiden Faktoren mit einem Ausdrucke aus der andern Gruppe gemeinsam hat, was allein nach §. 31 zum Schlusse auf eine Ungleichheit führen könnte.

Dass endlich die Gleichung (VI) sowohl mit (IV) als mit (V) verträglich ist, bedarf keiner Erörterung. (Man vergleiche die Rechtfertigung der entsprechenden Gleichung (III) im §. 16.)

§. 33. *Eindeutigkeit der allgemeinen Quotienten.* Die Frage, ob der Quotient $a:b$ mehrerlei vorzustellen fähig, oder wie das Produkt nur eindeutig sei, beantwortet sich aus dem zweiten Grundsatze des §. 31 und der Gleichung (VI). Dürfte nämlich $a:b$ einmal mit einem Zeichen z, ein anderes Mal mit einem anderen x, welches einen von z verschiedenen Werth hätte, bezeichnet werden, so würde man aus der Gleichung (VI), indem man dort für $a:b$ einmal z, das andere Mal x setzt, die beiden Gleichungen $zb=a$ und $xb=a$ erhalten, welche nach dem genannten Grundsatze nicht neben einander bestehen können, wenn x von z verschieden gedacht ist. Es liesse sich also der zweite Grundsatz des §. 31 auch durch den Grundsatz „allgemeine Quotienten sind eindeutig" vertreten, weil jener aus diesem, wie dieser aus jenem mit Hülfe der Gleichung (VI) folgt.

§. 34. *Gesetze der allgemeinen Multiplikation und Division.* Die Worte und Gleichungen des §. 31 und 32 verwandeln sich genau in die Worte und Gleichungen des §. 15 und 16, sobald man die Worte Addition, Subtraktion, Minuend, Subtrahend in die Worte Multiplikation, Division, Dividend, Divisor verwandelt, und die Zeichen + und — mit dem Multiplikations- und Divisionszeichen vertauscht. Es muss daher alles für die allgemeine Addition und Subtraktion Entwickelte, weil es aus §. 15 und 16 her-

geleitet worden ist, auch auf die Multiplikation und Division passen, wenn man in sämmtlichen Aussprüchen die gleichen Wort- und Zeichenveränderungen vornimmt. Namentlich wird aus der Gleichung (a) des §. 18 hier die Gleichung

(b) $$(ab) : b = a$$

und aus den Gleichungen (1—4) des §. 19 nun

(7) $$(ab)c = (ac)b = a(bc),$$

(8) $$(a:b)c = (ac):b = a:(b:c),$$

(9) $$(ab):c = (a:c)b = a(b:c),$$

(10) $$(a:b):c = (a:c):b = a:(bc).$$

Um die Uebereinstimmung in den Worten vollständig zu machen, wird es nöthig, Produkt und Quotient unter den gemeinsamen Namen „algebraisches Produkt“ zu begreifen.

1. Die Regeln des §. 21 lauten dann so:

Erste Regel. In beliebig vielgliedrigen algebraischen Produkten lassen sich die Glieder (mit Beibehaltung ihrer Vorzeichen) beliebig mit einander vertauschen — oder:

Bei aufeinander folgenden Multiplikationen und Divisionen ist die Ordnung des Multiplicirens und Dividirens gleichgültig.

Zweite Regel. Statt mit einem algebraischen Produkte zu multipliciren, darf man mit jedem Gliede desselben einzeln nach einander algebraisch multipliciren; statt mit einem solchen zu dividiren, darf man mit jedem Gliede desselben nach Umkehrung der Vorzeichen einzeln algebraisch multipliciren (d. h. mit den multiplicirenden Gliedern einzeln dividiren, und mit den dividirenden multipliciren), wofern man das erste Glied des algebraischen Produkts (welches ohne Vorzeichen ist) wie ein multiplicirendes behandelt.

Dritte Regel. Statt nach und nach mit einer Folge von Gliedern algebraisch zu multipliciren, darf man auf einmal mit dem algebraischen Produkte derselben multipliciren, oder, nach Umkehrung der Vorzeichen mit demselben dividiren.

2. Der §. 22 überträgt sich ferner, wie folgt:

Jeder Ausdruck, der nur durch Multiplikation und Division aus gewissen Elementen gebildet ist, lässt sich in einen Quotienten umformen, dessen beide Glieder reine Produkte jener Elemente sind.

3. Dem §. 23 entspricht hier der Satz, dass alle Quotienten, in denen der Divisor dem Dividenden gleich ist, einerlei Werth haben. — Für diesen Werth wählen wir das Zeichen I, und nennen dasselbe die allgemeine Eins.

4. Die Gleichungen (5) des §. 24 verwandeln sich endlich in die Gleichungen

(11) $$a \,.\, \mathrm{I} = \mathrm{I} \,.\, a = a, \quad a : \mathrm{I} = a,$$

welche die aus dem Bisherigen sich ergebenden besonderen Produkt- und Quotientenwerthe liefern, und aussprechen, dass die Division und Multiplikation mit der allgemeinen Eins nichts an dem dividirten oder multiplicirten Ausdrucke ändere. Die den Abkürzungen $+a$ und $-a$ entsprechenden Abkürzungen $.a$ und $:a$ (für $\mathrm{I} \,.\, a$ und $\mathrm{I}:a$) sind nicht üblich; doch bezeichnet man den Quotienten $\mathrm{I}:a$ (welcher dem subtraktiven Ausdrucke $-a$ entspricht) mit einem besonderen Namen, und nennt ihn den umgekehrten Werth von a.

Zusatz. Vom umgekehrten Werthe eines Ausdrucks. Da $\mathrm{I}:(m:n)$ nach Gleichung (8), $=(\mathrm{I} \,.\, n):m = n:m$ ist, so kann man sagen: der umgekehrte Werth eines Quotienten ist gleich dem umgekehrten Quotienten, d. h. gleich dem, was aus dem Quotienten wird, wenn man den Divisor und den Dividenden mit einander vertauscht.

Da ferner nach Gleichung (8) $a:(b:c)=(ac):b$ und nach Gleichung (9) $(ac):b=a(c:b)$ ist, so hat man

$$a:(b:c)=a(c:b),$$

welche Gleichung sich wie folgt aussprechen lässt:

Statt mit einem Quotienten zu dividiren, darf man auch mit dessen umgekehrtem Werthe multipliciren.

§. 35. *Zusammenstellung der Hauptformeln für 3- und 4gliedrige algebraische Produkte.* Die wesentlichsten der Gll. (8—10) in den üblicheren anderen Divisionszeichen, nehmen sich so aus:

(12) $$\frac{a}{b}c = \frac{ac}{b}, \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = a.\frac{c}{b},$$

(13) $$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}.$$

Die erste dieser Gleichungen pflegt man auszusprechen „ein Quotient wird mit einem Ausdrucke multiplicirt, wenn man den Di-

videnden mit diesem Ausdrucke multiplicirt"; die zweite Gleichung: „statt mit einem Quotienten zu dividiren, darf man auch mit dem umgekehrten Werthe dieses Quotienten multipliciren"; die dritte Gleichung: „ein Quotient wird durch einen Ausdruck dividirt, wenn man den Divisor mit diesem Ausdrucke multiplicirt".

Die gebräuchlichsten Formeln für 4gliedrige algebraische Produkte sind:

(14) $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

(15) $$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d},\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

und werden gewöhnlich resp. wie folgt ausgesprochen:

1) Quotienten werden multiplicirt, wenn man das Produkt der Dividenden durch das Produkt der Divisoren dividirt; *)

2) Quotienten werden durch einander dividirt, wenn man den Quotienten der Dividenden durch den Quotienten der Divisoren dividirt; und insofern nach Gleichung (14) $\frac{ad}{bc}$ einerlei Werth hat mit $\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$,

3) statt einen Quotienten durch einen zweiten zu dividiren, darf man den ersten Quotienten auch mit dem umgekehrten Werthe des zweiten multipliciren: **)

*) Richtiger würde man sich ausdrücken (weil ja das Hinschreiben von $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{b}$ schon das Multipliciren von $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ ist), wenn man sagte: statt zwei Quotienten zu multipliciren darf man auch das Produkt der Dividenden durch das der Divisoren dividiren.

**) Was die Gleichung (14), nämlich die Gleichung $(a:b)\cdot(c:d)=(ac):(bd)$, betrifft, so erkennt man deren Richtigkeit, wenn man zuerst $(a:b)\cdot(c:d)$ nach der zweiten Regel des §. 34 umformt, d. h. wenn man statt das erste Glied $a:b$ des Produkts $(a:b)\cdot(c:d)$ mit dem algebraischen Produkte $c:d$ zu multipliciren, das Glied $(a:b)$ mit jedem Gliede von $c:d$ einzeln algebraisch multiplicirt, also für $(a:b)\cdot(c:d)$ den Ausdruck $a:b\cdot c:d$ hinschreibt; dann nach der ersten Regel die Glieder dieses algebraischen Produkts so ordnet, dass die multiplicirenden Glieder voranstehen, d. h. dasselbe in $a\cdot c:b:d$ umformt; und endlich nach der dritten Regel dafür $(ac):(bd)$ setzt.

Ganz ebenso überzeugt man sich von der Richtigkeit der Gll. (15).

Schlussbemerkung. Wir erinnern hier wiederum schliesslich, dass sämmtliche Multiplikations- und Divisionsgesetze dieses Kapitels bis hierher lediglich Folgerungen aus den Grundsätzen der §§. 31 und 32 sind, d. h., dass ihre Gültigkeit von nichts weiterem als von der Eindeutigkeit der Produkte und Quotienten (§. 31) und von den Gleichungen (IV—VI) des §. 32 abhängt.

B. Von den Beziehungen der Produkte und Quotienten zu den Summen und Differenzen.

§. 36. *Grundbeziehung zwischen den allgemeinen Summen und Produkten.* Um die Ausdrücke, in denen allgemeine Multiplikationen und Divisionen mit allgemeinen Additionen und Subtraktionen combinirt sind, in Beziehung zu einander zu bringen, bedarf es nur der Festsetzung eines Zusammenhanges zwischen den allgemeinen Summen und Produkten, weil die allgemeinen Differenzen und Quotienten schon durch die Gleichungen (III u. VI) resp. mit den Summen und Produkten in Verbindung stehen, mithin alsdann ein gegenseitiger Zusammenhang zwischen allen vier Formen von selbst entsteht. — Wir wählen für die Verknüpfung der Summen und Produkte die Gleichung

(VII) $$(a+b)c = ac+bc.$$

Rechtfertigung der vorstehenden Gleichung. Soll die Einführung der hier hingestellten Gleichung zulässig sein, so darf dieselbe mit keiner der früheren Annahmen, d. h. weder mit den Grundsätzen der §§. 15 und 31, noch mit den Grundgleichungen (I—VI) im Widerspruche stehen.

Ein hervortretender Widerspruch kann entweder ein allgemeiner sein, d. h. er kann sich schon zeigen, wenn die Elemente a, b, c noch allgemein (d. h. von unbestimmtem Werthe) sind; oder er kann ein besonderer sein, d. h., er kann sich erst zeigen, wenn das eine oder das andere Element bestimmte Werthe erhält, für welche die Ausdrücke $(a+b)c$ und $ac+bc$ durch einfache Summen oder Produkte sich ersetzen lassen und demzufolge eine unmittelbare Vergleichung mit den früheren Bestimmungen über Summen und Produkte erlauben.

Wir fangen mit der Untersuchung an, ob Widersprüche

der letzten Art vorhanden sind, und bemerken zu diesem Behufe, dass eine Vereinfachung der Ausdrücke $(a+b)c$ und $ac+bc$ nur dann eintreten kann, wenn die in ihnen enthaltenen Summen und Produkte b e s o n d e r e Werthe annehmen, während wiederum die einzigen besonderen Summen- und Produktwerthe, welche das Frühere bieten kann, die in den Gleichungen (5) u. (11) angegebenen sind. — Was nun zunächst die Summenformen betrifft, so nimmt

a) die in dem Ausdrucke $(a+b)c$ vorkommende Summe $a+b$ einen besonderen Werth nur an, wenn das eine Glied, etwa b, den Werth Null erhält. Dadurch geht die Gleichung (VII) zufolge der ersten der Gleichungen (5) des §. 24 in $ac=ac+0 \cdot c$ über, oder (indem man jederseits ac subtrahirt), in $ac-ac=0 \cdot c$, d. h., da $ac-ac$ keinen anderen Werth als den Werth Null hat, in $0=0 . c$. Wir müssen also, wenn wir die Gleichung (VII) beibehalten wollen, jedem Produkte, dessen einer Faktor die Null ist, den Werth Null zuschreiben. Hieraus würde folgen, dass, wie verschieden von einander auch c und d sein mögen, $0 \cdot c=0 \cdot d$ sein müsse, weil diese beiden Produkte den gemeinsamen Werth Null haben. Dies widerspricht aber dem 2ten Grundsatze des §. 31, welcher bestimmt, dass gleiche Produkte, die e i n e n gemeinsamen Faktor haben, auch den z w e i t e n Faktor gemein haben sollen. Demnach müssen wir, um diesem Widerspruche zu entgehen, entweder alle Produkte, in denen die Null als Faktor vorkommt, als den sonstigen Rechnungsregeln widersprechend, verwerfen, oder den genannten Grundsatz wie folgt einschränken:

> „Produkte, die e i n e n v o n N u l l v e r s c h i e d e n e n F a k t o r g e m e i n h a b e n, sind von einander verschieden, so oft die zweiten Faktoren von einander verschieden sind",

und mit den schon gewonnenen Rechnungsregeln die danach etwa nothwendig werdenden Modificationen vornehmen. — Wir wählen hier das letzte Auskunftsmittel als dasjenige, welches die wenigsten Störungen hervorbringt.

b) Die zweite Summe, welche in der Gleichung (VII) vorkommt, nämlich die Summe $ac+bc$, nimmt ihren besonderen Werth (den Werth ac) an, wenn $bc=0$ wird. Bei dieser Voraussetzung ist entweder $c=0$ oder c von Null verschieden. Ist $c=0$, so geht die Gleichung (VII) in die identische Gleichung $(a+b) \cdot 0=a \cdot 0$

über und führt mithin auf keinen Widerspruch. Ist c von Null verschieden, so erhalten wir $(a+b)c=ac$, und müssen daher, wenn wir den eben modificirten Grundsatz beibehalten wollen, weil der zweite Faktor c in den Produkten $(a+b)c$ und ac derselbe und von Null verschieden ist, auch die ersten Faktoren $a+b$ und a als einander gleich voraussetzen, was nach §. 24 wiederum nur dann möglich ist, wenn $b=0$ ist. Die Annahme der Gleichung $bc=0$ führt also, wenn c nicht Null ist, auf den Schluss, dass $b=0$ sei, d. h. die Gleichung (VII) im Vereine mit dem oben hingestellten Grundsatze nöthigt uns,

in jedem Produkte vom Werthe Null wenigstens einen Faktor der Null gleich vorauszusetzen,

und wir dürfen daher in Zukunft keine Bestimmung zulassen, welche uns zwingt, einem Produkte den Werth Null zuzuschreiben, dessen beide Faktoren von Null verschieden sind.

c) Was die besonderen Produktwerthe anlangt, so haben wir zufolge der Gleichungen (11) für je einen der in der Gleichung (VII) vorkommenden Faktoren den Werth I zu setzen. — Für $c=I$ geht diese Gleichung (wegen $[a+b].I=a+b$, $a.I=a$, $b.I=b$) in die identische Gleichung $a+b=a+b$ über und gibt also nichts Widersprechendes. — Die Substitution von I für die übrigen Faktoren der Gleichung (VII) (d. h. für die Faktoren a, b, $a+b$) führt zu keiner der schon früher betrachteten Formen und mithin gleichfalls zu nichts Widersprechendem.

Sonach können wir die Gleichung (VII) als verträglich mit den, aus den allgemeinen Summen- und Produkt-Eigenschaften hergeholten Schlüssen über besondere Summen- und Produktwerthe ansehen — wofern wir nur die so eben aus derselben gezogenen Folgerungen als massgebend mit aufnehmen, d. h. wofern wir 1) den zweiten Grundsatz des §. 31 in der angegebenen Weise beschränken, 2) die Null als besonderen Produktwerth für $a.0$ gelten lassen, und 3) kein anderes Produkt, als solches, welches die Null zum Faktor hat, mit dem Werthe Null belegen.

Gehen wir nun zu der Untersuchung über, ob die Grundsätze des §. 31 und die Grundgleichungen (I—VI) auch im Allgemeinen mit der neuen Gleichung verträglich seien.

Was den ersten Grundsatz betrifft, welcher verbietet, für ein und dasselbe Produkt zwei verschiedene Werthe zu statuiren, so

kommt es nur darauf an, zu zeigen, dass die für das Produkt $(a+b)c$ eingeführte neue Form $ac+bc$ nicht mehrerer Werthe fähig sei. Zu diesem Behufe brauchen wir indess nur darauf aufmerksam zu machen, dass ac und bc nach §. 31 als eindeutige Formen angesehen werden müssen, und $ac+bc$ mithin eine Summe eindeutiger Glieder, folglich zufolge des §. 15 wiederum etwas Eindeutiges vorstellt.

Der zweite Grundsatz des §. 31 verlangt, dass zwei Produkte, die einen von Null verschiedenen Faktor mit einander gemein haben, verschieden seien, so oft die zweiten Faktoren von einander verschieden sind, d. h. dass, wenn in ac und bc, c nicht der Null gleich ist, und dabei a und b nicht mit einander vertauschbar sind, auch ac und bc nicht mit einander vertauschbar seien — oder was dasselbe ist, dass unter diesen Umständen $ac-bc$ von Null verschieden sei. — Um zu sehen, ob unsere Gleichung dieser Forderung Genüge leiste, leiten wir aus derselben einen Ausdruck für die Differenz $ac-bc$ ab, was wir dadurch bewerkstelligen, dass wir von beiden Seiten der Gleichung (d. h. von $(a+b)c$ und $ac+bc$) den Ausdruck bc subtrahiren. Dies gibt:

$$(a+b)c-bc=(ac+bc)-bc,$$

oder zufolge der Gleichung (a) des §. 18

$$(a+b)c-bc=ac.$$

Da aber a ein willkührliches Zeichen ist und deswegen auch durch $a-b$ ersetzt werden kann, so kommt man auf

$$[(a-b)+b]c-bc=(a-b)c,$$

wofür man nach Gleichung (III) auch

$$(16) \qquad ac-bc=(a-b)c$$

schreiben darf. — Unter den hier gestellten Voraussetzungen ist aber weder $a-b$ noch c der Null gleich, mithin nach dem Obigen auch das Produkt $(a-b)c$ jederzeit von Null verschieden, so dass in der That die Gleichung (VII) jederzeit, wie der in Rede stehende Grundsatz es fordert, für $ac-bc$ etwas mit der Null Unvertauschbares liefert.

Jetzt bleibt noch zu prüfen, ob die Gleichungen (I—VI) auf etwas der Gleichung (VII) Widersprechendes führen können.

Was die Gleichung (I) betrifft, so lässt sich aus derselben in Bezug auf den ersten Ausdruck in Gleichung (VII) (d. h. auf $(a+b)c$) nur schliessen, dass eine Werthveränderung nicht her-

vorgehen dürfe, wenn b und a mit einander vertauscht werden. Da nun in der That der als gleichgeltend mit $(a+b)c$ hingestellte Ausdruck $ac+bc$ diese Forderung erfüllt, so dürfen auch die Gleichungen (I) und (VII) nebeneinander bestehen.

Was die Gleichung (IV) anlangt, so lässt sich aus derselben in Bezug auf den Ausdruck $(a+b)c$ nur schliessen, dass er mit $c(a+b)$ vertauschbar sei, und in Bezug auf die ihm gleichgestellte Summe $ac+bc$ nur, dass sie mit $ca+bc$, $ca+cb$, $ac+cb$ vertauscht werden dürfe. Soll also dies der Gleichung (VII) nicht entgegen sein, so darf das Bisherige für keinen der Ausdrücke $(a+b)c$ und $c(a+b)$ etwas von einem der Ausdrücke $ac+bc$, $ca+bc$, $ca+cb$, $ac+cb$ Verschiedenes liefern, was auch in der That nicht geschieht, da durch das Frühere über Ausdrücke von der Form $(a+b)c$ und $c(a+b)$ noch gar nichts bestimmt ist.

Die Gleichungen (II) u. (V) bedürfen keiner Untersuchung, weil diese nur von dreigliedrigen Summen und Produkten etwas aussagen, während die Gleichung (VII) nur z w e igliedrige Summen und Produkte enthält.

Die Gleichungen (III) und (IV) endlich liefern für gewisse Summen- und Produktformen von eigenthümlicher Gliederbeschaffenheit [für die Summe $(a-b)+b$ und für das Produkt $(a:b)b$] einen besonderen Werth (nämlich den Werth a). Es können diese Gleichungen daher nur dann die Gleichung (VII) beeinträchtigen, wenn sich aus der letzteren gleichfalls besondere, aber mit jenem unverträgliche Werthe für Summen und Produkte ergeben. In der That ist aber das Einzige, was diese Gleichung in Bezug auf b e s o n d e r e Werthe liefert, die Gleichung $a.0=0$ gewesen, mithin kommt, da $a.0$ ein P r o d u k t ist, nur die Gleichung (VI) in Frage, und zwar kann, da in dem Produkte $a.0$ der eine Faktor die Null ist, ein Conflikt nur eintreten, wenn in dem Produkte der Gleichung (VI) gleichfalls der eine Faktor, also entweder $a:b$ oder a der Null gleich wird. — Nehmen wir nun zuerst $a:b=0$ an, so verwandelt sich die Gleichung (VI) in $0.b=a$, während die Gleichung (VII) auf $0.b=0$ führt. Sollen daher die Gleichungen $0.b=a$ und $0.b=0$ sich nicht widersprechen, so muss man $a=0$ annehmen, d. h. man muss den Dividenden jedes Quotienten, der den Werth Null haben soll, der Null gleich denken. Diese Folgerung können wir aber gelten lassen, da sie

keineswegs gegen eine der früheren Bestimmungen verstösst. — Nehmen wir dagegen $b=0$, so geht die Gleichung (VI) in $(a:0).0=a$ über, während zufolge der Gleichung (VII) jedes Produkt, dessen einer Faktor die Null ist, den Werth Null haben soll. Es stehen also beide Gleichungen im Widerspruche, so oft a von Null verschieden ist. Wollen wir also die beiden Gleichungen (VI) und (VII) neben einander beibehalten, so müssen wir entweder die Produkte, in denen der eine Faktor $=0$ ist, oder wir müssen die Quotienten, in denen der Divisor $=0$ ist, ohne dass zugleich der Dividend den Werth Null hat, aus allen Rechnungen ausschliessen.

Wir ziehen das letztere vor, da wir die Ausschliessung der ersten Formen schon oben verweigert haben, und stossen sonach das Zeichen $a:0$ aus, als ein Zeichen, welches zwar die Form, nicht aber mehr die Eigenschaften eines Quotienten hat, insofern die Grundlage aller Quotienten-Eigenschaften, die Gleichung (VI), bei Zulassung der Null-Produkte auf dasselbe nicht weiter anwendbar ist.

Solche Formen, die, wie dieses $a:0$, keines Werthes fähig sind, dem sich die allgemeinen Rechnungsregeln anpassen liessen, werden wir in Zukunft werthlos oder bedeutungslos nennen.

Um schliesslich zu untersuchen, wie vieler Werthe ein und derselbe Quotient nunmehr in Folge der Modification des zweiten Grundsatzes in §. 31 fähig geworden ist, bezeichnen wir den Quotienten $a:b$ einmal durch x, ein anderes Mal durch z, und fragen, ob z und x als von einander verschieden betrachtet werden dürfen. Zu dem Ende bemerken wir, dass die Gleichung (VI), wenn man in derselben für $a:b$ nach einander die beiden Zeichen x und z setzt, in $x.b=a$ und $z.b=a$ übergeht, und daher $x.b=z.b$, d. h. $x.b-z.b=0$ sein muss. Da aber nach Gleichung (16) $x.b-z.b=(x-z)b$ ist, so reducirt sich dann die Frage darauf, ob ein von x verschiedenes z existire, für welches

$$(z-x)b=0$$

sein könne. Nach dem Obigen müssen wir aber aus dem Nullwerthe eines Produkts schliessen, dass wenigstens ein Faktor gleich Null sei, mithin muss entweder $z-x=0$, d. h. $z=x$ und mithin der Quotient eindeutig sein, oder es muss $b=0$ sein. Ist aber $b=0$

(was nach dem eben Erörterten nur statthaft ist, wenn zugleich $a=0$ ist), so wird $(z-x)b=0$ für jeden beliebigen Werth von z, d. h. es kann alsdann der Quotient jeden beliebigen Werth bezeichnen.

Sonach ist jeder Quotient eindeutig, wenn er einen von 0 verschiedenen Divisor hat; er ist werthlos, wenn der Divisor Null und der Dividend von Null verschieden ist; er ist alldeutig, d. h. er kann gleichzeitig jeden beliebigen Werth haben, wenn sowohl der Dividend als der Divisor der Null gleich ist

Folgerung. Was den Einfluss angeht, welchen die Einführung der Gleichung (VII) auf die früheren Rechnungsregeln ausübt, so beachte man, dass diese Gleichung nur die Ausstossung der Quotienten mit dem Divisor Null, so wie die Einschränkung des zweiten Grundsatzes des §. 31 nöthig machte, während die Abänderung dieses Grundsatzes wiederum nur darauf hinauslief, dass die Eindeutigkeit der Quotienten nur bei Quotienten, deren Divisor von Null verschieden ist, angenommen werden dürfe. Da nun die Eindeutigkeit der Quotientenformen nur bei der Entwickelung der Divisionsregeln zur Sprache gekommen ist, zu deren Beweise aber nothwendig vorausgesetzt werden musste, so reducirt sich der Einfluss der Gleichung (VII) darauf, dass

> sämmtliche Divisionsregeln nur unter der Bedingung für gültig erklärt werden dürfen, dass keiner der Divisoren den Werth Null habe;

und wir haben daher nicht sowohl die werthlosen Quotienten aus allen Rechnungen auszuscheiden, sondern auch den alldeutigen Quotienten 0 : 0.

§. 37. *Gesetze für die Verbindungen dreier Elemente.* Rücksichtlich der Combinationen von Additionen und Subtraktionen mit Multiplikationen und Divisionen, können wir nach Umformungen für Summen und Differenzen von Produkten und Quotienten, so wie nach Umformungen für Produkte und Quotienten von Summen und Differenzen fragen. Die einfachsten derselben welche sich bei der Aufnahme von drei Elementen a, b, c herstellen lassen, sind die folgenden:

(16) $(a-b)c=ac-bc$, (17) $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$,

$$(18)\qquad \frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}.$$

Diese Formeln, von denen sich übrigens die erste schon im vorigen §. bewiesen findet, lassen sich genau so beweisen, wie die Quotientenformeln des §. 34 (d. h. nach der am Schlusse des §. 31 gegebenen Regel). Behufs der Bewährung der Gleichung (17) z. B., in der wir natürlich c von Null verschieden denken müssen, multiplicirt man die Ausdrücke $(a+b):c$ und $a:c+b:c$ mit dem Divisor c, und erhält einerseits $\frac{a+b}{c}c$, wofür nach Gleichung (VI) $a+b$ geschrieben werden darf, und andererseits $(\frac{a}{c}+\frac{b}{c})c$, was sich nach Gleichung (VII) in $\frac{a}{c}c+\frac{b}{c}c$, und weiter nach Gleichung (VI) in $a+b$ umformen lässt. Beide Ausdrücke der Gleichung (17) sind also nach dem modificirten Grundsatze des §. 31 einander gleich, weil sie mit einem und demselben von Null verschiedenen Ausdrucke (mit c) multiplicirt, Ausdrücke von einerlei Werthe (nämlich vom Werthe $a+b$) geben.

Der Inhalt der Gleichungen (VII) und (17) lässt sich wie folgt aussprechen:

„Statt eine zweigliedrige algebraische Summe mit einem Ausdrucke zu multipliciren, darf man jedes Glied einzeln mit diesem Ausdrucke multipliciren, und nachgehend die entstehenden Produkte algebraisch addiren;“ und umgekehrt:

„Statt zwei Produkte, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, algebraisch zu addiren, darf man die algebraische Summe der ungleichen Faktoren mit dem gemeinsamen Faktor multipliciren.“

Der Inhalt der Gleichungen (17) und (18) lässt sich folgendermassen aussprechen:

„Statt eine zweigliedrige algebraische Summe durch einen Ausdruck zu dividiren, darf man jedes Glied durch diesen Ausdruck dividiren und nachgehend die entstehenden Quotienten algebraisch addiren,“ und umgekehrt:

„Statt zwei Quotienten, welche einerlei Divisor haben, algebraisch zu addiren, darf man die algebraische Summe der Dividenden durch den gemeinsamen Divisor dividiren.“

§. 38. *Gesetze für die Verbindungen beliebig vieler Elemente.* Die Regeln des §. 37 lassen sich auf den Fall ausdehnen,

wo die algebraischen Summen (der Produkte und Quotienten) beliebig vielgliedrig sind, so dass man folgende allgemeine Regeln erhält.

Erste Regel. Statt algebraische Summen von beliebig vielen Gliedern mit einem Ausdrucke m zu multipliciren oder zu dividiren, darf man jedes einzelne Glied derselben resp. durch m multipliciren oder dividiren, wofern man nachgehend die entstehenden Ausdrücke algebraisch addirt.

Zweite Regel. Eine algebraische Summe von Produkten, die einen gemeinsamen Faktor m haben, lässt sich in ein Produkt umformen, dessen einer Faktor die algebraische Summe der ungleichen Faktoren der gegebenen Summe, und dessen anderer Faktor m ist; und eine algebraische Summe von Quotienten, die einen gemeinsamen Divisor m haben, lässt sich in einen Quotienten umformen, dessen Dividend die algebraische Summe der Dividenden der gegebenen Quotienten, und dessen Divisor jenes m ist.

Die Beweise für die Richtigkeit dieser Regeln bestehen in einer wiederholten Anwendung des vorigen §. Handelt es sich z. B. um die erste Regel, so denke man sich als umzuformendes Produkt

$$[a-b+c+\ldots-r-p+q]m=P,$$

bezeichne, wenn n die Zahl der Glieder des ersten Faktors ist, die algebraische Summe der $n-1$ ersten Glieder desselben, durch A_1, so dass sich für P das Produkt $[A_1+q]\ m$ schreiben lässt, und forme dasselbe nun nach §. 37 in A_1m+qm um. Da nun, wenn die algebraische Summe der $n-2$ ersten Glieder von A_1 durch A_2 vorgestellt wird, $A_1=A_2-p$, also nach §. 37 $A_1m=A_2m-pm$ ist, so erhält man das gegebene Produkt unter der Form $A_2m-pm+qm$. Die $n-3$ ersten Glieder von A_2 ferner A_3 nennend, hat man $A_2=A_3-r$, mithin $A_2m=A_3m-rm$, und folglich das gegebene Produkt gleich

$$A_3m-rm-pm+qm,$$

etc., so dass man zuletzt in der That

$$[a-b+c\ldots-r-p+q]m=am-bm+cm+\ldots-rm-pm+qm$$

erhält.

§. 39. *Anwendung der Regeln des §. 38 auf die Null und die additiven und subtraktiven Ausdrücke.* Da die Null und die additiven und subtraktiven Ausdrücke algebraische Summen sind,

so lassen sich mit den aus ihnen gebildeten Produkten und Quotienten nach den Regeln des vorigen §., oder was dasselbe ist, nach den Gleichungen des §. 37 Umformungen vornehmen, die wir hier namhaft machen wollen.

Die Gleichungen (16) und (18) geben für $a=b$

(20) $$0 . c=0, \quad 0 : c=0.$$

Für $a=0$ geht die Gleichung (16) über in

$$(-b)c=-(bc),$$

und setzt man in dieser Gleichung für c den subtraktiven Ausdruck $0-d$, so erhält man

$$(-b)(-d)=-[b(0-d)],$$

oder da nach Gleichung (16), $b(0-d)=b . 0-bd=0-bd$ ist,

$$(-b)(-d)=-(0-bd)=-0+bd=bd.$$

Fügen wir hinzu, dass wegen $b=+b$, $c=+c$, $bc=+(bc)$ auch $(+b)(+c)=+(bc)$ ist, so haben wir somit folgende Gleichungen gewonnen:

(21) $$(+b)(+c)=+bc, (-b)(-c)=+bc; (-b)(+c)=-bc,$$

deren Inhalt, wenn wir das zweite Glied der additiven und subtraktiven Ausdrücke (also z. B. in $+b$ und $-b$ das b) deren Hinterglied nennen, sich wie folgt aussprechen lässt:

„Das Produkt zweier additiven und subtraktiven Ausdrücke ist gleich dem Produkte ihrer Hinterglieder, resp. mit einem davorgesetzten + oder — Zeichen, je nachdem die beiden Faktoren gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.“

Ferner findet man für die Division additiver und subtraktiver Ausdrücke die Gleichungen

(22) $$\frac{+b}{+c}=+\frac{b}{c}, \quad \frac{-b}{-c}=+\frac{b}{c}; \quad \frac{-b}{+c}=-\frac{b}{c}, \quad \frac{+b}{-c}=-\frac{b}{c},$$ *)

*) Die Richtigkeit dieser Gleichungen erkennt man, wenn man in denselben die verglichenen Ausdrücke mit dem Divisor des auf der linken Seite des = Zeichens stehenden Quotienten multiplicirt, indem man alsdann auf Ausdrücke kommt, deren Gleichheit aus den Gleichungen (21) erhellt. Bei der zweiten Gleichung erhält man z. B., mit $-c$ multiplicirend die Ausdrücke $\frac{-b}{-c}(-c)$ und $\left(+\frac{b}{c}\right)(-c)$, von denen der erste nach Gleichung (III) den Werth $-b$, der andere nach der dritten der Gleichungen (21) den Werth von $-(\frac{b}{c} \cdot c)$, also gleichfalls den Werth $-b$ hat.

oder in Worten: „der Quotient zweier additiven oder subtraktiven Ausdrücke ist gleich dem Quotienten ihrer Hinterglieder, resp. mit einem davorgesetzten + oder — Zeichen, je nachdem diese Hinterglieder gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.“

Hat man ein Produkt von beliebig vielen additiven und subtraktiven Ausdrücken, etwa das Produkt

$$(+a)(-b)(-c)(+d)(-e)(+f)(-g)(-h)\ldots,$$

so kann man, da die Ordnung der Faktoren beliebig geändert werden darf, die additiven Faktoren zuerst unter sich multipliciren, und erhält, weil $+a$, $+d$, $+f$, etc. resp. mit a, d, f, etc. einerlei Werth haben, $+(adf\ldots)(-b)(-c)(-e)(-g)(-h)\ldots$ Fasst man dann die subtraktiven Faktoren paarweise zusammen, so erhält man (weil $(-b)(-c)=+bc$, $(-e)(-g)=+eg$ etc. ist) als weitere Umformung das Produkt

$$+(adf\ldots.)(+bc)(+eg)\ldots..,$$

folglich lauter additive Faktoren, wenn die Zahl der subtraktiven Faktoren eine gerade war; dagegen ein Produkt, in welchem alle Faktoren bis auf einen (subtraktiven) sämmtlich additiv sind, wenn die Zahl der subtraktiven Faktoren eine ungerade war. Da nun ein Produkt additiver Faktoren gleich dem Produkte ihrer Hinterglieder ist, so kommt man, wenn man die Gleichungen (21) berücksichtigt, auf die Regel,

„dass das Produkt beliebig vieler additiver und subtraktiver Faktoren gleich dem Produkte ihrer Hinterglieder ist, resp. mit einem davorgesetzten + oder — Zeichen, je nachdem die Zahl der subtraktiven Faktoren eine gerade oder ungerade ist“.

§. 40. *Umformung eines Produkts algebraischer Summen in eine algebraische Summe.*

1. Sind zunächst die Faktoren des Produkts reine Summen, etwa $a+b+c+d$ und $e+f+g$, so kann man nach der ersten Regel des §. 38 zuerst, statt $a+b+c+d$ mit $e+f+g$ zu multipliciren, jedes Glied von $a+b+c+d$ mit $e+f+g$ multipliciren und nachgehend die entstehenden Produkte addiren, d. h. für das gegebene Produkt die Summe

$$a(e+f+g)+b(e+f+g)+c(e+f+g)+d(e+f+g)$$

setzen, und dann wiederum die Glieder $a(e+f+g)$, $b(e+f+g)$, etc. nach derselben Regel in $ae+af+ag$, $be+bf+bg$ etc. umformen.

Demnach ist das Produkt zweier reinen Summen gleich einer Summe von Gliedern, die man erhält, wenn man jedes Glied der einen Summe nach und nach mit jedem Gliede der anderen Summe multiplicirt.

2. Sind die Faktoren beliebige algebraische Summen, etwa $a-b-c+d$ und $e+f-g$, so schreibe man zuvörderst dieselben in Form von reinen Summen, deren Glieder die mit ihrem Vorzeichen versehenen Glieder der gegebenen Summen sind (was zufolge der 2ten und 3ten der Gleichungen (6) des §. 24 erlaubt ist), in unserem Beispiele also:

$$(+a)+(-b)+(-c)+(+d) \text{ und } (+e)+(+f)+(-g);$$

und verfahre nun nach der so eben für reine Summen abgeleiteten Regel, was hier $(+a)(+e)+(-b)(+e)+(-c)(+e)+(+d)(+e)+(+a)(+f)+(-b)(+f)+$ etc., oder mit Hülfe der Gleichungen (21),

$$ae-be-ce+de+af-bf-\text{etc.}$$

gibt: Die Regel wird demnach folgende:

Man bilde, um die geforderte Umformung zu erlangen, eine algebraische Summe aus Gliedern, die man erhält, wenn man jedes Glied des einen Faktors mit jedem des anderen multiplicirt, und ihnen ein (+) oder (—) Zeichen als Vorzeichen gibt, je nachdem die multiplicirten Glieder gleiche oder ungleiche Vorzeichen hatten.

§. 41. *Lehrsatz.* Der Werth eines Quotienten ändert sich nicht, wenn man Divisor und Dividenden mit einem und demselben (von Null verschiedenen) Ausdrucke multiplicirt, d. h. es ist

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{ac}$$

für jeden von Null verschiedenen Werth von c.

Da nämlich die Multiplikation mit 1 nichts an dem Werthe eines Ausdrucks ändert, und $1=c:c$ ist, so hat man

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c}=\frac{ac}{bc}.$$

Somit lässt sich jeder Quotient in einen anderen verwandeln, dessen Divisor ein Produkt aus dem alten Divisor und einem beliebig gegebenen von Null verschiedenen Ausdrucke ist.

§. 42. *Lehrsatz.* Der Werth eines Quotienten ändert sich nicht, wenn man Divisor und Dividend mit einem und demselben (von Null verschiedenen) Ausdrucke dividirt.

Bezeichnet man nämlich in der Gleichung des vorigen §. ac durch α, bc durch β, a durch $\alpha : c$, b durch $\beta : c$, so geht dieselbe über in

$$\frac{\alpha : c}{\beta : c} = \frac{\alpha}{\beta},$$

welche Gleichung in der That den Inhalt des vorstehenden Lehrsatzes ausspricht.

§. 43. *Umformung einer algebraischen Summe von Quotienten in einen Quotienten.* Haben die Glieder der algebraischen Summe gleiche Divisoren, so liefert schon die zweite Regel des §. 38 die Umformung. Sind die Divisoren von einander verschieden, wie z. B. in der Summe $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f} - \frac{g}{h}$, so multiplicire man den Divisor und den Dividenden eines jeden Gliedes mit dem Produkte der Divisoren der übrigen Glieder. Man erhält alsdann Quotienten, die nach §. 41 den gegebenen gleich sind, und die, weil sie gleiche Divisoren (nämlich das Produkt sämmtlicher Divisoren der gegebenen algebraischen Summe) zum Divisor haben, nach der zweiten Regel des §. 38 behandelt werden können. In unserem Beispiele gewinnt man auf diese Weise zuerst

$$\frac{adfh}{bdfh} - \frac{bcfh}{bdfh} + \frac{bdeh}{bdfh} - \frac{bdfg}{bdfh},$$

und dann

$$\frac{adfh - bcfh + bdeh - bdfg}{bdfh}.$$

Anmerkung. Sind die Divisoren der gegebenen algebraischen Summe Produkte, und kommt ein der der andere Ausdruck als Faktor in mehreren der Divisoren zugleich vor, so lässt sich bei der in Rede stehenden Umformung ein einfacherer Divisor erzielen. Man darf nur die Regel so umgestalten:

„Man multiplicire den Divisor und den Dividenden jedes Gliedes (statt mit dem Produkte aller Faktoren der übrigen Divisoren) bloss mit dem Produkte derjenigen Faktoren der übrigen Divisoren, welche in dem eigenen Divisor nicht enthalten sind und wende dann §. 38 an.“ Dass dabei die Glieder wiederum gleiche Divisoren bekommen, also noch die Anwendung der zweiten Regel des §. 38 gestatten, ist an sich klar.

Beispiel. $\frac{ab}{ccdefff} + \frac{cd}{aeeff} - \frac{ad}{bcccef}.$

Die Faktoren des zweiten Divisors, welche im ersten nicht vorkommen, sind das a und das zweite e; diejenigen des dritten Divisors, die im ersten nicht vorkommen, sind das b und das dritte c: so dass Divisor und Dividend des ersten Quotienten mit $aebc$ zu multipliciren ist und daher auf $\frac{eacbbc}{abcccdeefff}$ führt.

Die Faktoren des ersten und dritten Divisors, die im zweiten nicht vorkommen, sind $bcccdf$; die des ersten und zweiten Divisors, welche im dritten nicht vorkommen, sind endlich $adeff$. Es wird daher die erste Umformung:

$$\frac{aabbce}{abcccdefff}+\frac{bccccddf}{abcccdefff}-\frac{aaddeff}{abcccdefff},$$

welche nach §. 38 sich alsdann umwandelt in

$$\frac{aabbce+bccccddf-aaddeff}{abcccdefff}.$$

§. 44. *Zusatz.* Wie man auch Elemente durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit einander verbinden möge, immer kommt man auf einen Ausdruck, der sich auf die Form $\frac{A-B}{C-D}$ bringen lässt, unter A, B, C, D Summen von Produkten der Elemente verstanden.

Man bemerke zuerst, dass es möglich ist, schon jedes einfache Element durch einen Quotienten von der gedachten Form voszustellen, da man ja nur für ein Element a z. B. den gleichgeltenden Ausdruck $\frac{(a.1+0.b)-(0.c+0.d)}{(1.1+0.e)-(0.f+0.g)}$ setzen darf. Lassen sich daher jede zwei Ausdrücke von der Form $\frac{A-B}{C-D}$, nachdem man sie beliebig durch Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division mit einander verbunden hat, wiederum auf eben diese Form bringen, so muss dies auch mit der Verbindung von einfachen Elementen der Fall sein, wie man auch die Additionen, Subtraktionen etc. häufen möge. Dass aber mit den Verbindungen **zweier** Ausdrücke von jener Form wirklich diese Umgestaltung vorgenommen werden könne, zeigt augenblicklich der Versuch.

Sind nämlich die beiden Ausdrücke vorgestellt durch

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} \text{ und } \frac{\delta'-\beta'}{\gamma'-\delta'},$$

so erhält man bei der Addition und Subtraktion nach §. 43

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} \pm \frac{\alpha'-\beta'}{\gamma'-\delta'} = \frac{(\alpha-\beta)(\gamma'-\delta') \pm (\alpha'-\beta')(\gamma-\delta)}{(\gamma-\delta)(\gamma'-\delta')},$$

während hier Divisor und Dividend nach den Regeln des §. 40 und des §. 22 auf die vorgeschriebene Form gebracht werden können.

Bei der Multiplikation erhält man durch Anwendung der Gleichung (14) des §. 35.

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} \cdot \frac{\alpha'-\beta'}{\gamma'-\delta'} = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')}{(\gamma-\delta)(\gamma'-\delta')},$$

und bei der Division durch Anwendung der Gleichung (15) desselben §.,

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} : \frac{\alpha'-\beta'}{\gamma'-\delta'} = \frac{(\alpha-\beta)(\gamma'-\delta')}{(\gamma-\delta)(\alpha'-\beta')},$$

welche beide Ausdrücke nach §§. 40 und 22 die vorgeschriebene Form erhalten können.

Fünftes Kapitel.

Von der Multiplikation und Division der Zahlen.

A. Von den Produkten, in denen der eine Faktor eine Zahl ist.

§. 45. *Erklärung der ganzen Produkte und Begründung der für dieselben geltenden Gesetze.* Im vorigen Kapitel haben wir uns begnügt, die allgemeinen Produkte dadurch zu charakterisiren, dass wir allgemeine zwischen ihnen stattfindende Beziehungen angaben. In den Gleichungen (IV) und (V) stellten wir nämlich allgemeine Produkte anderen ebenso allgemeinen Produkten gleich, und in der Gleichung (VII) verglichen wir ein durch Addition und Multiplikation zusammengesetztes Zeichen mit einem ebenso allgemeinen durch Addition und Multiplikation zusammengesetzten Zeichen. — Hier fügen wir nun noch eine neue Bestimmung für diejenigen Produkte, in denen der eine Faktor eine (ganze) Zahl ist, hinzu, indem wir sie direkt auf eine frühere, ihren Eigenschaften nach also schon bekannte Verbindung — auf eine Summe — zurückführen, und ihnen mithin einen Werth (dies Wort im Sinne des §. 12 genommen) beilegen.

Wir geben nämlich hiermit einem aus den Faktoren a und b bestehenden Produkte, in welchem der eine, etwa a, ein allgemeines Zeichen, der andere, b, eine wirkliche Zahl ist (mag dies b der erste oder zweite Faktor sein) den Werth einer aus b a'en bestehenden allgemeinen Summe, und unterscheiden ein solches von den allgemeineren Produkten des vorigen Kapitels durch den Namen: ganzes Produkt.*)

*) Die Benennung ganzes Produkt ist der allgemein üblichen Benennung der ganzen Potenz (für Potenzen, deren Exponent eine ganze Zahl ist) nachgebildet.

Die früheren Bestimmungen über das Produkt widersprechen nicht nur nicht dieser jetzt hinzutretenden neuen Bestimmung, sondern sie sind vielmehr zumeist eine nothwendige Folge der letzteren, so dass sie, mit Ausnahme der Gleichung (VI) für die ganzen Produkte nicht mehr als Grundsätze, sondern als Lehrsätze erscheinen.

Um dies zu zeigen, gehen wir zuerst die Grundsätze des §. 31 und dann die Grundgleichungen (IV—VII) durch.

Was die Grundsätze des §. 31 betrifft, so bleibt der erste, welcher die Eindeutigkeit der Produkte verlangt, gültig, weil der Werth, welcher dem ganzen Produkte zugeschrieben worden ist, der Werth einer allgemeinen Summe, folglich etwas Eindeutiges ist. Der zweite Grundsatz verlangt, dass ac und bc von einander verschieden seien, so oft weder $a = b$ noch $c = 0$ ist. Nehmen wir nun die Zahl b um d Einheiten grösser als a an, so darf (weil dann ac eine Summe von a c'en und bc eine Summe vorstellt, welche d c'en mehr enthält als ac) das Produkt bc auch durch die allgemeine Summe $ac + dc$ bezeichnet werden, und kann also nach §. 24 nicht gleich ac sein, wenn nicht $dc = 0$ ist. Da aber c von Null verschieden vorausgesetzt ist, und d eine Zahl, also gleichfalls etwas von Null Verschiedenes ist, so ist dc nicht Null, und mithin auch nicht $ac = bc$.

Was die Gleichung (IV) angeht, so ist dieselbe durch die Erklärung des ganzen Produkts selbst schon als richtig hingestellt; denn indem wir unter dem Produkte aus a und b die Summe von b a'en dachten, mochte die Zahl b erster oder zweiter Faktor sein, durften wir dasselbe sowohl durch ab als durch ba vorstellen.

Die Richtigkeit der Gleichung (V), nämlich der Gleichung $(ab)c = (ac)b$, wo wir a als allgemeines Zeichen, b und c gleichzeitig als Zahlen zu denken haben (weil sonst entweder ab oder ac nicht mehr ein ganzes Produkt wäre), erkennen wir, wenn wir zuerst die dem Produkte ab gleiche Summe bilden, und diese Summe cmal unter einander setzen, wie im folgenden Schema

$$\begin{array}{l} a + a + a + a + \;.\;\;.\;\;. + a \\ a + a + a + a + \;.\;\;.\;\;. + a \\ a + a + a + a + \;.\;\;.\;\;. + a \\ .\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ .\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ a + a + a + a + \;.\;\;.\;\;. + a \end{array}$$

angedeutet ist. Man sieht dann, da jede horizontale Zeile den Werth ab hat, und c solcher Zeilen sind, dass die Summe sämmtlicher Zeilen, den Werth von $(ab)c$ hat. Anderseits hat jede der Summen, die man erhält, wenn man die unter einander stehenden ersten a'en, die untereinander stehenden zweiten a'en, die untereinander stehenden dritten a'en etc. für sich addirt, den Werth von ac, weil überall c der a'en untereinander stehen, und es ist folglich die Summe aller dieser Summen, da ihrer b sind, gleich $(ac)b$ Es reducirt sich sonach sowohl das $(ab)c$ als das $(ac)b$ auf eine Addition sämmtlicher a'en des Schemas, nur das einemal in einer anderen Ordnung als das zweitemal, während wir wissen, dass die Ordnung des Addirens den Werth einer allgemeinen Summe nicht ändert.

Die Richtigkeit der Gleichung (VII), nämlich der Gleichung $(a+b)c=ac+bc$, in der wir zuerst c als Zahl und a und b als allgemeine Zeichen denken wollen, erkennt man, wenn man die dem Produkte bc gleiche Summe unter die dem Produkte ac gleiche Summe setzt, wie in folgendem Schema

$$a+a+a+a+\ldots+a$$
$$b+b+b+b+\ldots+b$$

in welchem also jede Zeile c Glieder enthält. Es ist dann $ac+bc$ der Summe beider Zeilen, und mithin der Summe aller Glieder des Schemas gleich. Verbindet man, da die Ordnung des Addirens gleichgültig ist, zuerst das erste a mit dem ersten b, dann das zweite a mit dem zweiten b, etc., so erhält man die Summe $a+b$, cmal, und sieht demnach, dass die Summe sämmtlicher Glieder des Schemas auch durch $(a+b)c$ ausgedrückt werden kann, dass also in der That $ac+bc=(a+b)c$ ist.

Dass die Gleichung $(a+b)c=ac+bc$ richtig bleibt, wenn man nicht den Faktor c, sondern die Faktoren a und b als Zahlen denkt, bedarf gar keiner Erläuterung, da dann beide Seiten der Gleichung eine Summe von gleich vielen a'en, nämlich von $b+c$ a'en vorstellen.

Die Gleichung (VI) endlich, nämlich $(a:b)b=a$ erfordert keinen Nachweis, da wenn man das b als Zahl denkt, die Erklärung des ganzen Produkts uns nicht befähigt, die dem Produkte $(a:b)b$ gleiche Summe mit dem allgemeinen Zeichen a zu vergleichen, also auch nicht, aus ihr etwas dieser Gleichung Widersprechendes abzulei-

ten. Wir genügen derselben, wenn wir uns vornehmen, $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$ mit a, ebenso $\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}$ mit a, $\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a}{4}$ mit a, etc. als gleichwerthig zu behandeln.

Auf Grund dieser Uebereinstimmung in den Gesetzen der ganzen Produkte und der allgemeinen Produkte des vorigen Kapitels dürfen wir überall, wo mit allgemeinen Zeichen nach den Regeln des 2ten und 4ten Kapitels gerechnet wird, wenn ganze Zahlen als Faktoren vorkommen, die Produkte auch als Summen ansehen, und dann namentlich auch umgekehrt, z. B. $a+a+a$ mit $3a$ oder mit $2a+a$; $5a+6a$ mit $11a$; $\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}$ mit a; etc. verwechseln, — wozu die früheren Kapitel uns noch nicht berechtigt hatten.

B. Von den Zahlenprodukten und Zahlenquotienten.

§. 46. *Gesetze der Multiplikation und Division der Zahlen.* Da wir nach §. 3 unter dem Produkte ab zweier Zahlen a und b eine Summe von b a'en verstehen, so gilt für die Zahlenprodukte alles, was aus der gleichlautenden Erklärung der ganzen Produkte abgeleitet worden ist, namentlich das Bestehenbleiben der beiden Grundsätze des §. 31, und der Gleichungen (V) und (VII), deren Erörterungen hier noch wörtlich passen.

Lässt sich daher noch die Richtigkeit der Gleichungen (IV) u. (VI) nachweisen, so müssen für die Multiplikation und Division der Zahlen dieselben Gesetze gelten, wie für die Multiplikation und Division allgemeiner Zeichen. Man erkennt aber sogleich (die Gleichung (IV) anlangend), dass $bc=cb$ ist, wenn man sich das Schema, welches im vorigen §. bei Gelegenheit der Gleichung (V) benutzt wurde, bildet und unter den a'en sich Einheiten denkt; während die Gleichung (VI) unbedingt aufgenommen werden kann, weil sie, wenn a und b Zahlen sind, mit der Definitionsgleichung der Zahlenquotienten (§. 6) zusammenfällt.

§ 47. *Erklärung der Brüche und der absoluten rationalen Zahlen.* Sind a und b Zahlen, so ist natürlich auch ab einer Zahl gleich; der Quotient $a:b$ dagegen nur dann, wenn a ein Vielfa-

ches von b ist. Wenn a kein Vielfaches von b ist, nennt man den Quotienten $a:b$ einen Bruch oder eine gebrochene Zahl, und zwar eine echt- oder eine unecht-gebrochene Zahl, je nachdem a kleiner oder grösser als b ist. Der Divid end eines Bruches heisst gewöhnlich der Zähler, der Divisor der Nenner des Bruches.

Die Brüche und die wirklichen (ganzen) Zahlen führen den gemeinsamen Namen: absolute rationale Zahlen.

§. 48. *Allgemeine Anwendbarkeit der Multiplikations- und Divisionsgesetze.* Der §. 46 berechtigt uns zunächst nur, die allgemeinen Multiplikations- und Divisionsgesetze auf Zahlen anzuwenden, wenn die verschiedenen Produkte und Quotienten Zahlenprodukte und Zahlenquotienten sind, d. h. einen (ganzen) Zahlenwerth haben, also namentlich nicht, wenn z. B. die Quotienten Brüche, oder die Glieder der Produkte und Quotienten negative Zahlen, Brüche und dergleichen sind. Wir haben indess gesehen, dass die Gültigkeit jener Gesetze nicht lediglich von der Natur der Zahlenprodukte und Zahlenquotienten abhängt, sondern dass sie auch bestehen bleibt, so oft wir den Produkt- und Quotienten-Formen diejenigen Eigenschaften der Zahlenprodukte und Zahlenquotienten, welche sich in den Grundsätzen des §. 31 und in den Gleichungen (IV—VII) aussprechen, beilegen, und dass die Ertheilung dieser Eigenschaften nur dann zu Widersprüchen führen kann, wenn man die Null als Divisor zulässt oder wenn man Produkten den Werth Null gestattet, in denen kein Faktor gleich Null ist. Wenn wir daher hiermit diese Eigenschaften unter der angeführten Beschränkung für alle irgend wie vorkommenden Produkt- und Quotientenformen aufnehmen, wenn wir also z. B. (auf Grund der in der Gleichung (IV) ausgesprochenen Eigenschaft) die Form $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}$ als gleichgeltend mit $\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}$, die Form $(-3)\cdot(-4)$ als gleichgeltend mit $(-4)\cdot(-3)$ voraussetzen, ferner zufolge der Gleichung (VI) z. B. $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ als ein Zeichen für die Zahl 2 ansehen etc.: so kann die Anwendung der allgemeinen Multiplikations- und Divisionsgesetze weder auf etwas führen, was diesen Annahmen, noch auf etwas, was dem Begriffe der Zahl widerspricht, d. h. es ist alsdann ein unrichtiges Resultat unmöglich.

Umgekehrt konnte man sich auch so ausdrücken: Da zufolge des §. 46 Zahlenprodukte und Zahlenquotienten, so lange sie als solche eine Bedeutung haben, nothwendig den Gesetzen der allgemeinen Produkte und Quotienten unterworfen sind, so darf man beim Rechnen mit allgemeinen Zeichen mit den etwa darin vorkommenden Ziffernprodukten und Ziffernquotienten auch den Sinn von Zahlenprodukten und Zahlenquotienten verbinden, so oft sie eines solchen fähig sind (so oft also z. B. in den Quotienten die Dividenden Vielfache des Divisors sind), ohne auf ein den Grundlagen des allgemeinen Rechnens widersprechendes Resultat zu kommen. Man wird daher auch namentlich den Resultaten, so oft sie eines Zahlensinnes fähig sind, diesen Sinn unterlegen dürfen, und wenn z. B. das Resultat ein Bruch, etwa $\frac{2}{3}$ ist, so wird man sich freilich keine Zahl dabei denken können, aber doch, wenn man dessenungeachtet einen Sinn damit verbinden will, auch nichts darunter denken dürfen, was der Gleichung $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2$ (s. §. 45) widerspricht. Sollte demnach das Resultat auf theilbare Grössen bezogen werden, so müsste man sich gerade so viel von denselben darunter denken, dass das Dreifache davon 2 ganze Einheiten bilden könnte.*)

§. 49. *Bedeutung der allgemeinen Eins.* Da, wenn a eine Zahl ist, $1 \cdot a$ als Zahlenprodukt eine Summe von a Einheiten, und mithin der Zahl a selber gleich ist, während $\mathrm{I} \cdot a$ als allgemeines Produkt gleichfalls den Werth a hat, so darf man nach dem §. 48, welcher allgemeine Gleichungen mit Zahlengleichungen zu combiniren erlaubt, $1 \cdot a = \mathrm{I} \cdot a$ setzen, und muss daher nach dem zweiten Grund-

*) Dass wir die Brüche nicht als Theile vom Ganzen definiren, sondern ihre Bedeutung als ein nothwendiges Ergebniss der Verallgemeinerung der Rechnungsregeln hinstellen, hat den Vortheil, dass wir nicht nöthig haben, alle für ganze Zahlen entwickelten Regeln nachträglich noch für Brüche besonders zu beweisen, und dass wir die Bruchrechnung, die doch nur eine Wiederholung der Quotientenrechnung sein müsste, ganz entbehren können. Ueberdies wendet man bei der Erklärung der Brüche als Einheitstheile, der unbestimmten Einheit die Eigenschaft der Theilbarkeit a l l g e m e i n zu, die ihr im b e s o n d e r n nicht überall zukommt, und muss also dennoch Bruchresultate zuweilen als unbrauchbar verwerfen. Siehe Einl. pag. 9 ff.

satze des §. 31. $1 = \mathrm{I}$ annehmen, d. h. man muss da, wo man beim allgemeinen Multipliciren und Dividiren auf Grund der im vorigen §. begründeten Erlaubniss, die vorkommenden Ziffernprodukte resp. als ganze oder als Zahlenprodukte ansieht, unter der allgemeinen Eins die Zahleinheit denken. Demzufolge werden wir in Zukunft uns meist des Zeichens 1 statt des Zeichens I bedienen.

Folgerung. Aus der Gleichung (9) des §. 34 erhält man, $b = 1$ setzend,

$$\frac{a \cdot 1}{c} = a \cdot \frac{1}{c},$$

also wegen $a \cdot 1 = a$

$$\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}.$$

Man kann also alle Brüche auf ein ganzes Produkt zurückführen, dessen allgemeiner Faktor ein Bruch mit dem Zähler 1 ist. Erscheint daher ein Bruch $a:c$ als Resultat in Aufgaben, wo es sich um theilbare Grössen handelt, so hat man darunter das *a*fache des *c*ten Theils der Grösseneinheit zu denken.

§. 50. *Umformung der Produkte und Quotienten positiver und negativer Zahlen in positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen.* Nennt man den subtraktiven Ausdruck $-a$, so oft a ein Bruch ist, eine negativ gebrochene Zahl, und a ihren numerischen Werth, so lauten die Resultate des §. 39, wenn man sich unter b und c Zahlen denkt, wie folgt:

Die Produkte und Quotienten zweier positiven, so wie zweier negativen Zahlen sind resp. gleich dem Produkte oder Quotienten der numerischen Werthe derselben (also jederzeit ganzen oder gebrochenen Zahlen gleich); und die Produkte und Quotienten aus einer positiven und einer negativen Zahl sind einer negativen (ganzen oder gebrochenen) Zahl gleich, deren numerischer Werth resp. das Produkt oder der Quotient der numerischen Werthe der gegebenen Zahlen ist.

Die in §. 39 gefundene Regel für Produkte von mehr als zwei additiven und subtraktiven Faktoren heisst hier nun, wenn die hinter dem Vorzeichen stehenden Glieder ganze oder gebrochene Zahlen sind: Ein Produkt positiver und negativer (ganzer oder gebrochener) Zahlen ist einer positiven oder negativen

(ganzen oder gebrochenen) Zahl gleich, je nachdem die Anzahl der negativen Faktoren eine gerade oder ungerade ist.

§. 51. *Erklärung der reellen rationalen Zahlen.* Jede Verbindung von Zahlen, die auf erlaubte Weise (d. h. unter Vermeidung aller Divisionen durch Null) durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division hergestellt ist, nennt man eine reelle Zahl. Da nun solche Verbindungen, insofern wir hier nur Zahlenelemente voraussetzen, nach §. 44 allemal auf die Form eines Quotienten gebracht werden können, dessen Glieder Differenzen reiner Summen von Zahlenprodukten sind, Zahlenprodukte aber, und mithin auch reine Summen von Zahlenprodukten, jedesmal wiederum einen wirklichen Zahlenwerth haben, so lassen sich alle reelle rationale Zahlen auf die Form eines Quotienten von Differenzen ganzer Zahlen bringen, während Differenzen wirklicher Zahlen wiederum nach §. 28 nur entweder den Werth einer wirklichen Zahl, oder den Werth Null oder den Werth einer negativen (ganzen) Zahl haben können. Ist nun Divisor und Dividend von Null verschieden, so ist nach §. 50 solcher Quotient allemal entweder eine positive oder eine negative, ganze oder gebrochene Zahl. Ist der Dividend gleich Null, so ist der Werth des Quotienten nach §. (39) der Null gleich. Da ferner der Fall, dass der Divisor Null ist, von vorn herein ausgeschlossen wurde, so gehören in das Gebiet der rationalen reellen Zahlen nichts weiter als 1) die positiven ganzen Zahlen (die mit den wirklichen Zahlen ihrem Werthe nach zusammenfallen), 2) die negativen ganzen Zahlen, 3) die positiven gebrochenen Zahlen (die mit den Brüchen ihrem Werthe nach zusammenfallen), 4) die negativen gebrochenen Zahlen, und 5) die Null.

§. 52. *Vom Grösseren und Kleineren.* Von zwei reellen Zahlen a und b nennt man a die algebraisch grössere, sobald $a-b$ einer positiven reellen Zahl gleich ist, und mithin die algebraisch kleinere, wenn $a-b$ einer negativen ganzen oder gebrochenen Zahl gleich ist. — Dass a grösser als b ist, drückt man durch die Formel $a>b$; dass a kleiner als b ist, durch die Formel $a<b$ aus.

Aus dieser Erklärung lassen sich leicht folgende Sätze herleiten.

1. Sind a und b negativ, und ist $a=-\alpha$, $b=-\beta$, wo α

und β die numerischen Werthe von a und b sind, so ist wegen $a-b=\beta-\alpha$, $a-b$ positiv, d. h. $a>b$, sobald $\beta>\alpha$ ist, und $a-b$ negativ, d. h. $a<b$, sobald $\beta<\alpha$ ist. Es ist demnach von zwei negativen reellen Zahlen diejenige die grössere, welche den kleineren numerischen Werth hat.

2. Ist $a>c$, und m reell und von Null verschieden, so ist am und $\frac{a}{m}$ grösser oder kleiner als resp. cm und $\frac{c}{m}$, je nachdem m positiv oder negativ ist. — Der Erklärung gemäss ist nämlich am grösser oder kleiner als cm, je nachdem $am-cm$ positiv oder negativ ist. Nun ist aber $am-cm=(a-c)m$, während, da $a>c$ also $a-c$ als positiv vorausgesetzt wurde, $(a-c)m$ positiv oder negativ ist, je nachdem m positiv oder negativ ist; mithin ist $am>cm$ bei positivem m, $am<cm$ bei negativem m. Ebenso ist es mit $\frac{a}{m}-\frac{c}{m}$, welches, insofern es $=\frac{a-c}{m}$, und $a-c$ positiv ist, einen positiven oder negativen Werth hat, je nachdem m positiv oder negativ ist.

3. Von zwei positiven Brüchen mit gleichen Nennern ist derjenige der grössere, der den grösseren Zähler hat; von zwei Brüchen mit gleichen Zählern dagegen derjenige, welcher den kleineren Nenner hat. — Das Erste folgt aus dem eben bewiesenen zweiten Satze; das Zweite daraus, dass

$$\frac{m}{a}-\frac{m}{c}=\frac{mc-ma}{ac}=\frac{m(c-a)}{ac}=+\frac{m}{ac}(c-a)$$

ist, und daher, weil a, c, m wirkliche Zahlen sind und demnach $+\frac{m}{ac}$ positiv ist, $\frac{m}{a}-\frac{m}{c}$ positiv oder negativ sein muss, je nachdem $c-a$ positiv oder negativ, d. h. je nachdem $c>a$ oder $c<a$ ist.

4. Die echten Brüche sind kleiner als 1, die unechten grösser als 1. Ist nämlich $\frac{a}{m}$ ein echter Bruch, also $a<m$, so folgt nach dem zweiten Satze, indem man die Ungleichung $a<m$ durch m dividirt, $\frac{a}{m}<\frac{m}{m}$ d. h. $\frac{a}{m}<1$. — Ist dagegen $\frac{a}{m}$ ein unechter Bruch, so ist $a>m$, also $\frac{a}{m}>\frac{m}{m}$, d. h. $\frac{a}{m}>1$.

5. Ist $a>c$ und $c>d$, so ist auch $a>d$; denn da $a>c$ und $c>d$ ist, so sind $a-c$ und $c-d$ positiv; mithin hat auch

$(a-c)+(c-d)$, d. h. $a-d$ einen positiven Werth, oder, was dasselbe ist, es ist $a>d$.

6. Ist $a>c$ und $b>d$, während a, b, c, d sämmtlich positiv sind, so ist auch $ab>cd$. — Mit Hülfe des zweiten Satzes lässt sich nämlich aus $a>c$ schliessen, dass $ab>cb$, und aus $b>d$, dass $bc>dc$ ist. Weil aber $ab>cb$ und $cb>dc$ ist, so folgt aus dem 5ten Satze auch, dass $ab>dc$ ist.

7. Sind a und b positiv und dabei grösser als 1, so ist ab zugleich grösser als a und als b. — Es folgt nämlich aus Nr. 2, wenn man die Ungleichung $a>1$ mit b multiplicirt, $ab>b$, und wenn man die Ungleichung $b>1$ mit a multiplicirt, $ab>a$.

8. Sind a und b zwei echte Brüche, also positiv und kleiner als 1, so ist ihr Produkt ab zugleich kleiner als a und kleiner als b; denn aus $a<1$ und $b<1$ folgt, indem man resp. mit b und a multiplicirt, $ab<b$ und $ab<a$.

9. Denkt man sich in Nr. 7, $b=a$, so erhält man: $aa>a$, und dies von neuem mit a multiplicirend, nach Nr. 2, $aaa>aa$, hieraus wiederum $aaaa>aaa$, etc., mithin ist $a<aa<aaa<aaaa$ etc., so oft $a>1$ ist.

Ebenso folgt aus Nr. 8, $b=a$ setzend, $aa<a$, und durch wiederholte Multiplikation mit a nach und nach: $aaa<aa$, $aaaa<aaa$, etc. Es ist also, wenn a ein echter Bruch ist, $a>aa>aaa>aaaa$ etc.

Bezeichnet man ein Produkt von m a'en durch a^m, so lassen sich diese Resultate so ausdrücken: Wenn $a>1$ und $m>n$ ist, so ist $a^m>a^n$; wenn $a<1$ und $m<n$ ist, so ist $a^m>a^n$.

10. Sind a und c positiv, und ist dabei $a>c$, so folgt aus Nr. 6, $b=a$ und $d=c$ setzend, $aa>cc$; ferner $b=aa$, $d=cc$ setzend, $aaa>ccc$; dann $b=aaa$, $d=ccc$ setzend, $aaaa>cccc$; etc., und allgemein, wenn man die Bezeichnung der (Nr. 9) anwendet, $a^m>c^m$.

Anhang zum fünften Kapitel.

Von der Theilbarkeit der Zahlen.

1. *Erklärungen.* Eine (ganze) Zahl a heisst „durch eine andere, b, theilbar", wenn $a:b$ wiederum eine (ganze) Zahl, also $a:b$ ein Zahlenquotient ist. Nennt man diese dem Quotienten gleiche Zahl z, d. h. ist $b.z = a$, so sagt man, wenn für a das gleichgeltende Produkt $b.z$ geschrieben wird, man habe a in die Faktoren b und z zerlegt. Die Zahlen b und z heissen dabei Theiler von a.

Da $a:1 = a$ ist, so ist jede Zahl a durch 1 theilbar.

Ist die Zahl a durch keine andere Zahl, als durch sich selbst und durch 1 theilbar, so nennt man dieselbe eine Primzahl.

Die kleinsten Primzahlen sind (die Eins abgerechnet) der Reihe nach folgende: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, etc.

Wenn die Zahl a keinen Theiler hat, der zugleich ein Theiler der Zahl b wäre, so sagt man, a und b seien relative Primzahlen zu einander.

2. *Lehrsatz.* Ist eine Zahl A durch eine andere p theilbar, ist also, wenn A das zfache von p ist, $A = pz$, so lässt sich, wenn p keine Primzahl ist, also wiederum Theiler besitzt, A auch durch die Theiler von p theilen.

Ist nämlich p dem Produkte der (ganzen) Zahlen q und r gleich, so ist, wegen $A = pz$ auch $A = qrz$, mithin $A:q = rz$ und $A:r = qz$, also A (weil rz und qz ganzen Zahlen gleich sind) durch die Theiler q und r der Zahl p theilbar. Ebenso ist klar, wenn p einem Produkte von mehr als zwei ganzen Zahlen, etwa dem Produkte $q.r.s.t\ldots$ gleich ist, dass auch A diese Zahlen $q, r, s, t, \ldots$ zu Theilern haben muss.

3. *Lehrsatz.* Jede Zahl A, die keine Primzahl ist, lässt sich durch ein Produkt von Primzahlen vorstellen.

Diese Primzahlen nennt man die Primfaktoren von A.

Beweis. Man bemerke, dass die ersten Zahlen der Zah-

lenreihe nothwendig Primzahlen sind. (Wie man aus dem obigen Verzeichniss sieht, sind dies die Zahlen 1, 2 und 3). Ist nun a die kleinste Nicht-Primzahl, so können ihre Theiler, da sie nothwendig kleiner als a sein müssen, nur Primzahlen sein. Ist ferner b die nächst grössere Nicht-Primzahl, so ist, weil ihre Theiler kleiner als b sein müssen, und die kleineren Zahlen bis auf a sämmtlich Primzahlen sind, während a selber ein Produkt von Primzahlen ist, — auch b nothwendig ein Produkt von Primzahlen. Ebenso ist es mit der auf b zunächst folgenden Nicht-Primzahl c, deren Theiler nur die vorangegangenen Primzahlen oder die in Primfaktoren zerlegbaren Zahlen a und b sein können, u. s. w.

4. Will man die Zerlegung in Primfaktoren an irgend einer Zahl A ausführen, so ermittle man zuerst die kleinste Primzahl, durch welche die Zahl sich theilen lässt (indem man nach und nach mit den Zahlen 2, 3, 5, 7, 11 etc. die Theilung versucht). Ist a dieser kleinste Theiler, und $A = aB$, so suche man jetzt ebenso den kleinsten Primfaktor von B. Ist dies etwa die Zahl b und $B = b.C$, so dass man $A = abC$ hat, so wird von neuem der kleinste Primfaktor von C gesucht, etc. bis man zuletzt auf ein Produkt von zwei Primzahlen, etwa auf $g.h$ kommt. Man hat alsdann $A = a.b \ldots\ldots g.h$. Der Vortheil, den man dadurch gewinnt, dass man immer nur den kleinsten Primfaktor aufsucht, ist der, dass man bei jeder neuen Theiler-Aufsuchung die Versuche mit denjenigen Primzahlen übergehen kann, die kleiner sind, als der zuletzt gefundene Primfaktor. Denn sind A, B, C, D, E, F, etc. die Zahlen, aus denen nach und nach die kleinsten Primfaktoren gesucht werden müssen, so kann z. B. F keinen Primfaktor haben, der kleiner ist als der kleinste Theiler von E, weil die Theiler von F gleichzeitig sämmtlich auch Theiler von E sind.

Ist z. B. die zu zerlegende Zahl 3900, so zeigt schon der Versuch mit der ersten Primzahl 2, dass dieselbe zu den Theilern gehört, indem sich $3900 = 2.1950$ findet. Für 1950 ist wiederum 2 der kleinste Theiler, und man hat $3900 = 2.2.975$. Für 975 findet sich nicht mehr die 2, wohl aber die folgende Primzahl 3 als Theiler; es ist nämlich $975 = 3.325$, also $3900 = 2.2.3.325$. Für 325 erweist sich 5 als kleinster Faktor, indem man auf $325 = 5.65$ kommt, während 65 wiederum gleich 5.13 ist. Es ist demnach $3900 = 2.2.3.5.5.13$ die gesuchte Zerlegung.

Zusatz. Hat A den Primfaktor a, αmal, den Primfaktor b, βmal, den Primfaktor c, γmal, so wird $A = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots$, und es lässt sich daher jede theilbare Zahl auf die Form eines Produkts von Zahlenpotenzen bringen, deren Dignanden sämmtlich von einander verschiedene Primzahlen sind.

5. Sind die Zahlen a und b beide durch dieselbe Zahl z theilbar, so ist auch ihre Summe und Differenz durch z theilbar.

Denn wenn $a = mz$, $b = nz$ ist, so hat man $a + b = mz + nz = (m+n)z$, und, wenn a die grössere der beiden Zahlen a und b ist, $a - b = mz - nz = (m-n)z$; während $m+n$ und $m-n$ als Summen und Differenzen ganzer Zahlen selber wieder ganze Zahlen sind, so dass in der That $a+b$ die Theiler z und $m+n$, $a-b$ die Theiler z und $m-n$ hat.

6. Sind a und b zwei Zahlen, von denen a durch die Zahl z theilbar ist, so ist auch das Produkt ab durch z theilbar.

Dieser Satz ist schon in dem Satze (Nr. 2) enthalten.

7. Ist die Zahl a nicht durch die Zahl b theilbar, befindet sich also a nicht unter den Zahlen

$$1.b,\ 2.b,\ 3.b,\ 4.b,\ \ldots g.b,\ (g+1)b, \ldots,$$

von denen jede um b Einheiten grösser ist, als die vorhergehende, so muss doch, wie gross auch a sein mag, beim Fortschreiten in dieser Reihe endlich eine Zahl kommen, die grösser als a ist. Wenn nun $(g+1)b$ die kleinste jener Zahlen ist, welche a an Grösse übertrifft, d. h. wenn $gb < a$, aber $(g+1)b > a$ ist, so sagt man, g sei die grösste im Bruche $a:b$ enthaltene ganze Zahl, und nennt die Zahl, um welche a grösser als bg ist, d. h. die Zahl $a - bg$, den Rest von $a:b$. Bezeichnet man diesen Rest durch r, so erhält man, die Gl. $a - bg = r$ durch b dividirend,

$$\frac{a}{b} - g = \frac{r}{b} \text{ oder } \frac{a}{b} = g + \frac{r}{b},$$

wo $\frac{r}{b}$ ein echter Bruch ist.

8. *Lehrsatz.* Hat keine der Zahlen a und c mit der Zahl b einen Theiler gemein, so ist auch das Produkt ac durch keinen Theiler von b theilbar.

Beweis: Ist g die grösste in $a:b$ enthaltene ganze Zahl und r der Rest, so hat man

$$1) \qquad \frac{a}{b} = g + \frac{r}{b}.$$

Ist ferner b nicht durch r theilbar, so ist

2) $$\frac{b}{r} = g_1 + \frac{r_1}{r}.$$

unter g_1 die grösste in $b : r$ enthaltene ganze Zahl und unter r_1 den Rest verstanden. Sollte nun wiederum r nicht durch r_1 theilbar sein, so kann man

3) $$\frac{r}{r_1} = g_2 + \frac{r_2}{r_1}$$

setzen, wo g_2 die grösste in $r : r_1$ enthaltene ganze Zahl und r_2 den Rest vorstellt. Fährt man so fort die Gleichungen

4) $$\frac{r_1}{r_2} = g_3 + \frac{r_3}{r_2}, \quad \frac{r_2}{r_3} = g_4 + \frac{r_4}{r_3}, \quad \frac{r_3}{r_4} = g_5 + \frac{r_5}{r_4} \text{ etc.}$$

zu bilden, in denen g_3, g_4, g_5, etc. die grössten in den unechten Brüchen $r_1 : r_2$, $r_2 : r_3$, $r_3 : r_4$, etc. enthaltenen ganzen Zahlen, und r_3, r_4, r_5, etc. die zugehörigen Reste bezeichnen: so muss man endlich auf einen Rest kommen, der ein Theiler des vorhergehenden ist, weil die Reste fortwährend abnehmende ganze Zahlen sind und im ungünstigsten Falle doch auf 1 herabsinken müssen, welche Zahl gewiss ein Theiler des vorangehenden Restes ist. Es sei nun r_n jener Rest, welcher ein Theiler des vorhergehenden Restes r_{n-1} ist. Alsdann schliesst die Reihe jener Gleichungen mit den Gleichungen

5) $$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = g_n + \frac{r_n}{r_{n-1}}, \quad \text{und} \quad 6) \quad \frac{r_{n-1}}{r_n} = g_{n+1}$$

ab, und man hat überdies (s. Nr. 7)

7) $r = a - bg$, 8) $r_1 = b - rg_1$, 9) $r_2 = r - r_1 g_2$, ...

10) $r_{n-2} = r_{n-4} - r_{n-3} g_{n-2}$, 11) $r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2} g_{n-1}$

12) $$r_n = r_{n-2} - r_{n-1} g_n,$$

während die Gleichung (6) giebt:

13) $$r_{n-1} = r_n \, g_{n+1}.$$

Hätten nun die Zahlen a und b einen Theiler z mit einander gemein, so müsste nach N° 5, auch $a - bg$, d. h. (da nach Gl. (7) $a - bg = r$ ist) auch r diesen Theiler z haben. Demnach müsste, weil nun r und b denselben Theiler hätten, auch $b - rg_1$, folglich, da nach Gl. (8), $b - rg_1 = r_1$ ist, auch r_1 den Theiler z haben. Hat aber r und r_1 den Theiler z, so ist auch $r - r_1 g_2$, d. h. (da nach Gl. (9) $r - r_1 g_2 = r_2$ ist) r_2 durch z theilbar, etc. Es ist also ersichtlich, dass jeder gemeinsame Theiler von a und b auch ein Theiler sämmtlicher Reste r, r_1, r_2, ... r_{n-1}, r_n sein muss. Zugleich ist klar, dass

ein solcher Theiler nicht grösser als die kleinste dieser Zahlen, d. h. nicht grösser als r_n sein kann.

Ferner folgt aus den vorstehenden Gleichungen, dass r_n selbst in der That ein Theiler von a und b ist. Um dies einzusehen, addire man auf jeder Seite der Gll. (7—12) den Subtrahenden des zur Rechten stehenden Ausdrucks, um die Gleichungen

7′) $a = r + bg$ 8′) $b = r^1 + rg_1$, 9′) $r = r_2 + r_1 g_2, \ldots$

10′) $r_{n-4} = r_{n-2} + r_{n-3} g_{n-2}$, 11′) $r_{n-3} = r_{n-1} + r_{n-2} g_{n-1}$,

12′) $r_{n-2} = r_n + r_{n-1} g_n$

zu gewinnen. Dass nun r_n ein Theiler von r_{n-1} ist, zeigt die Gleichung (13); dass r_n ein Theiler von r_{n-2} ist, zeigt die Gleichung (12′), weil beide Glieder der Summe $r_n + r_{n-1} g_n$ (s. No. 5,) durch r_n theilbar sind; dass r_n ein Theiler von r_{n-3} ist, folgt aus der Gl. (11′), insofern beide Glieder der Summe $r_{n-1} + r_{n-2}\, g_{n-1}$ den Theiler r_n haben, etc.; sonach haben sämmtliche Reste, und deswegen nach Gl. (8′) auch b, und nach Gl. (7′) auch a den Theiler r_n. Da wir überdies gesehen haben, dass a und b keinen Theiler haben können, der $> r_n$ ist, so ist r_n der grösste gemeinsame Theiler von a und b.

Der Voraussetzung nach haben aber a und b keine Theiler gemein, mithin muss $r_n = 1$ sein.

Multiplicirt man jetzt die Gll. (7—13) mit c, so erhält man

α) $rc = ac - bcg_1$, β) $r_1 c = bc - rcg_1$, γ) $r_2 c = rc - r_1 cg_2, \ldots$

μ) $r_n c = r_{n-2} c - r_{n-1} cg_n$, ν) $r_{n-1} c = r_n cg_{n+1}$;

und wenn man auf diese Gleichungen dieselbe Schlussweise anwendet, wie vorher auf (7—13), so ergibt sich, dass ac und bc keinen gemeinsamen Theiler haben können, der nicht zugleich die Zahl $r_n c$ oder (da $r_n = 1$ ist) die Zahl c theilte. Hätten nun ac und b einen Theiler z gemein, so müssten, da offenbar auch bc durch alle Theiler von b getheilt werden kann, ac und bc diesen Theiler z gemeinschaftlich haben. Da wir nun erkannt haben, dass alle Theiler von ac und bc zugleich Theiler von c sein müssen, so würde folgen, dass ac und b keinen Theiler haben können, der nicht auch c theilte. Der Voraussetzung nach haben aber b und c keinen gemeinsamen Theiler, folglich können auch ac und b nicht durch einerlei Zahl theilbar sein, q. e. d.

9. *Zusatz.* Aus den Schlüssen, die wir in No. 8. aus den Gll. (7—13) gezogen haben, geht ein einfaches Verfahren hervor,

den grössten gemeinsamen Theiler zweier Zahlen a und b zu finden. Ist nämlich a die grössere der beiden Zahlen, so bildet man zuerst den zum Bruche $a:b$ gehörigen Rest r, dann den zum Quotienten $b:r$ gehörenden Rest r_1, dann den zum Quotienten $r:r_1$ gehörenden Rest r_2, etc. bis man auf einen Rest r_n kommt, der ein Theiler des vorhergehenden Restes r_{n-1} ist. Es ist alsdann r_n der gesuchte grösste Theiler.

10. *Zusatz.* Aus N° 8 folgt zugleich, dass ein Produkt aus beliebig vielen Faktoren a, b, c, d ... mit einer Zahl m keinen Theiler gemein haben kann, sobald keiner der Faktoren a, b, c,... sich durch einen Theiler von m theilen lässt. Denn wenn m mit a und mit b keinen Theiler gemein hat, so hat nach N° 8 auch ab mit m keinen Theiler gemein, und da sonach ab und c mit m keinen gemeinsamen Theiler haben, so hat auch $(ab)c$ mit m keinen solchen, etc.

11. *Zusatz.* Aus N° 10 folgt unmittelbar, dass, wenn a und b keinen gemeinsamen Theiler haben, auch ein Produkt von beliebig vielen a'en, keinen Theiler mit b gemein hat. Bezeichnet man nun durch a^α ein Produkt von α a'en, so hat aus demselben Grunde, weil a^α und b keinen gemeinsamen Theiler haben, auch a^α mit einem Produkte von beliebig vielen b'en keinen gemeinsamen Theiler. Stellt daher b^β ein Produkt von β b'en vor, so kann man sich so ausdrücken: „Wenn a und b keinen gemeinsamen Theiler haben, so haben auch a^α und b^β keinen gemeinsamen Theiler, wie gross auch α und β sein mögen."

12. Sind a und b nicht relative Primzahlen zu einander, und ist p der grösste gemeinsame Theiler von a und b, so dass, wenn $a = mp$ und $b = np$ ist, m und n keinen gemeinsamen Theiler haben, also relative Primzahlen zu einander sind: so hat man

$$\frac{a}{b} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n},$$

und man sagt, es sei $\frac{m}{n}$ der in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückte Werth des Bruches $a:b$, weil sich kein dem $a:b$ gleicher Bruch herstellen lässt, welcher einen kleineren Zähler und Nenner hätte, als $m:n$.

Sechstes Kapitel.

Von den allgemeinen eindeutigen Potenzen und den ihnen entsprechenden Wurzeln.

A. Von den Beziehungen der allgemeinen Potenzen und Wurzeln zu einander.

§. 53. *Erklärung.* Unter allgemeiner Potenz verstehen wir jeden aus zwei allgemeinen Zeichen a und b gebildeten Ausdruck von der Form a^b, und nennen dabei wie bei der Zahlenpotenz, a den Dignanden, b den Exopnenten derselben. Allgemeine Wurzel nennen wir jede Verbindung zweier Zeichen a und b zu der Form $\sqrt[b]{a}$, und in derselben a den Radikanden, b den Wurzelexponenten.

Was die Potenz betrifft, so werden wir vorläufig in diesem Kapitel dieselbe uns, wie früher die Summen und Produkte, als eindeutig denken, so dass das gleichzeitige Bestehen zweier Gleichungen von der Form $a^b = m$ und $a^b = n$, zu dem Schlusse berechtigt, dass m und n unter sich vertauschbare Zeichen seien. Späterhin werden wir indess auch den Einfluss untersuchen, welchen die Annahme einer bestimmten Mehrdeutigkeit äussert.

§. 54. *Grundsätzliche Beziehungen zwischen den allgemeinen eindeutigen Potenzen und den Wurzeln.* Als Grundgleichungen für die Herstellung eines Zusammenhanges zwischen den Potenzen unter sich, so wie zwischen den Potenzen und Wurzeln wählen wir die Gleichungen

$$\text{(VIII)} \quad (a^b)^c = (a^c)^b, \qquad \text{(IX)} \quad (\sqrt[b]{a})^b = a.$$

Dieselben lassen sich in Worten so ausdrücken:

1) Wenn ein Ausdruck zweimal nach einander (mit b und c) zu potenziren ist, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung dies geschieht (d. h. ob erst mit b und dann mit c, oder erst mit c und dann mit b potenzirt wird).

2) Eine mit ihrem Wurzelexponenten potenzirte Wurzel ist ihrem Radikanden gleich.

§. 55. *Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit der Wurzeln.* Führt man die Wurzel als eindeutige Zeichen ein, und stellt die Wurzel $\sqrt[b]{a}$ einmal durch das Zeichen z, ein anderes Mal durch das Zeichen x vor, so gibt die Substitution in Gl. (IX) die Gll. $z^b = a$ und $x^b = a$, und man ist daher berechtigt aus dem gleichzeitigen Bestehen zweier Gleichungen von der Form $z^b = a$ und $x^b = a$ auf $z = x$ zu schliessen, so wie umgekehrt, eine Verschiedenheit von x und z als nothwevdig anzunehmen, wenn x^b und z^b von einander verschieden sind. Diese Annahme, welche den bei den allgemeinen Summen und Produkten gemachten entspricht, und an sich ebenso wie bei diesen Formen zulässig ist, würden wir nur dann genöthigt werden können, aufzugeben, wenn wir x^b nicht mehr rein als allgemeine Potenz uns dächten, d. h. wenn wir nicht die Potenz als blosse Zeichenform betrachteten, sondern noch einen weiteren Nebensinn damit verbänden (in der Art z. B., wie wir beim allgemeinen Produkte ab es thaten, als wir erlaubten, neben der Form, falls b eine Zahl ist, eine besondere Summe darunter zu denken); denn nur in diesem Falle könnte über die Identität oder Nicht-Identität von x^b und z^b schon etwas verfügt sein. Ebensowenig, wie wir sagen dürfen, es sei $3+5$ verschieden von 6, oder habe den Werth 8, so lange wir das Zeichen $+$ als ein blosses formbildendes Zeichen ansehen, sondern nur dann, wenn wir das $+$ auch als werthbildendes Zeichen eingeführt haben, ebensowenig können wir dem x^b an sich den Werth a zu- oder absprechen, so lange dasselbe nur ein formales Zeichen — eine allgemeine Potenz ist. Wenn wir es nun dennoch unterlassen, grundsätzlich die Wurzeln als eindeutige Formen aufzunehmen, so geschieht dies, um uns nicht den Weg zu versperren, gelegentlich in der Rechnung mit allgemeinen Potenzen, diesen noch einen realen Sinn unterzulegen, der eine Mehrdeutigkeit in den Wurzeln anzunehmen nöthigt.

§. 56. *Bedingtes Aufheben des Potenzirens und Radicirens.* Sind die Wurzeln eindeutig, so ist a mit der Wurzel $\sqrt[b]{(a^b)}$ vollkommen identisch; sind sie mehrdeutige Formen, so ist doch a einer der Werthe von $\sqrt[b]{(a^b)}$.

Beweis. Zufolge der Gl. (IX) stellt eine Wurzel alles dasjenige vor, was mit dem Wurzelexponenten potenzirt, den Radikanden gibt, also stellt namentlich $\sqrt[b]{(a^b)}$ alles vor, was mit b potenzirt a^b gibt. Da nun in der That a etwas ist, was mit b potenzirt, a^b gibt, so muss a unter den Werthen von $\sqrt[b]{(a^b)}$ mitbegriffen sein. Sollten also die Wurzeln eindeutig sein, so ist a der einzige Werth dieser Wurzel. — Es ist demnach die Gleichung

$$(c) \qquad \sqrt[b]{(a^b)} = a$$

unbedingt richtig für eindeutige, und eingeschränkt richtig für mehrdeutige Wurzeln, in so fern sie im letzten Falle von allen Werthen der Wurzel nur den einen, a, gibt.

Während daher zufolge der Gl. (IX) eine Potenzirung mit einem Ausdrucke stets die Radikation mit demselben Ausdrucke aufhebt, hebt die Radikation nicht überall die Potenzirung auf.

§. 57. *Gesetze für die Verbindungen dreier Elemente.* Da die Gll. (VIII) u. (IX) in die Gll. (II) u. (III) übergehen, sobald man die Potenz- und Wurzelzeichen resp. mit Additions- und Subtraktionszeichen vertauscht, so werden diejenigen der Gleichungen des §. 19, welche aus (II) u. (III) abgeleitet sind, auch durch dieselben Zeichenänderungen in richtige Potenz- und Wurzelgleichungen übergehen — wofern man, wie dort die Differenzen, hier die Wurzeln als eindeutig nimmt; diese Gleichungen werden dagegen nur eine beschränkte Gültigkeit behalten, wenn man die Wurzeln als mehrerer Werthe fähig voraussetzt.

Die gemeinten Gleichungen sind von den Gll. (1—4) die zuvorderst stehenden, und gestalten sich nach der Zeichenänderung um in

$$(VIII) \quad (a^b)^c = (a^c)^b \qquad (23) \quad (\sqrt[b]{a})^c = \sqrt[b]{(a^c)}$$

$$(24) \quad \sqrt[c]{(a^b)} = (\sqrt[c]{a})^b \qquad (25) \quad \sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})} = \sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})},$$

von denen übrigens die Gl. (24) überflüssig ist, weil sie sich von der Gl. (23) nicht unterscheidet, indem die eine wie die andere aussagt, dass man statt das Zeichen a erst mit einem Ausdrucke (der in (23) mit b, in (24) mit c bezeichnet ist) zu radiciren, und dann mit einem zweiten Ausdrucke (der in (23) mit c, in (24) mit b bezeichnet ist) zu potenziren — auch umgekehrt zu-

erst mit dem zweiten Ausdrucke potenziren, und dann mit dem ersten Ausdrucke radiciren dürfe.

Die erste der Gleichungen ist, wie man sieht, keine andere, als die Grundgleichung (VIII) des §. 54.

Für die Gll. (23) u. (25) sind die Beweise folgende:

Beweis der Gleichung (23). Zufolge der Gl. (IX) stellt die Wurzel $\sqrt[b]{(a^c)}$ alles das vor, was mit dem Wurzel-Exponenten, b, potenzirt, den Radikanden (also a^c) gibt. Soll nun die Gl. (23) eine richtige sein, d. h. soll die Potenz $(\sqrt[b]{a})^c$ mit unter den Werthen der Wurzel $\sqrt[b]{(a^c)}$ begriffen sein, so muss dieselbe gleichfalls mit b potenzirt, a^c geben, d. h. es muss $[(\sqrt[b]{a})^c]^b = a^c$ sein. Da aber nach der Gl. (VIII) ein Ausdruck, der zuerst mit c und dann mit b potenzirt ist, auch erst mit b und dann mit c potenzirt werden darf, so darf man für $[(\sqrt[b]{a})^c]^b$ auch $[(\sqrt[b]{a})^b]^c$ schreiben, während dieser Ausdruck nach der Gl. (IX) in der That in a^c umgeformt werden kann. Es begreift somit die Wurzel $\sqrt[b]{(a^c)}$ unter ihren Werthen auch die Werthe der Potenz $(\sqrt[b]{a})^c$.*) Für eindeutige Wurzeln ist also die Gl. (23) vollkommen richtig, für mehrdeutige Wurzeln dagegen hat wenigstens die Potenz $(\sqrt[b]{a})^c$ keinen Werth, der nicht zugleich ein Werth von $\sqrt[b]{(a^c)}$ wäre; ob aber auch jeder Werth von $\sqrt[b]{(a^c)}$ ein Werth von $(\sqrt[b]{a})^c$ sei, hängt von der Art der Mehrdeutigkeit ab, welche man den Wurzeln beilegen will, und kann daher vor einer Specificirung der Wurzelwerthe nicht untersucht werden.

Beweis der Gleichung (25). $\sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})}$ stellt als cte Wurzel alles vor, was mit c potenzirt, den Radikanden $\sqrt[b]{a}$ gibt. Sollen also die Werthe von $\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$ zugleich Werthe von $\sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})}$ sein, so muss

*) Diese Potenz nämlich ist bei Voraussetzung einer Mehrdeutigkeit der Wurzeln, wegen des mehrdeutigen Dignanden selbst ein mehrdeutiges Zeichen.

auch $\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$ mit c potenzirt, stets die $\sqrt[b]{a}$ geben, d. h. es muss

$$(\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})})^c = \sqrt[b]{a}$$

sein. Nun sind aber in der That nach Gl. (23) alle Werthe von $(\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})})^c$ auch unter den Werthen der Wurzel $\sqrt[b]{[(\sqrt[c]{a})^c]}$, d. h. (da wegen Gl. (IX), $(\sqrt[c]{a})^c = a$ ist) unter den Werthen der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ begriffen, folglich hat $\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$ keinen Werth, der nicht auch ein Werth von $\sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})}$ wäre. Ebenso hat aber auch $\sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})}$ keinen Werth, welcher nicht auch ein Werth von $\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$ wäre, wie man sich überzeugt, wenn man bei der Beweisführung statt, wie oben, von $\sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})}$, von $\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$ ausgeht.

Die Gleichung (25) ist folglich eine unbedingt richtige.

Die Regel, welche sich aus den Gll. (VIII), (23) u. (25) ergibt, ist folgende.

Soll zweimal hintereinander potenzirt oder zweimal hinter einander radicirt werden, so ist es gleichgültig, mit welcher Potenzirung oder mit welcher Radicirung man den Anfang macht. Soll ferner einmal potenzirt und einmal radicirt werden, so kann man nach Belieben mit der Potenzirung oder mit der Radicirung den Anfang machen, nur könnten spätere Bestimmungen über die Mehrdeutigkeit der Wurzeln die Folge haben, dass man beim zweiten Verfahren Werthe einbüsst, so dass man zwar mit Sicherheit überall $\sqrt[b]{(a^c)}$ für $(\sqrt[b]{a})^c$, nicht aber unbedingt $(\sqrt[b]{a})^c$ für $\sqrt[b]{(a^c)}$ setzen darf.

§. 58. *Gesetze für Verbindungen mehrerer Elemente.* Die am Schlusse des vorigen §. hingestellte Regel lässt sich auf beliebig viele Potenzirungen und Radikationen ausdehnen, wie aus einer wiederholten Anwendung der Gll. (VIII), (23,) (25) sogleich klar wird.

So darf man z. B. für $((a^b)^c)^d$ auch $((a^c)^d)^b$ setzen, weil nach Gl. (VIII) $((a^b)^c)^d$ sich in $((a^c)^b)^d$ und dieses nach derselben Gleichung sich in $((a^c)^d)^b$ umformen lässt.

Festzuhalten bleibt nur, dass man unter Voraussetzung einer Mehrdeutigkeit der Wurzeln bei untermischten Potenzirungen und Radikationen möglicher Weise mehr oder weniger Werthe erhalten kann, als in dem ursprünglichen Ausdrucke enthalten waren.

B. Von den Beziehungen der allgemeinen Potenzen und Wurzeln zu den allgemeinen Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten.

§. 59. *Grundsätzliche Beziehungen zwischen den Potenzen, Summen und Produkten.* Um einen Zusammenhang zwischen den Potenzen, Wurzeln und den früheren Zeichenverbindungen herzustellen, nehmen wir folgende Gleichungen als Grundlage:

(X) $a^{b+c} = a^b a^c$, (XI) $(ab)^c = a^c b^c$, (XII) $a^{bc} = (a^b)^c$.

Rechtfertigungsmethode. Sollen die vorstehenden Gleichungen zulässig sein, so dürfen sie weder mit den früheren Grundgleichungen, noch unter sich selbst in Widerspruch stehen. Die Verträglichkeit derselben mit den Gll. (I—VII) erfordert, dass die Umformungen, welche mit den ersten Ausdrücken jeder der Gll. (X—XII) (d. h. mit den Ausdrücken, die auf der linken Seite des =Zeichens stehen) nach der Vorschrift der Gll. (I—VII) vorgenommen werden können, sich sowohl mit den hier in Anspruch genommenen Umformungen, d. h. mit den auf der rechten Seite des =Zeichens stehenden Ausdrücken vertragen, wie mit den Umformungen, welche nach den Gll. (I—VII) mit diesen letzten Ausdrücken vorgenommen werden dürfen. Uebrigens kommen hierbei, da die Ausdrücke in den Gll. (X—XII) von früheren Ausdrucksformen nur zweigliedrige Summen und zweigliedrige Produkte erhalten, bloss die Gll. (I) u. (IV) in Betracht.

Was die Verträglichkeit der neuen Gleichungen unter sich und mit den Gll. (VIII) u. (IX) betrifft, so kann von einem allgemeinen Widerspruche nur zwischen den Gll. (XII) u. (VIII) die Rede sein, weil nur diese für eine und dieselbe Rechnungsform (für $(a^b)^c$) Umformungen enthalten, ausserdem aber allgemein mit keinem Ausdrucke der einen Gleichung mittels der übrigen Gll. Umformungen möglich sind, so dass sonst die Gll. (VIII—XII) im Allgemeinen ganz

unabhängig von einander sind. Wohl aber können diese Gleichungen dann einander entgegen treten, wenn die in ihnen vorkommenden Ausdrücke durch Vereinfachung in Formen übergehen, die nach dem Früheren schon vergleichbar sind. Solche Vereinfachungen können aber nur eintreten, wenn die vorkommenden Summen und Produkte die besonderen Werthe annehmen, deren sie fähig sind, d. h. wenn man den Summanden und Faktoren solche Werthe gibt, dass auf sie eine der Gleichungen

(26) $m+0=0$, (27) $0.m=0$, (28) $1.m=m$

anwendbar wird.

Wird nämlich z. B. in (X) $b=0$ gedacht, und in (XI) $b=1$, so gehen die Ausdrücke a^{b+c} und $(ab)^c$ resp. in a^{0+c} und $(a.1)^c$, d. h. in a^c über; und es liefern daher die Gll. (X) u. (XI) in diesen besonderen Fällen für ein und dasselbe a^c zwei verschiedene Umformungen, die möglicherweise einander widerstreiten könnten.

Die Einführung jener besonderen Summen- und Produktformen in die Gll. (X—XII) können natürlich auch möglicher Weise auf bestimmte Werthe specieller Potenzformen führen, und es wird daher falls solche bestimmte Werthe sich wirklich finden, zum vollständigen Nachweise der Verträglichkeit der Gll. (VIII—XII) noch nöthig, zu untersuchen, ob dieselben auch auf diese bestimmten Potenzformen angewendet, noch in Uebereinstimmung bleiben.

Ausführung für die Gleichung (X). Für a^{b+c} ist nach den Gll. (I—VII) nur die Umformung in a^{c+b} möglich; es darf hiernach also a^{b+c} seinen Werth nicht ändern, wenn die Elemente b und c ihre Stelle mit einander vertauschen. Soll demnach $a^{b+c}=a^b a^c$ gesetzt werden dürfen, so darf auch $a^b a^c$ seinen Werth nicht ändern, wenn b und c ihre Stellen wechseln, d. h. es muss $a^b a^c=a^c a^b$ sein, was in der That nach Gl. (IV) der Fall ist.

Die Umformungen von $a^b a^c$ kommen nicht in Betracht, da die einzig mögliche die Umformung in $a^c a^b$ ist, deren Statthaftigkeit schon so eben begründet worden ist.

Da von früheren Rechnungsformen hier nur die Summe $b+c$ vorkommt, so haben wir beim zweiten Theile der Prüfung unserer Gleichung nur auf die besonderen Summenwerthe, d. h. nur auf die Gleichung (26) Rücksicht zu nehmen. Setzen wir zu dem Ende $c=0$, so geht die Gl. (X) wegen $a^{b+0}=a^b$ in $a^b=a^b \cdot a^0$

über. Subtrahiren wir hier auf beiden Seiten das Produkt $a^b a^0$, so erhalten wir $a^b - a^b a^0 = 0$, oder zufolge der Gl. (16)

$$a^b(1-a^0) = 0.$$

Ein Produkt kann aber nicht gleich Null sein, wenn nicht einer der Faktoren Null ist, mithin kann diese Gleichung nur erfüllt werden, wenn entweder $a^b = 0$ ist oder wenn $1 - a^0 = 0$, d. h. wenn $a^0 = 1$ ist. Die Gl. (VII) verlangt also, der Potenz a^0 den Werth 1 beizulegen, wenigstens so oft das a so beschaffen ist, dass für irgend ein von Null verschiedenes b, a^b einen von Null verschiedenen Werth hat. Ist nämlich $b = 0$, so geht die obige Gleichung über in

$$a^0(1-a^0) = 0,$$

und wird also richtig sowohl für $a^0 = 0$, als für $a^0 = 1$; d. h. es braucht alsdann nicht nothwendig $a^0 = 1$ zu sein. Existirt aber ausser der Null auch nur ein einziger Werth von b, für welchen a^b von Null verschieden ist, so würde die Gleichung $a^b(1-a^0) = 0$ einen Widerspruch enthalten, wenn man nicht

$$(29) \qquad a^0 = 1$$

nähme. Da es nun offenbar nur ganz besondere Werthe von a sein können, für welche a^b für jedes von Null verschiedene b, gleich Null oder werthlos wird (denn auch dann, wenn a^b werthlos wird, kann die Gleichung $a^b(1-a^0) = 0$, weil sie in diesem Falle keinen Sinn haben würde, zu keiner Werthbestimmung von a^0 dienen): so müssen wir die Gl. (29) im allgemeinen als eine nothwendige Folge der Gl. (X) mit dieser zugleich für richtig erklären — nur mit dem Vermerken, dass es vielleicht einzelne Werthe von a gibt, für welche a^0 ebenso gut des Werthes 0 fähig ist.

Die Frage, ob ein a von der angegebenen Beschaffenheit existire, (d. h. ob wirklich in einem Falle a^0 nicht nothwendig $= 1$ zu sein brauche), können wir jetzt nur wie folgt beantworten. Entweder führt eine der übrigen Grundgleichungen der Potenzen auf ein solches a — und dann ist die Frage erledigt; oder es liegt in den Eigenschaften, welche bis daher den Potenzen beigelegt worden sind, kein Grund zu einer solchen Annahme. Im letzten Falle dürfen wir solche Annahme für unstatthaft erklären (mit demselben Rechte, mit welchem wir grundsätzlich den Produkten, in denen kein Faktor gleich Null ist, den Werth Null versagten), oder wir müssen

zu den bisherigen Potenz-Eigenschaften noch andere hinzufügen, welche zu einer Entscheidung hierüber befähigen.*)

Bevor wir indess die Gl. (29) mit der erörterten Beschränkung zulassen, müssen wir untersuchen, ob dieselbe nicht gegen die früheren Grundformeln der Potenzen, nämlich gegen die Gll. (VIII) und (XI) verstösst.

Setzen wir zu dem Ende zuerst in (VIII) $b=0$, so erhalten wir $(a^0)^c=(a^c)^0$, welche Gleichung in Verbindung mit der Gl. (29) auf

(30) $$1^c=1$$

führt; mithin dürfen wir die Gl. (29) neben der Gl. (VIII) bestehen lassen, sobald wir die Gl. (30) gleichfalls anerkennen, d. h. sobald wir jeder Potenz der allgemeinen Eins den Werth 1 geben, was zu verweigern wir keinen Grund haben.

Setzen wir endlich in (IX) für b den Werth Null, so kommen wir auf $(\sqrt[0]{a})^0=a$, während wegen der Gl. (29) $(\sqrt[0]{a})^0=1$ ist; es müsste also widersinniger Weise das allgemeine a dem bestimmten 1 gleich sein. Wir müssen daher, um Widersprüche zu vermeiden, entweder das Potenziren mit Null oder das Radiciren mit Null aufgeben. Wir thun hier das Letzte und sondern die nullten Wurzeln aus den brauchbaren Rechnungsformen heraus, wie wir es im Früheren mit dem Quotienten $a:0$ gethan haben.

Ausführung für die Gleichung (XI). Die Potenz $(ab)^c$ ist nach dem Bisherigen nur der Umformung in $(ba)^c$ fähig. Damit dieser alten Umformung nicht widersprochen werde, wird also für neue Umformungen nichts weiter verlangt, als dass sie ihren Werth nicht ändern, wenn a und b ihre Stellen wechseln, und dieser Forderung wird in der That von dem Ausdrucke $a^c b^c$, den wir als gleichbedeutend mit $(ab)^c$ in unserer Gleichung (XI) aufgestellt haben, genügt, da $b^c a^c$ wirklich nach Gl. (IV) mit $a^c b^c$ gleichgeltend ist.

*) Dies letzte wird in der That im nächsten Kapitel geschehen, wo wir für gewisse Potenzen eine werthbestimmende Gleichung (das Wort Werth im Sinne des §. 12 genommen) hinzuzufügen Veranlassung finden werden.

Da wir es hier nur mit Potenzen und Produkten zu thun haben, so bezieht sich die fernere Prüfung der Gl. (XI) nur auf die speciellen Produktformen der Gll. (27) u. (28) ($0 . m = 0$ und $1 . m = m$) und auf die speciellen Potenzformen der Gll. (29) u. (30).

Rücksichtlich der Gleichung $0 . m = 0$ haben wir in $(ab)^c$ für b den Werth 0 einzusetzen, und erhalten $(a . 0)^c = a^c . 0^c$ d. h. $0^c = a^c . 0^c$. Wäre nun 0^c von Null verschieden, so dürfte man diese Gleichung mit 0^c dividiren, und käme auf die Gleichung $a^c = 1$, also auf die unpassende Folgerung, dass die allgemeinen Potenzen sämmtlich denselben Werth 1 haben. Wir müssen daher, wenn wir nicht durch die Annahme des Werthes 1 für jegliche Potenz alle Potenzrechnung nutzlos machen wollen, und die Gleichung (XI) beibehalten werden soll, entweder $0^c = 0$ annehmen, oder die Potenzen von 0 als unbrauchbare Rechnungsformen verwerfen, wie wir es bereits mit $a : 0$ und $\sqrt[0]{a}$ haben machen müssen. Die Entscheidung, ob 0^c als Null beizubehalten oder zu den werthlosen Ausdrücken zu zählen sei, ist zwar in Rücksicht auf das Bisherige willkürlich, doch schieben wir dieselbe noch auf, weil vielleicht die späteren Folgerungen die eine oder die andere der beiden Annahmen ausschliessen könnten.

Der einzige Fall, wo das Bisherige berechtigt, $a^c = 1$ anzunehmen, und daher 0^c nicht nothwendig Null oder werthlos zu sein braucht, trifft ein, wenn $c = 0$ ist. Es hat also die Null die Eigenschaft, welche wir vorher dem a beilegen mussten, wenn die Gl. (29) aufhören sollte, bindend zu sein; und wie wir dort gesehen, wird der Gl. (X) entsprochen, so oft $a^0(1 - a^0) = 0$ oder (für a den Werth 0 eingesetzt) $0^0(1 - 0^0) = 0$ ist, also sowohl durch $0^0 = 0$ als durch $0^0 = 1$. Darüber, ob der Potenz 0^0 der eine oder der andere dieser beiden Werthe beizulegen sei, entscheidet die hiesige Gl. (XI) noch nicht, da für $c = 0$ die obige Gl. $0^c = a^c . 0^c$ in $0^0 = a^0 . 0^0$, d. h. in $0^0 = 0^0$ übergeht.

Rücksichtlich der Prüfung an dem zweiten besonderen Produktwerthe $1 . m = m$, haben wir in $(ab)^c$ für b den Werth 1 zu setzen. Dies verwandelt unsere Gleichung in $a^c = a^c . 1^c$, welche in Folge der Gl. (20) in der That eine richtige ist, und demnach zu keinem Widerspruche führt.

Was die Prüfung an den gefundenen besondern Potenzwerthen der Gll. (29) u. (30) betrifft, so setzen wir zuerst $c = 0$.

In diesem Falle geht die Gl. (XI) in $(ab)^0 = a^0 b^0$ über und stimmt folglich mit der Gl. (29) überein, da sie in Folge derselben sich in die richtige Gleichung $1 = 1.1$ oder $1 = 1$ verwandelt.

Da endlich die Vergleichung der Gl. (XI) mit der Gl. (30) auf dieselbe identische Gleichung führt, auf welche wir bei der Vergleichung mit der Gleichung $1 . m = m$ gekommen waren, so genügt die Gl. (XI) allen an dieselbe zu stellenden Forderungen, sobald wir uns nur vor der Hand der Potenzen von Null enthalten.

Ausführung für die Gleichung (XII). Die einzige Umformung, welche die früheren Formeln für a^{bc} gestatten, ist a^{cb}. Die alleinige Bedingung, welcher die für a^{bc} aufzustellenden neuen Umformungen zu unterwerfen sind, ist also, dass sie ihren Werth nicht ändern dürfen, wenn b und c ihre Stellen mit einander verwechseln, und diese Bedingung ist bei unserer neuen Form, bei $(a^b)^c$ erfüllt, da dieselbe durch jene Vertauschung in den nach Gl. (VIII) mit $(a^b)^c$ gleichgeltenden Ausdruck $(a^c)^b$ übergeht.

Behufs der Prüfung, ob die Gl. (XII) auch für specielle Formen mit den schon angenommenen Gleichungen sich vertrage, haben wir zunächst für bc die speciellen Produktformen $b.0$ und $b.1$ zu setzen. Für $c = 0$ geht aber unsere Gleichung über in $a^0 = (a^b)^0$, d. h. da nach Gl. (29) $(a^b)^0 = 1$ ist, in $a^0 = 1$, und fällt also mit (29) selber zusammen. Für $c = 1$ erhalten wir $ab = (a^b)^1$, oder wenn man a^b durch das Zeichen m ersetzt,

$$(31) \qquad m = m^1.$$

Demnach müssten die ersten Potenzen jedes allgemeinen Ausdrucks dem Dignanden gleich sein, und es ist daher noch zu untersuchen, ob sich dies mit den bisherigen Potenzgleichungen (mit VIII—XI) vertrage. Dass dies mit den Gll. (VIII, X u. XI) der Fall ist, zeigt sich auf der Stelle, und die Gl. (IX) liefert, indem man den dortigen Potenzexponenten $= 1$ setzt, weil nach Gleichung (31) $(\sqrt[1]{a})^1 = \sqrt[1]{a}$ sein soll,

$$(32) \qquad \sqrt[1]{a} = a,$$

so dass, da diese Gleichung an sich nicht widersinnig ist, hiermit ein neuer Werth für eine specielle Ausdrucksform gefunden ist.

Endlich sind noch die besonderen Potenzformen der Gll. (29) und

(30) zu prüfen und zu dem Ende für die Exponenten der Werth 0, für den Dignanden der Werth 1 einzusetzen.

Diese Substitutionen führen aber auf identische Gleichungen, mithin dürfen alle Gleichungen dieses §. unter die Grundformeln für die Potenzen aufgenommen werden, und die aus ihnen gezogenen speciellen Potenz- und Wurzelwerthe

$$a^0 = 1,\ 1^c = 1,\ m^1 = m,\ \sqrt[1]{a} = a$$

sind als zulässig, den anderen speciellen Ausdruckswerthen in (26) u. (27) anzureihen, wofern man nur die Form $\sqrt[0]{a}$ aus den Rechnungen zurückweist, und sich vorläufig der Form 0^e enthält. Dass nämlich a^b, wenn a von Null verschieden ist, für ein von Null verschiedenes b nie ausschliessend den Werth Null haben kann, und dass daher, wenn man die Potenz 0^e vermeidet, stets $a^0 = 1$ anzunehmen ist, wird sich später noch ergeben.

§. 60. *Gesetze für Verbindungen dreier Elemente.* Die Verbindungen dreier Elemente, welche eine einfache Umformung zulassen, sind mit diesen ihren Umformungen in folgenden Gleichungen enthalten:

$$(33)\ a^{b-c} = a^b : a^c,\quad (34)\ (a:b)^c = a^c : b^c,\quad (35)\ a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{(a^b)}$$

$$(36)\ \sqrt[c]{ab} = \sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b},\quad (37)\ \sqrt[c]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}},\quad (38)\ \sqrt[bc]{a} = \sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})},$$

deren Gültigkeit inzwischen natürlich erfordert, dass weder ein Divisor noch ein Wurzelexponent den Werth Null hat.

Beweis der Gleichung (33). Die Ausdrücke a^{b-c} und $a^b : a^c$ sind nach §. 31 einander gleich, wenn sie mit einem und demselben, aber von Null verschiedenen Ausdrucke multiplicirt gleiche Werthe geben. Nun gibt a^{b-c} mit a^c (welches letzte der Voraussetzung nach von 0 verschieden ist) multiplicirt: $a^{b-c}a^c$, was nach Gl. (X) gleichgeltend ist mit $a^{(b-c)+c}$, d. h. mit a^b; während $a^b : a^c$ mit demselben a^c multiplicirt nach Gl. (VI) geichfalls a gibt — mithin ist $a^{b-c} = a^b : a^c$ eine nothwendige Folge der Gl. (X).

Beweis der Gleichung (34). Nach §. 31 muss $(a:b)^c$ und $a^c : b^c$ einander gleich sein, wenn beide Ausdrücke mit demselben von Null verschiedenen Ausdrucke multiplicirt, Gleiches geben. Multiplicirt man sie aber mit b^c (was voraussetzungsgemäss von Null verschieden ist), so erhält man einerseits $(a : b)^c b^c$, was zu-

folge der Gl. (XI) durch $[(a:b)b]^c$ d. h. durch a^c ersetzt werden kann; andrerseits $(a^c:b^c)\,b^c$, was nach Gl. (VI) gleichfalls mit a^c einerlei Werth hat; mithin ist $(a:b)^c = a^c : b^c$ eine nothwendige Folge der Gl. (XI).

Beweis der Gleichung (35). Zufolge der Gl. (IX) stellt $(\sqrt[c]{a^b})$ alles vor, was mit c potenzirt a^b gibt. Da nun $a^{\frac{b}{c}}$ mit c potenzirt $\left(a^{\frac{b}{c}}\right)^c$ gibt, und dies nach Gl. (XII) den Werth von $a^{\frac{b}{c}c}$, d. h. von a^b hat, so muss $a^{\frac{b}{c}}$ unter den Werthen von $\sqrt[c]{(a^b)}$ mit enthalten sein. Die Gleichung (35) ist also für eindeutige Wurzeln eine vollkommene, für mehrdeutige Wurzeln aber nur eine unvollkommene Gleichung in derselben Art, wie die Gleichung (c).

Beweis der Gleichung (36). Zufolge der Gl. (IX) stellt $\sqrt[c]{(ab)}$ alles vor, was mit c potenzirt, ab gibt. Lässt sich also das Produkt $\sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}$ nach der Potenzirung mit c stets mit ab vertauschen, so sind alle Werthe von $\sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}$ zugleich Werthe von $\sqrt[c]{ab}$, obgleich nicht nothwendig umgekehrt jeder Werth von $\sqrt[c]{ab}$ zugleich ein Werth von $\sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}$ zu sein braucht. Nun ist aber $(\sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b})^c$ nach Gl. (XI) vertauschbar mit $(\sqrt[c]{a})^c \,.\, (\sqrt[c]{b})^c$, während dies wiederum nach Gl. (IX) mit dem Produkte $a^c b^c$ gleichgeltend ist. Es ist mithin die Gl. (36) für eindeutige Wurzeln unbedingt richtig, und für mehrdeutige Wurzeln in so weit richtig, dass die Wurzel auf der linken Seite des ($=$) Zeichens alle Werthe des Ausdrucks auf der rechten Seite mit umfasst.

Beweis der Gleichung (37). Die Wurzel $(\sqrt[c]{a:b})$ bezeichnet alles, was mit c potenzirt, $a:b$ gibt. Nun gibt auch $\sqrt[c]{a}:\sqrt[c]{b}$ mit c potenzirt stets $a:b$ (weil nach Gl. (34) $(\sqrt[c]{a}:\sqrt[c]{b})^c = (\sqrt[c]{a}^{c}):(\sqrt[c]{b})^c$ ist), folglich muss jeder Werth von $\sqrt[c]{a}:\sqrt[c]{b}$ auch ein Werth von $\sqrt[c]{(a:b)}$ sein.

Beweis der Gleichung (38). Der Ausdruck $\sqrt[bc]{a}$ bezeichnet nach Gl. (IX) alles, was mit bc potenzirt, a gibt. Nun gibt aber auch $\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$ stets nach der Potenzirung mit bc den Werth a, weil

nach Gl. (XII) u. (IX) $(\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})})^{bc} = ([\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}]^b)^c = [\sqrt[c]{a}]^c$ ist, mithin kann $\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$ keinen Werth haben, der nicht zugleich ein Werth von $\sqrt[bc]{a}$ wäre, und es ist also (38) eine richtige, wenn auch für mehrdeutige Wurzeln vielleicht nicht eine vollkommene Gleichung.

§. 61. *Folgerungen aus den Gleichungen des §. 60.* Für $b = 0$ geht die Gl. (33) über in $a^{-b} = a^0 : a^b$, folglich, so oft a von Null verschieden ist (weil unter dieser Voraussetzung $a^0 = 1$ wird,) in

(39) $$a^{-b} = 1 : a^b.$$

Für $b = 0$ geht die Gl. (35) über in $a^0 = \sqrt[c]{(a^0)}$, oder wegen $a^0 = 1$ in

(40) $$\sqrt[c]{1} = 1,$$

d. h. es ist 1 allemal einer der Werthe von $\sqrt[c]{1}$.

Für $b = 1$ geht die Gl. (35) über in $a^{\frac{1}{c}} = \sqrt[c]{a^1}$, d. h. wegen $a^1 = a$, in

(41) $$\sqrt[c]{a} = a^{\frac{1}{c}}$$

so dass $a^{\frac{1}{c}}$ allemal einer der Werthe von $\sqrt[c]{a}$ ist.

Für $a = 1$ geht die Gl. (37) über in $\sqrt[c]{(1 : b)} = \sqrt[c]{1} : \sqrt[c]{b}$, d. h. wegen $\sqrt[c]{1} = 1$, in

(42) $$\sqrt[c]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[c]{b}}$$

Siebentes Kapitel.

Von der Potenzirung und Radikation der Zahlen.

A. Von den Potenzen und Wurzeln in denen der Exponent eine Zahl ist.

§. 62. *Von den ganzen Potenzen.* Im vorigen Kapitel haben wir uns begnügt, die Potenzen durch allgemeine zwischen ihnen statt findende Beziehungen zu charakterisiren. Hier fügen wir für diejenigen Potenzen, deren Exponenten ganze Zahlen sind, und die man deswegen ganze Potenzen nennt, eine neue Bestimmung hinzu, dadurch dass wir dieselben auf allgemeine Produkte zurückführen, indem wir a^b als gleichgeltend mit einem Produkt von b a'en hinstellen.

Dass diese Bestimmung den früheren Bestimmungen keinen Eintrag thut, erkennt man wie folgt.

Zuerst nämlich bleiben die ganzen Potenzen, wie es bei den allgemeinen Potenzen des vorigen Kapitels vorausgesetzt wurde, eindeutig, weil ihnen der Werth eines Produktes beigelegt wird, und Produkte eindeutige Formen sind.

Ferner behalten die Grundgleichungen (VIII—XII) ihre Geltung.

Was nämlich die Gll. (VIII) und (XII), d. h. die Gleichungen $(a^b)^c = (a^c)^b = a^{bc}$ betrifft, wo nunmehr zwar a noch ein allgemeines Zeichen vorstellt, aber b und c Zahlen bedeuten, so bilde man zuerst das Produkt a^b und schreibe dasselbe cmal untereinander, wie in folgendem Schema

$$\begin{array}{l} a.a.a.a.a \;\ldots\; a \\ a.a.a.a.a \;\ldots\; a \\ a.a.a.a.a \;\ldots\; a \\ \;\ldots\;\ldots\;\ldots \\ \;\ldots\;\ldots\;\ldots \\ a.a.a.a.a \;\ldots\; a \end{array}$$

Da nun $(a^b)^c$ erhalten wird, wenn man das Produkt (a^b), c mal mit sich multiplicirt, also wenn man, nachdem die a'en jeder Zeile für sich multiplicirt gedacht worden sind, die Zeilen unter sich multiplicirt; und da andrerseits ein Resultat von demselben Werthe gewonnen wird, wenn man (die Ordnung der Multiplikationen ändernd) die b mal c a'en des Schema's nach und nach mit einander multiplicirt, und dies mit der Bildung der Potenz a^{bc} übereinkommt: so ist $(a^b)^c = a^{bc}$. Da überdies a^{bc} seinen Werth nicht ändert, wenn b und c ihre Stellen wechseln, so kann auch kein neuer Werth entstehen, wenn in $(a^b)^c$ b mit c verwechselt wird, d. h. es ist auch $(a^b)^c = (a^c)^b$.

Rücksichtlich der Gl. (X) denke man die Faktoren des aus $b+c$ a'en bestehenden Produkts, welches der Potenz a^{b+c} gleich ist, in zwei Gruppen getheilt, von denen die erste deren b, die zweite die übrigen c a'en enthält. Da nun die Ordnung des Multiplicirens gleichgültig ist, und die erste dieser Gruppen $=a^b$, die zweite $=a^c$ ist, so hat man in der That $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.

Bezugs der Gl. (XI) ordne man die Faktoren des, der Potenz $(ab)^c$ gleichen Produkts, (des Produkts $[ab][ab][ab]\ldots$) so, dass die a'en voran, die b'en zuletzt stehen (also in der Folge $aaa\ldots.bbb\ldots.$). Da nun c die Anzahl der a'en, sowohl wie die der b'en ist, so erhält man, wegen

$$aaaa\ldots.bbbb\ldots. = (aaaa\ldots.)(bbbb\ldots.) = a^c b^c,$$

$$a^{b+c} = a^b a^c.$$

Die Gl. (IX) endlich bleibt eine grundsätzliche, da, wenn man b als Zahl, a als allgemeines Zeichen denkt, die Erklärung der ganzen Potenz uns nicht befähigt, das der Potenz $(\sqrt[b]{a})^b$ gleiche Produkt $\sqrt[b]{a} \cdot \sqrt[b]{a} \cdot \sqrt[b]{a} \ldots.$ mit dem allgemeinen Zeichen a zu vergleichen, und wir genügen derselben, wenn wir uns vornehmen, $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}$, etc. als gleichgeltend mit a zu behandeln, so oft die in einem und demselben dieser Produkte vorkommenden Wurzeln nur immer einen und denselben ihrer Werthe vorstellen.

Die den ganzen Potenzen entsprechenden (mit einem ganzen Zahlenexponenten versehenen) Wurzeln bedürfen keines besonderen Namens, da andere Wurzeln als solche in der Praxis nie vor-

kommen. Nur mag bemerkt werden, dass man die Wurzeln mit dem Exponenten 2, Quadratwurzeln nennt, und den Exponenten derselben über das Wurzelzeichen nicht mit hinzuschreiben pflegt; so wie, dass man die Wurzeln mit dem Exponenten 3 Kubikwurzeln nennt. Ebenso nennt man die ganzen Potenzen a^2 und a^3 resp. das Quadrat und den Kubus von a.

§. 63. *Von den besonderen Werthen der ganzen Potenzen.* Die Potenz 0^b als ganze Potenz aufgefasst, ist als ein Produkt von b Nullen der Null gleich. Da wir nun nach §. 59 allgemeinen Potenzen mit dem Dignanden Null den Werth Null beilegen dürfen, ohne gegen eine unserer Potenzformeln zu verstossen, so dürfen wir hiermit auch in den Rechnungen mit allgemeinen Potenzen da, wo die Exponenten Zahlen sind, die Null als Dignanden zulassen. Ob wir aber die Null auch als Dignanden zulassen wollen, wenn der Exponent keine (ganze) Zahl ist, bleibt immer noch von unsrer Willkür abhängig, und wir behalten uns die Entscheidung darüber noch vor.

Da ferner ein Produkt nie Null sein kann, wenn nicht wenigstens ein Faktor Null ist, so kann nie die ganze Potenz $a^b = 0$ sein, wenn nicht $a = 0$ ist. Sonach existiren also für jedes von Null verschiedene a unendlich viele Exponenten (nämlich alle ganzen Zahlen), welche a^b von Null verschieden machen — mithin ist unter jeden Umständen $a^0 = 1$ ist, so oft a nicht Null ist. Vrgl. den Schluss des §. 59.

§. 64. *Von der Zahl der Werthe der (ganzen) Wurzeln.* Während die allgemeine Wurzel, so lange die Potenz bloss als Zeichenform dastand, sich ebensowohl eindeutig als mehrdeutig annehmen liess, und im Falle man sie als mehrdeutig aufnehmen wollte, noch einen grossen Spielraum für die Specialisirung ihrer Werthe gestattete: führt die Zurückführung der Potenz auf ein Produkt, also auf etwas schon mit bekannten Eigenschaften Begabtes, von selbst auf ganz bestimmte Eigenschaften der Wurzeln, welche die Willkür bei der Bestimmung ihrer Werthe beschränkt. Namentlich wird die Frage nach der Zahl der Wurzelwerthe einer ganz bestimmten Antwort fähig.

Um diese Frage zu beantworten, bezeichnen wir einen Werth von $\sqrt[b]{a}$ durch x, d. h. wir nehmen an, es sei $x^b = a$, vorläufig a

als von Null verschieden denkend, und fragen, ob noch ein andrer von x verschiedener Werth z existire, welcher darauf Anspruch mache, gleichfalls ein Werth von $\sqrt[b]{a}$ zu sein, d. h. welcher gleichfalls, bmal mit sich multiplicirt, a gebe, oder (in Zeichen ausgedrückt), der $z^b = a$ mache. Zu dem Ende bilden wir, indem wir von den Ausdrücken der Gleichung $x^b = a$ die als gleich vorausgesetzten Ausdrücke z^b und a subtrahiren, die Gleichung $x^b - z^b = a - a$, d. h. die Gleichung

$$(43) \qquad x^b - z^b = 0.$$

Jeder Werth von z, welcher $z^b = a$ macht, (d. h. jeder Werth von $\sqrt[b]{a}$) muss also $x^b - z^b = 0$ machen, und umgekehrt muss jeder Werth von z, der $x^b - z^b = 0$ macht, auch $z^b = a$ machen d. h. ein Werth von $\sqrt[b]{a}$ sein.

Nehmen wir nun zuerst $b = 1$, so geht diese Gleichung über in $x^1 - z^1 = 0$, oder da $x^1 = x$, $z^1 = z$ ist, in $x - z = 0$. Es kann aber eine Differenz nicht Null sein, wenn nicht der Minuend dem Subtrahenden gleich ist, mithin erfordert die Gleichung $x - z = 0$ nothwendig, dass $x = z$ sei, d. h. es existirt für $\sqrt[1]{a}$ kein von x verschiedener Werth, und die ersten Wurzeln sind daher nothwendig eindeutig.

Nehmen wir ferner $b = 2$, so geht die Gl. (43) in $x^2 - z^2 = 0$ über, d. h. da $x^2 - z^2 = (x - z)(x + z)$ ist,*) in die Gleichung

$$(x - z)(x + z) = 0.$$

Nun darf aber nach §. 38 einem Produkte nicht der Werth Null zugeschrieben werden, wenn nicht einer der Faktoren Null ist, mithin kann die Gleichung $(x - z)(x + z) = 0$ nicht bestehen, wenn nicht entweder $x - z = 0$ oder $x + z = 0$ (d. h. $z - (-x) = 0$) ist, d. h. wenn nicht $z = x$ oder $z = -x$ ist. Wir sehen demnach, dass $\sqrt[2]{a}$, so oft a von Null verschieden ist, zwei Werthe hat, und dass, wenn man den einen mit x bezeichnet, der andere mit $-x$ bezeichnet werden muss.

Ist z. B. $a = -1$, so wird, wenn wir den einen Werth von $\sqrt[2]{-1}$ mit i bezeichnen, der andere $-i$ sein.

*) Man darf nur $(x - z)(x + z)$ nach §. 40 in eine algebraische Summe umformen, um sich davon zu überzeugen.

Nehmen wir $b=3$, so geht die Gl. (43) über in $x^3-z^3=0$ oder da $x^3-z^3=(x-z)(x^2+xz+z^2)$ ist (wie man sich überzeugt, wenn man die Umformung des §. 40 in Anwendung bringt), in

$$(x-z)(x^2+xz+z^2)=0.$$

Nach §. 36. kann indess diese Gleichung nur bestehen, wenn entweder

$$(44)\qquad x-z=0,$$

oder wenn $x^2+xz+z^2=0$ ist. Es ist aber

$$x^2+xz+z^2=\{z+x(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})\}\{z+x(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\},$$

mithin kann x^2+xz+z^2 nicht Null sein, wenn nicht entweder

$$(45)\qquad z+x(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})=$$

$$\text{oder } (46)\qquad z+x(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})=0$$

ist; folglich muss, wenn z ein Werth von $\sqrt[3]{a}$ sein soll, entweder zufolge der Gl. (44) $z=x$, oder zufolge der Gl. (45) $z=x(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})$, oder zufolge der Gl. (46) $z=x(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})$ sein.

Die dritte Wurzel aus einem von Null verschiedenen Ausdrucke hat somit allemal d r e i von einander verschiedene Werthe, und wenn man einen derselben gefunden hat und mit x bezeichnet, so erhält man die beiden anderen, wenn man dieses x noch resp. mit $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ multiplicirt.

Nehmen wir $b=4$, so geht die Gl. (43) über in $z^4-x^4=0$, oder da $z^4-x^4=(z^2-x^2)(z^2+x^2)$ ist, in

$$(z^2-x^2)(z^2+x^2)=0.$$

Diese Gleichung ist nach §. 36 aber nur erfüllt, wenn $z^2-x^2=0$ oder $z^2+x^2=0$ ist, mithin, da

$$z^2-x^2=(z-x)(z+x) \text{ und } z^2+x^2=z^2-(-x^2)$$

ist, nur wenn $z-x=0$ oder $z+x=0$ oder wenn $z^2-(-x^2)=0$, d. h. wenn $z=x$ oder $z=-x$ oder $z^2=-x^2$ ist. Soll aber $z^2=-x^2$, d. h. $z\cdot z=-x^2$ sein, d. h. soll z etwas sein, was mit sich selbst multiplicirt, $-x^2$ gibt, so müssen wir (da zufolge der Gl. (IX) $\sqrt{(-x^2)}$ a l l e s vorstellt, was mit sich multiplicirt $-x^2$ gibt) unter z uns einen der Werthe von $\sqrt{(-x^2)}$ denken. Wenden wir nun auf $\sqrt{(-x^2)}$, nachdem wir diese Wurzel in $\sqrt{[(-1)x^2]}$ umgeformt haben, die Gl. (36) des §. 60 an ($c=2$, $b=-1$ setzend), so erhalten wir dafür den Ausdruck $\sqrt{(x^2)}\cdot\sqrt{-1}$, von welchem wir aus §. 60 wissen, dass er keinen Werth haben

könne, der nicht zugleich ein Werth von $\sqrt{[(-1)x^2]}$ d. h. von $\sqrt{(-x^2)}$ wäre. Aus der Gl. (c) §. 56 wissen wir ferner, dass x einer der Werthe von $\sqrt{x^2}$ ist, mithin ist, wenn wir den einen der beiden Werthe von $\sqrt{-1}$ wiederum durch i bezeichnen, xi der eine der beiden Werthe von $\sqrt{(-x^2)}$ und folglich nach dem Obigen $-xi$ der zweite derselben.

Es kann sonach das z, wenn es ein Werth von $\sqrt[4]{a}$ sein soll, und x einer der Werthe dieser Wurzel ist, nur $z = x$ oder $z = -x$ oder $z = xi$ oder $z = -xi$ sein. Folglich hat jede vierte Wurzel aus einem von Null verschiedenen Ausdrucke vier von einander verschiedene Werthe, die man erhält, wenn man einen beliebigen derselben nacheinander mit 1, -1, i, $-i$, multiplicirt.

Wir sehen hieraus, dass die allgemeinen Wurzeln 1-, 2-, 3- oder 4deutig sind, je nachdem der Exponent 1, 2, 3 oder 4 ist.

Wir können nun so fortfahren und die Fünfdeutigkeit der 5ten, die Sechsdeutigkeit der 6ten Wurzel, etc. nachweisen aber da dies unsere vorläufigen Zwecke nicht fördert, und der allgemeine Beweis, dass die bte Wurzel aus einem von Null verschiedenen Ausdrucke b von einander verschiedene Werthe habe, einige Kenntnisse aus der Algebra fordert, so begnügen wir uns für jetzt mit dem erhaltenen Resultate.

Nehmen wir endlich in $\sqrt[b]{a}$ den Radikanten der Null gleich an, so gibt die Gl. (IX): $(\sqrt[b]{0})^b = 0$. Da nun $(\sqrt[b]{0})^b$ ein Produkt vorstellt, und solches nach §. 36 nicht Null sein kann, wenn nicht einer der Faktoren Null ist, hier aber kein anderer Faktor vorkommt, als $\sqrt[b]{0}$, so muss $\sqrt[b]{0} = 0$ sein. Es ist also $\sqrt[b]{0}$ ein eindeutiges Zeichen vom Werthe Null.

Hat umgekehrt $\sqrt[b]{a}$ den Werth Null, so ist auch nach §. 63 $(\sqrt[b]{a})^b = 0$, während nach Gl. (IX) $(\sqrt[b]{a})^b = a$ sein muss, mithin muss, wegen der Eindeutigkeit der Potenzen, $a = 0$ sein, d. h. es kann keine Wurzel den Werth Null haben, wenn nicht der Radikand gleich Null ist.

§. 65. *Zusatz.* Wenden wir die Resultate des §. 64 auf den Fall an, dass $a = 1$ ist, so können wir, da (nach §. 61) 1 ein Werth von $\sqrt[b]{1}$ ist, $x = 1$ annehmen, und es hat daher: $\sqrt{1}$ die

Werthe 1 und -1; $\sqrt[3]{1}$ die Werthe 1, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(-3)}$ und $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(-3)}$; $\sqrt[4]{1}$ die Werthe $1, -1, i, -i$. Es lässt sich folglich aus den Resultaten des vorigen §. noch schliessen, dass man alle Werthe von $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}$ erhält, wenn man einen beliebigen ihrer allgemeinen Werthe resp. mit allen Werthen von $\sqrt{1}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$ multiplicirt.

Führen wir hier *Cauchy's* Bezeichnungsweise ein, welcher mehrdeutige Ausdrücke in eine doppelte Klammer schliesst, wenn er alle Werthe derselben gemeint wissen will, während ein mehrdeutiger Ausdruck ohne Doppelklammer bei ihm nur einen seiner Werthe bezeichnet: so lässt sich die zuletzt ausgesprochene Wahrheit so ausdrücken: „Es ist

$$((\sqrt[b]{a}))=\sqrt[b]{a}((\sqrt[b]{1})),$$

welchen Werth von $((\sqrt[b]{a}))$ auch $\sqrt[b]{a}$ vorstellen mag — wenigstens für den Fall, dass b eine der Zahlen 2, 3, 4 ist." Die Gültigkeit dieser Gleichung für jeden Zahlenwerth von b wird erst späterhin vollständig nachgewiesen werden.

§. 66. *Lehrsatz.* Für jeden Zahlenwerth von b, welcher allgemein $((\sqrt[b]{a}))=\sqrt[b]{a}\,((\sqrt[b]{1}))$ macht, sind die Gll. (36) und (37) des §. 60 vollkommene Gleichungen.

Beweis. Ist m einer der Werthe von $((\sqrt[c]{a}))$, und n einer der Werthe von $((\sqrt[c]{b}))$, so dass mn ein Werth von $((\sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}))$ ist, so ist auch, da nach §. 60 $((\sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}))$ keinen Werth hat, der nicht zugleich ein Werth von $((\sqrt[c]{ab}))$ wäre, mn ein besonderer Werth von $((\sqrt[c]{ab}))$, folglich unter der hier gemachten Voraussetzung $((\sqrt[c]{ab}))=mn((\sqrt[c]{1}))$. Anderseits ist $((\sqrt[c]{a}))=m((\sqrt[c]{1}))$ und $((\sqrt[c]{b}))=n\,((\sqrt[c]{1}))$, folglich $((\sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}))=mn((\sqrt[c]{1}))((\sqrt[c]{1}))$, und es ist daher, insofern unter den Werthen von $((\sqrt[c]{1}))$ der Werth 1 mitbegriffen ist, gewiss jeder Werth von $mn\,((\sqrt[c]{1}))\cdot 1$, d. h. von $mn\,((\sqrt[c]{1}))$, mithin (weil dieser letzte Ausdruck, wie wir so eben gesehen haben alle Werthe von $((\sqrt[c]{ab}))$ in sich schliesst) auch jeder Werth

von $((\sqrt[c]{ab}))$, ein Werth von $((\sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}))$. Da nun umgekehrt aus §. 60 bekannt ist, dass $((\sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}))$ keinen Werth hat, der nicht zugleich in $((\sqrt[c]{ab}))$ begriffen wäre, so ist

$$((\sqrt[c]{ab}))=((\sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}))$$

eine vollkommene Gleichung.*)

Ganz ebenso kommt man auf den Schluss, dass die Gl. (37) eine vollkommene ist. Insofern nämlich, wenn m und n besondere Werthe von $\sqrt[c]{a}$ und $\sqrt[c]{b}$ sind, $m:n$ ein besonderer Werth von $\sqrt[c]{a}:\sqrt[c]{b}$, also auch nach §. 60 ein besonderer Werth von $\sqrt[c]{(a:b)}$ ist, so dass $(m:n)((\sqrt[c]{1}))$ alle Werthe der letzten Wurzel umfasst, während andrerseits alle Werthe von $\sqrt[c]{a}:\sqrt[c]{b}$ in

$$\frac{m((\sqrt[c]{1}))}{n((\sqrt[c]{1}))} \text{ d. h. in } \frac{m}{n}\cdot\frac{((\sqrt[c]{1}))}{((\sqrt[c]{1}))}$$

enthalten sind, und mithin, indem man nur für die Wurzel des Divisors den besonderen Werth 1 zu nehmen braucht, auch alle Werthe von

$$\frac{m}{n}((\sqrt[c]{1})) \text{ d. h. von } \sqrt[c]{\frac{a}{b}}.$$

§. 67. *Lehrsatz.* Die Gl. (38) des §. 60, d. h. die Gleichung

*) Davon, dass das Produkt $\sqrt[c]{1}\sqrt[c]{1}$ nicht mehr und nicht andere Werthe haben kann als $\sqrt[c]{1}$, kann man sich auch direkt für jeden Exponentenwerth überzeugen. Für $c=3$ sind z. B., wenn $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ durch p und $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ durch q bezeichnet wird, die Werthe von $((\sqrt[3]{1}))$ durch 1, p und q vorgestellt, die Werthe von $((\sqrt[3]{1}))((\sqrt[3]{1}))$ dagegen, indem man jeden Werth des ersten Faktors mit jedem Werth des zweiten combinirt, $1\cdot 1$, $1\cdot p$, $1\cdot q$, $p\cdot q$, während, wenn man $q\cdot p$ nach §. 40 in eine algebraische Summe verwandelt, $p\cdot q=1$ sich findet. Es reduciren sich also diese Werthe von $\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{1}$ genau auf die Werthe von $\sqrt[3]{1}$.

$\sqrt[bc]{a}=\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$ ist, wenigstens wenn die Exponenten die Zahl 4 nicht übersteigen eine vollkommene Gleichung.

Beweis. Ist m ein Werth von $\sqrt[c]{a}$, und n ein Werth von $\sqrt[b]{m}$, also n ein Werth von $\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$, so hat man

$$((\sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}))=((\sqrt[b]{m[[\sqrt[c]{1}]]}))=((\sqrt[b]{m}))((\sqrt[b]{\sqrt[c]{1}})),$$

während $((\sqrt[b]{m}))=n((\sqrt[b]{1}))$ ist, und demnach, da nach §. 66

$$((\sqrt[b]{1}))((\sqrt[b]{\sqrt[c]{1}}))=((\sqrt[b]{[1\cdot\sqrt[c]{1}]}))=((\sqrt[b]{\sqrt[c]{1}}))$$ ist,

$$((\sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}))=n((\sqrt[b]{\sqrt[c]{1}})).$$

Andererseits ist nach §. 60, da n ein Werth von $\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$ ist, auch n ein Werth von $\sqrt[bc]{a}$; also

$$((\sqrt[bc]{a}))=n((\sqrt[bc]{1})).$$

Da nun hier nur nachzuweisen ist, dass $\sqrt[bc]{a}$ keinen Werth haben könne, der nicht auch ein Werth von $\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$ wäre, so bleibt hiernach nur zu zeigen, dass $\sqrt[bc]{1}$ keinen Werth haben könne, der nicht auch in $\sqrt[b]{(\sqrt[c]{1})}$ mit enthalten wäre. Wenn nun kein Exponent, also namentlich auch nicht bc die Zahl 4 übersteigen soll, so kann nur entweder $b=1$ und $c=4$, oder $b=4$ und $c=1$, oder $b=2$ und $c=2$ gedacht werden. Für die beiden ersten Annahmen versteht sich die Vollkommenheit der Gleichung von selbst, da die ersten Wurzeln eindeutig sind. Was den letzten Fall, d. h. die Gleichung $\sqrt[4]{1}=\sqrt[2]{(\sqrt[2]{1})}$ betrifft, so hat nach dem Obigen $\sqrt[4]{1}$ die Werthe 1, -1, i, $-i$; und $\sqrt[2]{(\sqrt[2]{1})}$ (da der Radikand $\sqrt{1}$ nur die Werthe 1 und -1 hat) die Werthe $\sqrt[2]{1}$ und $\sqrt[2]{-1}$, während die Werthe von $\sqrt[2]{1}$, 1 und -1; die Werthe von $\sqrt[2]{-1}$, i und $-i$ sind. Es hat also gedachte Gleichung volle Geltung.

§. 68. *Zusatz.* Nach §. 66 und 67 sind nunmehr alle bisher vorgekommenen Gleichungen zwischen mehrdeutigen Ausdrükken, falls die Exponenten der darin enthaltenen Wurzeln die Zahlen 1, 2, 3 oder 4 sind, vollkommene Gleichungen mit Ausnahme der Gleichungen

$$\sqrt[b]{(a^b)} = a,\ \sqrt[c]{(a^b)} = (\sqrt[c]{a})^b \text{ und } a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{(a^b)},$$

die aber nach §. 65 vollkommen werden, wenn man sie so schreibt:

$$((\sqrt[b]{[a^b]})) = a((\sqrt[b]{1})),\ ((\sqrt[c]{[a^b]})) = (\sqrt[c]{a})^b((\sqrt[c]{1})),$$
$$a^{\frac{b}{c}}((\sqrt[c]{1}) = ((\sqrt[c]{[a^b]}))$$

Die zweite dieser Gleichungen ist nämlich vollkommen, weil jeder Werth von $(\sqrt[c]{a})^b$ zugleich ein Werth von $\sqrt[c]{(a^b)}$ ist, also mit $((\sqrt[c]{1}))$ multiplicirt, alle Werthe von $\sqrt[c]{(a^b)}$ gibt.

§. 69. *Erklärung der Potenzbenennungen und Bedeutung der negativen und gebrochenen Potenzen.* Es ist üblich, die Potenzen nach ihrem Exponenten zu benennen, so dass man selbige gerade oder ungerade Potenzen nennt, wenn der Exponent eine gerade oder ungerade Zahl ist, negative, gebrochene etc. Potenzen, wenn der Exponent eine negative, gebrochene Zahl, etc. ist.

Sobald wir nun (wozu wir auf Grund der Nachweise in §. 62 berechtigt sind) beim Rechnen mit allgemeinen Potenzen die ganzen Potenzen als gleichgeltend mit dem oben bezeichneten Produkte denken, so müssen wir uns zufolge der Gl. (39) des §. 61 unter jeder negativen Potenz a^{-b}, wenn der Dignand von Null verschieden ist, den Quotienten $\frac{1}{a^b}$ vorstellen. Jede andere Bedeutung für a^{-b} würde mit den allgemeinen Potenzgesetzen (weil die Gl. (39) eine nothwendige Folge derselben ist) in Widerspruch treten. — Da

$$\frac{1}{a^b} = \frac{1^b}{a^b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b$$

ist, so kann man sich auch so ausdrücken: Wollen wir bei einer negativen Potenz a^{-b} noch an etwas weiteres, als an die blosse Potenzform denken, ohne dadurch die Richtigkeit der beim Rechnen mit allgemeinen Potenzen gewonnenen Resultate zu gefährden, so müssen wir darunter das, der *b*ten Potenz des umgekehrten Werthes von a gleiche Produkt denken.

Da $1 : a^b$ nie Null werden kann (s. §. 36), so sieht man, dass negative ganze Potenzen des Werthes Null unfähig sind.

Ist $a = 0$, so führt die Gl. (39) wegen $0^b = 0$ auf $0^{-b} = 1 : 0$,

mithin muss man die negativen Potenzen von Null zu den werthlosen Formen rechnen (vgl. das in §. 59 über die Potenzen von Null Gesagte).

Denken wir uns unter b eine beliebige positive oder negative ganze Zahl und unter c eine beliebige positive ganze Zahl (so dass $b:c$ jeden positiv-, wie negativ-gebrochenen Zahlenwerth vorzustellen fähig ist), so gibt die Gl. (35) des §. 60

$$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{(a^b)}$$

zu erkennen, was man sich unter der positiv- oder negativ-gebrochenen Potenz $a^{\frac{b}{c}}$ vorstellen müsse, wenn man, ohne die Richtigkeit allgemeiner Resultate zu beeinträchtigen, bei denselben an etwas Weiteres, als an die blosse Potenzform denken will. Die Gl. (35) ist aber in gewisser Beziehung unbestimmt, da sie bei der bisher festgehaltenen Eindeutigkeit der Potenzen nur aussagt, dass man sich unter derselben einen der Werthe von $\sqrt[c]{(a^b)}$ (wo a^b einen Produktwerth oder einen Quotientenwerth hat, je nachdem b positiv oder negativ ist) denken dürfe. Welchen Werth wir auswählen wollen, hängt von unserer Willkür ab. Da sich aber bei der bisherigen allgemeinen Auffassung der Wurzeln nichts über deren Werthe dergestalt bestimmen lässt, dass man einen besondern derselben namhaft machen könnte, so ist es auch vor der Hand unmöglich, eine Wahl zu treffen, und man muss sich daher vorläufig mit der angegebenen allgemeinen Bestimmung begnügen.

B. Von den Zahlenpotenzen und Zahlenwurzeln.

§. 70. *Gesetze der Potenzirung und Radikation der Zahlen.* Da die Zahlenpotenz a^b nach §. 6 ein Produkt von b a'en ist (sich also von den ganzen Potenzen des §. 62 nur dadurch unterscheidet, dass hier a eine Zahl, dort ein allgemeines Zeichen ist), so gilt für die Zahlenpotenzen von dem, was für die ganzen Potenzen entwickelt wurde, alles dasjenige, was von der Bedeutung des a unabhängig ist, namentlich also, dass dieselben

eindeutig sind, und auf sie die Gll. (VIII, X, XI, XII) anwendbar bleiben, so dass, weil die Gl. (IX) zugleich die zur Erklärung der Zahlenwurzel (§. 9) dienende Gleichung, mithin auch auf Zahlenpotenzen anwendbar ist — die Gesetze der allgemeinen Potenzen (die ja sämmtlich nur eine Folge ihrer Eindeutigkeit und der Gll. (VIII—XII) sind) zugleich die Gesetze der Zahlenpotenzen sind.

§. 71. *Eindeutigkeit der Zahlenwurzel.* Könnte die Zahlenwurzel, deren Radikanden wir durch m, und deren Exponenten wir durch n vorstellen wollen, mehr als einen (Zahlen-) Werth, etwa ausser einem Werthe a noch einen anderen Werth c haben, so müsste der Wurzel-Erklärung (d. h. der Gl. (IX)) gemäss sowohl a als c, mit n potenzirt, den Radikanden m geben, d. h es müsste $a^n = c^n$ sein. Wenn aber a und c von einander verschieden sind, und etwa $a > c$ ist, so müsste nach §. 52, 10 auch $a^n > c^n$ sein — was gegen die Gl. $a^n = c^n$ spricht. Mithin kann c nicht von a verschieden sein, d. h. es kann ausser der Zahl a keine zweite existiren, welche den Werth von $\sqrt[n]{m}$ hätte.

Wegen dieser Eindeutigkeit der Zahlenwurzeln sind die Wurzelgleichungen des vorigen Kapitels für sie unbedingt richtig.

§. 72. *Allgemeine Anwendbarkeit der Gesetze der Potenzen und Wurzeln.* Der §. 70 berechtigt uns zunächst nur, die im vorigen Kapitel entwickelten Gesetze der Potenzen und Wurzeln auf Zahlen anzuwenden, wenn die erscheinenden Potenzen und Wurzeln Zahlenpotenzen und Zahlenwurzeln (d. h. ganzen Zahlen gleich) sind. Wir dürfen aber die Potenzen und Wurzeln nach jenen Gesetzen auch behandeln, wenn die Zahlen, aus denen sie zusammengesetzt sind, nicht erlauben, ihnen den Werth einer (natürlichen) Zahl beizulegen (wie dies z. B. bei der Wurzel $\sqrt{7}$ der Fall ist), oder wenn die Bestandtheile derselben nicht Zahlen, sondern beliebige Zahlenverbindungen sind (wie z. B. bei $\sqrt{-2}$, $(\frac{2}{3})^{\frac{5}{6}}$ etc.) — weil die Berechtigung, sie nach diesen Gesetzen zu behandeln, nur voraussetzt, dass sich die Gll. (VIII—XII) als richtig und die Potenzformen als eindeutig ansehen lassen. Dass wir aber neben den Bestimmungen über den Sinn der Zahlenpotenzen und Zahlenwurzeln die Gll. (VIII—XII) als rich-

tige ansehen und die Potenzformen als eindeutig denken dürfen, geht aus den Erörterungen des vorigen Kapitels und dem §. 70 hervor *).

Wenn wir sagen, dass die Gesetze des 6ten Kapitels auch angewendet werden dürfen, wenn die dortigen Elemente Zahlenverbindungen vorstellen, so versteht es sich von selbst, dass auch die Einschränkungen zu berücksichtigen bleiben, welche dort diese Gesetze erfahren haben, d. h. dass die Null als Werth für Divisoren, Wurzelexponenten und zum Theil für Potenz-Dignanden ausgeschlossen bleiben muss.

Folgerungen. Bei der Einführung der Zahlen in die Formeln für die allgemeinen Potenzen, Produkte, etc. haben wir die geraden Potenzen negativer (ganzer oder gebrochener) Zahlen nach §. 50 (in ihrer Eigenschaft als Produkte aus einer geraden Anzahl negativer Faktoren) als positive Zahlen, die ungeraden Potenzen dagegen (als Produkte aus einer ungeraden Anzahl negativer Faktoren) als negative Zahlen zu denken.

Bemerkt man weiter, dass alle ganze Potenzen positiver Zahlen als Produkte aus positiven Zahlen, stets positiv sind, dass die ganzen Potenzen von Null stets den Werth Null haben, so wie, dass alles Reelle entweder positiv oder negativ oder Null ist, so erkennt man, dass die geraden Potenzen reeller rationaler Zahlen allemal der Null oder einer positiven (ganzen oder gebrochenen) Zahl gleich sind; die ungeraden Potenzen reeller rationaler Zahlen dagegen positiv, negativ oder Null sind, je nachdem der Dignand positiv, negativ oder Null ist. Da ferner, wenn a eine absolute, b aber eine ganze Zahl ist, a^b einen absoluten Werth hat, so folgt aus

*) Die Gl. (VIII) z. B. verlangte ja nur, dass man sich bei $(a^b)^c$ nichts anderes denken solle, als bei der Form $(a^c)^b$, und diesem Verlangen dürfen wir Folge leisten, da wir überall da, wo $(a^b)^c$ einen bestimmten Sinn hat (wo b und c wirkliche Zahlen sind) darunter dasselbe wie unter $(a^c)^b$ nicht bloss denken dürfen, sondern sogar denken müssen; die Gl. (IX) in Verbindung mit der Bestimmung des §. 62 verlangte ferner nur (um specielle Beispiele anzuführen), dass wir $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7}$ als ein Zeichen für Zahl 7, $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-3}$ als ein Zeichen für die Differenz -3, etc. ansehen, etc.

$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ auch, dass alle negative graden Potenzen absoluter Zahlen positiv sind.

§. 73. *Lehrsatz.* Wenn a eine absolute Zahl ist, so kann $\sqrt[b]{a}$ nie mehr als einen absoluten Werth haben.

Denn wären x und z zwei von einander verschiedene absolute Werthe von $\sqrt[b]{a}$, so müsste sowohl x^b als z^b den Werth a haben, also $x^b = z^b$ sein, während aus §. 52, 10 im Gegentheil folgt, dass $x^b > z^b$ oder $x^b < z^b$ sein muss, je nachdem $x > z$ oder $x < z$ ist.

§. 74. *Lehrsatz.* Wenn die allgemeine Wurzel aus einer absoluten ganzen Zahl keiner ganzen Zahl gleich ist, so ist sie auch keiner gebrochenen absoluten Zahl gleich.

Beweis. Wäre eine in ihren kleinsten Zahlen durch $\frac{m}{n}$ vorgestellte gebrochene Zahl (s. Anhang zu Kap. V. Nr. 12) ein Werth der Wurzel $\sqrt[b]{a}$, in der wir a als absolute ganze Zahl denken, so müsste

$$\left(\frac{m}{n}\right)^b = a$$

sein. Nach Nr. 11 des Anhangs haben aber, wenn m und n, wie hier, relative Primzahlen zu einander sind, m^b und n^b keinen gemeinsamen Theiler; es ist also namentlich m^b kein Vielfaches von n^b, d. h. $\frac{m^b}{n^b}$ keiner ganzen Zahl gleich. Da nun $\frac{m^b}{n^b} = \left(\frac{m}{n}\right)^b$ ist, so kann auch $\left(\frac{m}{n}\right)^b$ nicht den Werth einer ganzen Zahl, namentlich also auch nicht den der Zahl a haben, d. h. es kann $m:n$ kein Werth von $\sqrt[b]{a}$ sein.

§. 75. *Ueber die jedesmalige Existenz eines absoluten Werthes allgemeiner Wurzeln aus absoluten ganzen Zahlen. Die irrationalen Zahlen.* Obgleich nach dem Vorhergehenden die bte Wurzel aus einer ganzen Zahl a unter ihren Werthen keine absolute gebrochene Zahl haben kann, und mithin — wenn nicht zufällig eine ganze Zahl vorhanden ist, welche bmal mit sich multiplicirt, a gibt — keine absolute rationale Zahl existirt, deren bte Potenz den Werth a hat, so lässt sich doch zeigen, dass sich stets

absolute rationale Zahlen angeben lassen, deren *b*te Potenz sich beliebig wenig von a unterscheidet.

Man denke sich zu dem Ende nach einander die *b*ten Potenzen aller (ganzen) Zahlen gebildet, so dass man die Zahlenreihe

$$1^b,\ 2^b,\ 3^b,\ 4^b,\ \ldots . r^b,\ (r+1)^b,\ (r+2)^b, \ldots$$

erhält, in welcher nothwendig (nach §. 52, 10) jede Zahl grösser ist als die vorhergehende, und in welcher die Zahlen endlich jeden noch so grossen gegebenen Werth übersteigen. Alsdann denke man a mit n^b multiplicirt, wo n eine beliebig grosse (ganze) Zahl vorstellt, so dass, weil a als ganze Zahl gleich oder grösser als 1 ist, auch $an^b > 1$ und mithin grösser als 1^b, d. h. grösser als die kleinste Zahl der obigen Reihe ist. Stellt nun $(r+1)^b$ die kleinste Zahl dieser Reihe vor, welche grösser als an^b ist, so liegt an^b in der natürlichen Zahlenreihe zwischen r^b und $(r+1)^b$, und man erhält, wenn man in den Ungleichungen $an^b > r^b$ und $an^b < (r+1)^b$ beiderseits durch n^b dividirt, nach §. 52, 2

$$a > \frac{r^b}{n^b},\ a < \frac{(r+1)^b}{n^b},$$

mithin, wegen $\frac{r^b}{n^b} = \left(\frac{r}{n}\right)^b$, $\frac{(r+1)^b}{n}\left(\frac{r+1}{n}\right)^b$,

$$a > \left(\frac{r}{n}\right)^b,\ a < \left(\frac{r+1}{n}\right)^b,$$

während der Unterschied der absoluten Zahlen $\frac{r+1}{n}$ und $\frac{r}{n}$,

$$\frac{r+1}{n} - \frac{r}{n} = \frac{r+1-r}{n} = \frac{1}{n},$$

also um so kleiner ist, je grösser man n gewählt hatte, und folglich, da n beliebig gross genommen werden kann, so klein werden kann, als man irgend wünschen mag. — Je weniger sich aber $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$ von einander unterscheiden, desto weniger unterscheiden sich nach §. 52, 10 auch ihre *b*ten Potenzen, und somit treten die Werthe $\left(\frac{r}{n}\right)^b$ und $\left(\frac{r+1}{n}\right)^b$ um so näher an a, je grösser n genommen wurde, d. h. man kann durch die Wahl eines hinreichend grossen n den rationalen absoluten Zahlen $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$

solche Werthe geben*), dass ihre bten Potenzen beliebig wenig von a abweichen, also eine Eigenschaft erlangen, welche der von der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ verlangten Eigenschaft (mit b potenzirt genau a zu geben) beliebig nahe kommt.

Die absoluten Zahlen $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$ nennt man, wenn das n in dieser Art gewählt worden ist, Näherungswerthe von $\sqrt[b]{a}$.

Wie gross man auch n annehmen möge, so lassen sich doch noch unendlich viele absolute gebrochene Zahlen denken, die ihrer Grösse nach zwischen $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$ liegen**); und eine wie vollständige Reihe von absoluten rationalen Zahlen man sich auch gebildet denken mag, immer werden noch zwischen jeden zwei auf einander folgenden Zahlen derselben Lücken bleiben, die sich nicht durch angebbare absolute rationale Zahlen ausfüllen lassen. Denn schlösse sich eine absolute rationale Zahl $\frac{\mu}{\nu}$ ihrer Grösse nach unmittelbar an $\frac{r}{n}$ an, so dürfte sich keine absolute rationale Zahl mehr angeben lassen, die zwischen $\frac{r}{n}$ und $\frac{\mu}{\nu}$ läge, während offenbar doch, weil $\frac{\mu}{\nu}=\frac{r}{n}+\left(\frac{\mu}{\nu}-\frac{r}{n}\right)=\frac{r}{n}+\frac{\mu n-\nu r}{\nu n}$ ist, z. B. $\frac{r}{n}+\frac{\mu n-\nu r}{10\nu n}$

*) Wird n grösser genommen, so wird natürlich auch das zugehörige r im allgemeinen grösser, da bei grösserem n auch an^b grösser wird, und demnach die grösste ganze Zahl der obigen Reihe, welche noch von an^b übertroffen wird, und welche vorher mit r^b bezeichnet wurde, an einer späteren Stelle in dieser Reihe liegen, d. h. einem späteren r entsprechen wird.

**) So liegen z. B. zwischen $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$ noch die gebrochenen Zahlen, deren Werthe $\frac{r}{n}+\frac{1}{1000n}$, $\frac{r}{n}+\frac{2}{1000n}$, $\frac{r}{n}+\frac{3}{1000n}$, . . , $\frac{r}{n}+\frac{999}{1000n}$ sind; zwischen $\frac{r}{n}$ und $\frac{r}{n}+\frac{1}{1000n}$ wiederum unter andern die gebrochenen Zahlen, vom Werthe
$\frac{r}{n}+\frac{1}{100000n}$, $\frac{r}{n}+\frac{2}{100000n}$, $\frac{r}{n}+\frac{3}{100000n}$, . . , $\frac{r}{n}+\frac{99}{100000n}$; etc.

d. h. $\frac{10\nu r + \mu n - \nu r}{10\nu n}$ eine angebbare absolute rationale Zahl sein würde, die noch zwischen $\frac{r}{n}$ und $\frac{\mu}{\nu}$ liegt.

Diese Lücken nun zwischen den absoluten rationalen Zahlen, welche sich weder durch ganze noch durch gebrochene Zahlen ausfüllen lassen, denkt man sich durch eine eigene Zahlenart ausgefüllt, die man absolute Irrationalzahlen nennt.

Da bei fortdauernder Einschaltung neuer absoluter rationaler Zahlen zwischen den Gliedern einer schon in grosser Vollständigkeit gedachten Reihe absoluter rationaler Zahlen, wie aus dem eben angeführten Beispiele erhellt, die eingeschalteten Zahlen immer grössere und grössere Nenner (und gleichzeitig daher auch grössere und grössere Zähler) erhalten, so kann man sich die absoluten Irrationalzahlen als Brüche denken, deren Zähler und Nenner unendlich gross sind, d. h. über jedes Mass hinausgehen, die aber wegen der Unherstellbarkeit ihrer Zähler und Nenner nicht mehr als eigentliche gebrochene Zahlen anzusehen sind.

Da man ferner bei fortdauernder Einschaltung absoluter rationaler Zahlen zwischen den gebrochenen Zahlen $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$ auf solche kommt, deren bte Potenzen immer näher und näher an a heranrücken, so denkt man sich unter den zwischen ihnen liegenden Irrationalzahlen auch eine, deren bte Potenz das a genau gibt, nennt dieselbe dann den absoluten Werth von $\sqrt[b]{a}$ und behält für sie (weil eine Bezeichnung unter den Zahlenverbindungen, die durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division gebildet worden sind, nicht gefunden werden kann) das Zeichen $\sqrt[b]{a}$ als Zahlzeichen bei.

Ist A eine Irrationalzahl, so nennt man $+A$ eine positive, $-A$ eine negative Irrationalzahl. Die positiven und negativen Irrationalzahlen werden ferner unter dem Namen der reellen Irrationalzahlen, die rationalen und irrationalen reellen Zahlen unter dem Namen der reellen Zahlen schlechthin, zusammengefasst.

Es ist an sich klar, dass im Allgemeinen das bisher über

reelle rationale Zahlen Gesagte, namentlich die Folgerungen in §. 72, auch auf reelle irrationale Zahlen anwendbar sind.

Zusatz. Sind a und p ganze Zahlen und ist der absolute Werth von $\sqrt[b]{a}$ irrational, so kann $\frac{\sqrt[b]{a}}{p}$ keiner rationalen Zahl gleich sein; denn hätte dieser Quotient den rationalen Werth $\frac{\mu}{\nu}$ (wo μ und ν ganze (positive oder negative) Zahlen vorstellen), so würde aus der Gleichung

$$\frac{\sqrt[b]{a}}{p} = \frac{\mu}{\nu}$$

folgen, dass $\sqrt[b]{a} = p\frac{\mu}{\nu} = \frac{p\mu}{\nu}$ wäre, d. h. (da $p\mu$ und ν positiven oder negativen ganzen Zahlen gleich sind, also $\frac{p\mu}{\nu}$ eine rationale Zahl bezeichnet), dass die irrationale Zahl $\sqrt[b]{a}$ einen rationalen Werth hätte! — Denken wir unter $\sqrt[b]{a}$ ihren absoluten (irrationalen) Werth, und sind $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$ Näherungswerthe desselben, so liegt $\frac{\sqrt[b]{a}}{p}$ zwischen den absoluten rationalen Zahlen $\frac{r}{np}$ und $\frac{r+1}{np}$ *), und ist mithin eine von den zwischen diesen letzten liegenden irrationalen Zahlen.

*) Es ist nämlich $\frac{\sqrt[b]{a}}{p} - \frac{r}{np}$ positiv, weil $\frac{\sqrt[b]{a}}{p} - \frac{r}{np} = (\sqrt[b]{a} - \frac{r}{n}):p$, und in diesem Quotienten (wegen $\sqrt[b]{a} > \frac{r}{n}$) sowohl Divisor als Dividend positiv ist, mithin $\frac{\sqrt[b]{a}}{p} > \frac{r}{np}$. Anderseits ist $\frac{r+1}{np} - \frac{\sqrt[b]{a}}{p}$ positiv, weil diese Differenz gleich $(\frac{r+1}{n} - \sqrt[b]{a}):p$, also (wegen $\frac{r+1}{n} > \sqrt[b]{a}$) gleich einem Quotienten mit positivem Dividenden und Divisor ist; mithin ist $\frac{\sqrt[b]{a}}{p} < \frac{r+1}{np}$, und folglich zwischen $\frac{r}{np}$ und $\frac{r+1}{np}$ enthalten.

§. 76. *Von dem absoluten Werthe der allgemeinen Wurzeln aus absoluten gebrochenen Zahlen.* Sind a und c Zähler und Nenner einer absoluten gebrochenen Zahl, und ist der absolute Werth von $\sqrt[b]{c}$ einer ganzen Zahl p gleich, so ist

$$\sqrt[b]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[b]{a}}{\sqrt[b]{c}} = \frac{\sqrt[b]{a}}{p},$$

und es hat folglich nach der Bemerkung des vorstehenden Zusatzes $\sqrt[b]{(a:c)}$ einen rationalen oder irrationalen absoluten Werth, je nachdem der absolute Werth von $\sqrt[b]{a}$ rational oder irrational ist.

Ist dagegen der absolute Werth von $\sqrt[b]{c}$ irrational, so erhält man, wenn man für $a:c$ den gleichgeltenden Quotienten

$$(ac^{b-1}):(c \,.\, c^{b-1})$$

setzt,

$$\sqrt[b]{\frac{a}{c}} = \sqrt[b]{\frac{ac^{b-1}}{c^b}} = \frac{\sqrt[b]{(ac^{b-1})}}{\sqrt[b]{(c^b)}} = \frac{\sqrt[b]{(ac^{b-1})}}{c},$$

während der letzte Ausdruck, weil ac^{b-1} eine ganze Zahl vorstellt, von derselben Natur ist wie das vorherige $(\sqrt[b]{a}):p$, so dass wiederum $\sqrt[b]{\frac{a}{c}}$ einen absoluten Werth hat, und zwar einen rationalen oder irrationalen Werth, je nachdem $\sqrt[b]{(ac^{b-1})}$ einer rationalen oder einer irrationalen absoluten Zahl gleich ist.

Es ist zugleich hieraus ersichtlich, dass der absolute Werth einer Wurzel aus einer absoluten gebrochenen Zahl, wenn er irrational ist, dadurch erhalten werden kann, dass man den absoluten (irrationalen) Werth einer Wurzel aus einer ganzen Zahl durch eine ganze Zahl dividirt.

§. 77. *Von den allgemeinen Wurzeln aus negativen Zahlen. Erklärung des Imaginären.* Wenn a eine absolute rationale oder irrationale, also $-a$ eine negative rationale oder irrationale Zahl vorstellt, so ist, weil $-a = (-1)a$ ist, nach Gl. (36)

$$\sqrt[b]{-a} = \sqrt[b]{[(-1)a]} = \sqrt[b]{-1} \,.\, \sqrt[b]{a}.$$

Ist nun b eine ungerade Zahl, so ist offenbar -1 ein Werth von $\sqrt[b]{-1}$, und daher sind dann die Werthe von $(-1)\sqrt[b]{a}$, d. h. von $-\sqrt[b]{a}$ zugleich Werthe von $\sqrt[b]{-1}.\sqrt[b]{a}$, d. h. von $\sqrt[b]{-a}$. Da ferner $\sqrt[b]{a}$ allemal einen absoluten rationalen oder irrationalen Werth hat, so hat $\sqrt[b]{-a}$ allemal einen negativen rationalen oder irrationalen, mithin wenigstens einen reellen Werth.

Ist dagegen b eine gerade Zahl, so kann $\sqrt[b]{-a}$ keinen einzigen reellen Werth haben: denn wäre p ein solcher, so müsste $p^b = -a$ sein, während wir aus den Folgerungen des §. 72 wissen, dass alle gerade Potenzen reeller Zahlen entweder positiv oder vom Werthe Null sind, namentlich also p^b nie den Werth $-a$ haben kann.

Alle nicht werthlose Ausdrücke, welche, wie hier die mit geradem Exponenten versehenen Wurzeln aus negativen Zahlen, eines reellen Werthes unfähig sind, nennt man imaginär.

§. 78. *Von den Werthen der Quadratwurzeln aus reellen Zahlen insbesondere.* Bezeichnet man den absoluten Werth einer Quadratwurzel aus einer positiven (rationalen oder irrationalen) Zahl durch p, so ist der zweite Werth derselben nach §. 64 allemal $-p$, also eine negative (rationale oder irrationale) Zahl, und es sind demnach beide Werthe der Quadratwurzeln aus positiven Zahlen reell. Ist dagegen der Radikand negativ, so ist nach dem vorigen §. wegen des geraden Wurzelexponenten keiner ihrer beiden Werthe reell. Da aber, wie wir gesehen haben, stets $\sqrt{-a} = \sqrt{-1}.\sqrt{a}$ ist, und $\sqrt{a}$ nur reelle Werthe hat, so lässt sich jede Quadratwurzel aus einer negativen Zahl auf die Form eines Produkts bringen, dessen einer Faktor reell und dessen anderer Faktor die $\sqrt{-1}$ ist. Stellt man also den absoluten Werth von $\sqrt{a}$ durch p, und den einen Werth von $\sqrt{-1}$ wiederum (wie in §. 64) durch i vor, so sind die beiden Werthe von $\sqrt{-a}$, pi und $-pi$.

§. 79. *Lehrsätze.* I. Weiss man, dass $a+bi=0$ ist, und stellen dabei a und b reelle Zahlen, und i einen Werth von $\sqrt{-1}$ vor, so ist nothwendig $a=0$ und $b=0$.

Es muss nämlich 1) $b=0$ sein. Denn aus der Gl. $a+bi=0$

folgt, wenn man jederseits a subtrahirt, $bi = -a$; wäre also das b von Null verschieden, so dürfte man dasselbe als Divisor zulassen, und es müssten daher wiederum gleiche Ausdrücke entstehen, wenn man die gleichen Ausdrücke bi und $-a$ durch b dividirte, d. h. es müsste

$$\frac{bi}{b} = \frac{-a}{b}, \text{ d. i. } i = -\frac{a}{b}$$

sein, und man käme folglich auf den Widerspruch, dass das imaginäre i einem Quotienten reeller Zahlen, also etwas Reellem gleich sei.

Es muss 2) $a = 0$ sein, weil wegen $b = 0$, die Gleichung $a + bi = 0$ sich auf $a = 0$ reducirt.

II. Weiss man, dass $a + bi = \alpha + \beta i$ ist, und dabei a, b, α, β reelle Zahlen vorstellen, so ist nothwendig $a = \alpha$ und $b = \beta$.

Es folgt nämlich aus der vorstehenden Gleichung, indem man auf jeder Seite $\alpha + \beta i$ subtrahirt,

$$a + bi - (\alpha + \beta i) = 0, \text{ d. h. } (a - \alpha) + (b - \beta) i = 0,$$

mithin nach dem vorigen Lehrsatze, da $a - \alpha$ und $b - \beta$ reell sind, dass $a - \alpha = 0$ und $b - \beta = 0$, d. h. $a = \alpha$ und $b = \beta$ sein muss.

§. 80. *Anmerkung.* Werden bei der Auflösung von Rechnungsaufgaben Wurzeln aus absoluten Zahlen in die Rechnung eingeführt, welche das Mass bestimmter Grössen ausdrücken, so dürfen dieselben natürlich nur ihre absoluten Werthe vorstellen und sind daher durch die ganze Rechnung hindurch als eindeutig zu behandeln *). Handelt es sich um Grössen, denen man eine besondere Deutung gegeben hat, wenn ihre Masszahl mit einem (—) Zeichen versehen ist, hat also jeder reelle Wurzelwerth, auf die Grösseneinheit bezogen, einen vorausbestimmten Sinn, **) so müssen die Wurzeln als eindeutig oder mehrdeutig angesehen werden, je nachdem sie einen oder mehrere reelle Werthe haben: Bilden sich aber die Wurzeln erst im Verlaufe der Rechnung, so dass

*) Drückte z. B. eine in der Rechnung vorkommende Wurzel, etwa die Wurzel $\sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2]}$, die Entfernung zweier Punkte im Raume aus, so könnte dieselbe nur als eindeutiges Zeichen gelten, weil negative und imaginäre Entfernungen Undinge sind, also nur ihr absoluter Werth einen Sinn hat.

**) Wie dies unter andern mit den Coordinatenwerthen in der analytischen Geometrie der Fall ist.

sie keine bestimmte Beziehung zu Grössen haben, so sind dieselben stets als mehrdeutig, ihre reellen wie ihre imaginären Werthe vorstellend, zu behandeln, und man darf dann z. B. namentlich nicht $2\sqrt{a}+5\sqrt{a}$ mit $7\sqrt{a}$, nicht $(2\sqrt{a})(3\sqrt{a})$ mit $6a$, etc. verwechseln (sondern könnte für sie höchstens die ihnen vollkommen gleichen Ausdrücke $(2\pm5)((\sqrt{a}))$, $\pm6a$, etc. anwenden), so lange man nicht weiss, ob die beiden in diesen Ausdrücken vorkommenden Wurzeln einen und denselben ihrer Werthe vorstellen. In vielen Fällen entscheidet indess die Art, wie man auf die Wurzel gekommen ist, ob sie gleichzeitig einerlei Werthe repräsentiren oder nicht.*)

§. 81. *Einführung eindeutiger reeller Potenzen.* Im §. 69 stand der Einführung eines völlig bestimmten Werthes für Potenzen mit positiv- oder negativ-gebrochenem Exponenten der Umstand im Wege, dass sich aus den Werthen der Wurzel, von denen einer als Werth für dieselben hätte ausgewählt werden müssen, keiner allgemein namhaft machen liess. Nachgehend haben wir aber (in §. 73, 75, 76) erkannt, dass sich bei den Wurzeln aus absoluten Zahlen ein Werth dadurch vor allen anderen auszeichnet, dass er ausschliesslich einer absoluten Zahl gleich ist; mithin haben wir den Werth der gebrochenen Potenz $a^{\frac{b}{c}}$ vollkommen bestimmt, wenn wr dieselbe für gleichbedeutend mit dem absoluten Werthe von $\sqrt[c]{(a^b)}$ erklären. Doch ist diese Erklärung nur dann anwendbar, wenn a^b positiv ist, weil nur in diesem Falle $\sqrt[c]{(a^b)}$ einen absoluten Werth hat. Diese Bedingung ist aber unter andern erfüllt, so oft a einen absoluten Werth hat, mag b positiv oder negativ sein; folglich lassen namentlich die (positiv-

*) Als Beispiel diene folgendes: Ist $(x+5)^2=27$, und stellen a und b diejenigen reellen Zahlen vor, welche, für x gesetzt, dieser Gleichung genügen, so ist [wegen $x+5=((\sqrt{27}))=\pm\sqrt{27}$] $a=-5+\sqrt{27}$, $b=-5-\sqrt{27}$, und daher $a+b=-10+\sqrt{27}-\sqrt{27}$. Hier ist aber die im Werthe von a vorkommende Wurzel $\sqrt{27}$ nothwendig dieselbe, wie die im Werthe von b enthaltene; wird also von der ersten Wurzel der absolute oder der negative Werth genommen, so muss von der zweiten gleichfalls resp. der absolute oder der negative Werth genommen werden, so dass jederzeit $\sqrt{27}-\sqrt{27}=0$ ist, und somit für $a+b$ ausschliesslich der Werth -10 gesetzt werden darf.

oder negativ-) gebrochenen Potenzen absoluter Zahlen die genannte Erklärung zu. Soll aber diese Erklärung nicht von zu eingeschränktem Nutzen sein, so muss sie auch passend bleiben, wenn $\frac{b}{c}$ einer positiven oder negativen ganzen Zahl gleich ist, weil ihrer Benutzung sonst jedesmal die Untersuchung vorausgehen müsste, ob b ein Vielfaches von c ist oder nicht. Ist aber $b:c$ eine positive oder negative ganze Zahl, so ist, wie wir wissen, weil a absolut vorausgesetzt worden, $a^{\frac{b}{c}}$ allemal positiv, mithin auch (insofern $a^{\frac{b}{c}}$ stets einen der Werthe von $\sqrt[c]{(a^b)}$ vorstellt) dem absoluten Werthe von $\sqrt[c]{(a^b)}$ gleich. Die Erklärung bleibt sonach anwendbar auf alle Potenzen absoluter Zahlen, deren Exponenten einen reellen rationalen Werth haben.

Wir werden diese Potenzen vor den übrigen reellen (d. h. mit reellen Exponenten versehenen) Potenzen (von denen übrigens erst wieder in der zweiten Abtheilung dieser Schrift die Rede sein wird) in Zukunft durch den Namen „reelle eindeutige Potenzen" auszeichnen.

§. 82. *Von den Werthen der Potenzen von Null.* Dass 0^m, wenn m eine absolute ganze Zahl ist, mit dem Werthe Null belegt werden darf und muss, ist schon im §. 63 angegeben worden. Ist m eine absolute gebrochene Zahl, etwa $b:c$, so muss nach Gl. (35), $0^m = \sqrt[c]{(0^b)} = \sqrt[c]{0}$ und mithin wiederum gleich Null sein. Ist dagegen m eine negative ganze Zahl, so ist nach §. 69 0^m werthlos, und ebenso wenn m eine negativ-gebrochene Zahl, etwa gleich $\frac{-\beta}{\alpha}$ ist, weil nach Gl. (35) dann $0^m = \sqrt[\alpha]{(0^{0-\beta})} = \sqrt[\alpha]{(1:0)}$ sein müsste.

Von den reellen Potenzen von Null haben daher nur die mit absoluten Exponenten einen Sinn, nämlich den Werth Null, und ausserdem noch die nullte Potenz von Null, 0^0, welche nach §. 59 ebensowohl des Werthes 0 als des Werthes 1 fähig ist.

Achtes Kapitel.

Von den allgemeinen eindeutigen Logarithmen und deren Beziehungen zu den allgemeinen eindeutigen Potenzen und den allgemeinen Wurzeln.

§. 83. *Erklärung.* Wir denken uns unter einem allgemeinen Logarithmen ein Zeichen von der Form $\log_a b$, welchem die in der Gleichung

(XIII) $$a^{\log_a b} = b$$

ausgedrückte Eigenschaft (die Potenz hier als allgemeine eindeutige Potenz aufgefasst) zukommt.

Nennt man hierbei b den Logarithmanden (oft auch Numerus genannt) und a die Basis des Logarithmen, so lässt sich der Inhalt der Gl. (XIII) auch so aussprechen:

„Die Basis eines Logarithmen, mit dem Logarithmen selber potenzirt, ist ein mit dessen Logarithmanden vertauschbares Zeichen."

§. 84. *Eindeutigkeit der Logarithmen.* In der allgemeinen Potenzlehre (Kap. VI) sind Potenzen mit gleichen Dignanden nicht in der Art mit einander verglichen worden, dass wir Veranlassung hätten, die Potenzen a^m und a^n, wenn m und n von einander verschieden sind, bei irgend welcher Beziehung zwischen diesen Exponenten als allgemein mit einander vertauschbar anzusehen. Im Besonderen dagegen haben wir 1) die Potenzen a^m und a^n bei jeglicher Beschaffenheit des m und n als gleich erkannt, wenn $a=1$ ist, und 2) wenn $a=0$ ist, wenigstens überall, wo wir den Potenzen von Null eine Bedeutung gestatten dürfen.

Wir dürfen daher, ohne gegen eine der früheren Bestimmungen zu verstossen, wofern nur weder $a=1$ noch $a=0$ ist, a^m und a^n als von einander verschieden erklären, so oft m und n

von einander verschieden sind, und folglich $m=n$ erklären, so oft $a^m = a^n$ befunden wird.

Bezeichnen wir a^m und a^n durch b, so ist der Gl. (XIII) zufolge $m=\log_a b$, $n=\log_a b$, und wir können uns daher nun auch so ausdrücken: „Keine der früheren Annahmen gebietet, einem Logarithmen mehr als einen Werth zuzuschreiben, wofern nur die Basis weder gleich Null noch gleich Eins ist.“

Wir untersuchen sonach in diesem Kapitel (die Null und die Eins als Basis ausschliessend) die aus (XIII) fliessenden Eigenschaften der Logarithmen vorläufig unter der Bedingung, dass dieselben eindeutige Zeichen seien, uns vorbehaltend, späterhin die Eigenschaften mehrdeutiger Logarithmen aufzusuchen, wenn uns andere als die allgemeinen eindeutigen Potenzen auf solche führen sollten.

§. 85. *Von den besonderen Logarithmenwerthen.* Die Gl. (XIII) spricht einer Potenz, nämlich der Potenz $a^{\log_a b}$ einen besonderen Werth, b, zu. Es könnte dieselbe daher nur da mit früheren Bestimmungen in Widerspruch treten, wo schon bestimmte Werthe für die allgemeinen (eindeutigen) Potenzen existiren, d. h. nur da, wo die Potenz $a^{\log b}$ in eine der schon mit bestimmtem Werthe versehenen Potenzformen des §. 59 übergeht, also, da wir die Eins und die Null als Basis schon ausgeschlossen haben, nur dann, wenn $b=a$ oder $b=1$ oder $b=0$ ist.

1) Für $b=a$ liefert die Gl. (XIII) $a^{\log a}=a$*), während nach §. 59 (Gl. 31) eine Potenz ihrem Dignanden dann gleich wird, wenn der Exponent gleich Eins ist. Soll daher die Eindeutigkeit der Logarithmen festgehalten werden, und die Uebereinstimmung der Gl. (XIII) mit den früheren Potenzeigenschaften bestehen bleiben, so muss man

$$(47) \qquad \log_a a = 1$$

denken, d. h. die Einheit als besonderen Logarithmenwerth für den Logarithmen der Basis aufnehmen.

*) Hier, wie in den folgenden §§. haben wir beim Logarithmenzeichen die Basis nicht mit hingeschrieben, und ist hier, wie in der Folge in diesem Abschnitte überall, der Buchstabe a als solche hinzuzudenken.

2) Für $b = 1$ gibt ferner die Gl. (XIII) $a^{\log 1} = 1$, während wir aus §. 59 (Gl. 29) wissen, dass eine Potenz der Einheit gleich wird, wenn der Exponent Null ist; mithin müssen wir, wenn wir die Eindeutigkeit der Logarithmen festhalten, und Uebereinstimmung mit dem Früheren herbeiführen wollen,

(48) $$\log 1 = 0$$

als einen zweiten besonderen Logarithmenwerth gelten lassen.

3) Für $b = 0$ endlich geht die Gl. (XIII) in $a^{\log 0} = 0$ über, während wir Potenzen mit dem Werthe Null bisher nur da kennen gelernt haben, wo zugleich der Dignand Null war. Da aber a hier als von Null verschieden vorausgesetzt wird, so müssen wir vorläufig die Zulässigkeit des Zeichens $\log 0$ dahingestellt sein lassen.

Wir sehen also, dass wenn man die Form $\log 0$ nicht rechnet, die Gl. (XIII) auch mit den besonderen Potenzwerthen sich verträgt und dass in (47) und (48) uns zwei besondere Logarithmenwerthe erwachsen sind.

§. 86. *Wichtigste Gesetze für die allgemeinen eindeutigen Logarithmen.* Von den Beziehungen zwischen den Logarithmen, Potenzen und Wurzeln, welche sich aus der Gl. (XIII) herleiten lassen, heben wir die folgenden als die wichtigsten hervor:

(49) $$\log b + \log c = \log(bc)$$

(50) $$\log b - \log c = \log\frac{b}{c}$$

(51) $$\log(b^c) = c \log b$$

(52) $$\log\sqrt[c]{b} = \frac{\log b}{c}$$

wo sämmtliche Logarithmen einer und derselben Gleichung auf einerlei Basis (die wir a nennen wollen) zu beziehen sind.

B e w e i s d e r G l e i c h u n g (49). Da die Basis a, mit $\log bc$ potenzirt, nach §. 83 den Logarithmanden bc wiedergeben soll, so fordert die Gl. (49), dass diese Basis auch mit der Summe $\log b + \log c$ (insofern selbige mit $\log(bc)$ identisch sein soll) potenzirt, bc gebe, d. h. dass

$$a^{\log b + \log c} = bc$$

sei. Es ist dies aber in der That der Fall, da nach Gl. (X) $a^{\log b + \log c} = a^{\log b} a^{\log c}$, und nach Gl. (XIII), $a^{\log b} = b$, $a^{\log c} = c$ ist. Da nun überdies vermöge der Eindeutigkeit der Logarithmen

nicht Ausdrücke von verschiedenem Werthe die Eigenschaft haben können, dass mit ihnen das a potenzirt bc gibt, so muss $\log b + \log c$ mit $\log(bc)$ einen und denselben Werth vorstellen.

Beweis der Gleichung (50). Die Ausdrücke der Gl. (50) sind einander gleich, weil beide zu $\log c$ addirt, auf gleiche Ausdrücke führen. Es ist nämlich einerseits

$$(\log b - \log c) + \log c = \log b,$$

andererseits nach Gl. (49)

$$\log\frac{b}{c} + \log c = \log\left(\frac{b}{c}\cdot c\right) = \log b.$$

Beweis der Gleichung (51). Da a mit $\log(b^c)$ potenzirt, nach §. 83 dem Logarithmanden b^c gleich wird, so kann $\log(b^c)$ mit $c\log b$ nicht gleichgeltend sein, wenn nicht auch a mit $c\log b$ potenzirt, den Werth von b^c hat. Dies ist aber in der That der Fall, da nach Gl. (XII)

$$a^{c\log b} = (a^{\log b})^c,$$

also, weil nach Gl. (XIII) $a^{\log b} = b$ ist, auch $a^{c\log b} = b^c$ hervorgeht.

Bedenkt man daher, dass in Folge der Eindeutigkeit der Logarithmen nicht Ausdrücke von verschiedenem Werthe die Eigenschaft haben, dass das a mit ihnen potenzirt, denselben Ausdruck b^c gibt, so sieht man, dass $\log b^c$ auch keinen anderen Werth als den von $c\log b$ vorstellen könne.

Beweis der Gleichung (52). Die Ausdrücke der Gl. (52) sind einander gleich, weil beide mit c multiplicirt Resultate von gleichem Werthe geben. Es ist nämlich sowohl

$$\frac{\log b}{c}c = \log b,$$

als auch, in Folge der Gl. (51),

$$(\log \sqrt[c]{b})\,c = \log(\sqrt[c]{b})^c = \log b.$$

Zusatz. *Die Werthlosigkeit der Form* $\log 0$. Die Gleichung (49) geht für $c=0$ in $\log 0 = \log b + \log 0$ über und liefert demnach $\log b = \log 0 - \log 0$. Hätte daher $\log 0$ irgend einen Werth, so würde diese letzte Gleichung durch $\log b = 0$ ersetzt werden dürfen, und diese Gleichung müsste richtig sein für jeden Werth von b. Setzte man also in Gleichung (XIII) $\log b = 0$, so erhielte man $a^0 = b$ als eine Gleichung, welche

für jedes von Null und Eins verschiedene a und für jedes b gelten müsste, während wir andererseits wissen, dass in diesem Falle allemal $a^0 = 1$ ist. Da folglich die Annahme, log 0 habe einen Werth, auf einen Widerspruch mit dem schon Festgestellten leitet, so müssen wir den Logarithmen von Null als werthlos aus den Rechnungen verweisen.

Neuntes Kapitel.

Von den Zahlenlogarithmen und den reellen Logarithmen mit absoluter Basis.

§. 87. *Die Zahlenlogarithmen und ihre Gesetze.* Unter dem Zahlenlogarithmus $\log_a b$, in welchem b und a absolute ganze Zahlen vorstellen, denken wir uns dem §. 9 gemäss die Zahl, mit welcher man a potenziren muss, um zur Zahl b zu gelangen, d. h. eine Zahl, deren Eigenschaft noch durch die Gl. (XIII) ausgedrückt wird. Schliessen wir wiederum die Eins als Basiswerth aus (die Null schliesst sich hier von selbst aus, da a und b als natürliche Zahlen vorausgesetzt sind), so ist derselbe, so oft er existirt, eindeutig; denn hätte er in einem Falle zwei von einander verschiedene Werthe x und y, so hätten a^x und a^y einen und denselben Werth b, während nach §. 52, 9 nicht $a^x = a^y$ sein kann, wenn nicht $x = y$ ist.

Da nun die Eindeutigkeit der Logarithmen und die Gültigkeit der Gl. (XIII) die einzigen Grundlagen der Gesetze der allgemeinen Logarithmen des vorigen Kapitels bilden, so sind die Gesetze des §. 86 zugleich auf Zahlenlogarithmen anwendbar.

Zusätze. 1. Da a hier eine ganze Zahl vorstellt, die von Eins verschieden und mithin grösser als Eins ist, so ist nach §. 52, 9 nothwendig $a^x > a^y$, so oft $x > y$ ist; mithin gehört einem grösseren Logarithmanden auch stets ein grösserer Zahlenlogarithmus an, und umgekehrt einem grösseren Zahlenlogarithmus ein grösserer Logarithmand.

2. Bei gegebener Basis a entspricht jedem (ganzen) Zahlenwerth des Logarithmen auch ein Logarithmand, nicht aber kann jede Zahl den Logarithmanden eines Zahlenlogarithmus vorstellen. Da nämlich $\log a = 1$, $\log a^2 = 2$, $\log a^3 = 3$, $\log a^4 = 4$, etc. die aufeinanderfolgenden Werthe der zur Basis a gehörenden Loga-

rithmen sind, so entbehren alle zwischen a und a^2, zwischen a^2 und a^3, zwischen a^3 und a^4, etc. liegenden Zahlen, als Logarithmanden genommen, eines (ganzen) Logarithmenwerthes.

§. 88. *Erklärung der reellen Logarithmen mit absoluter Basis.* Wir nennen, wenn a eine absolute ganze oder gebrochene, aber von Eins verschiedene Zahl vorstellt, das Zeichen $\log_a b$ den reellen Logarithmen von b für die Basis a, wenn darunter jeder reelle Werth x gedacht werden soll, welcher die Eigenschaft hat, $a^x = b$ zu machen — mit der Bedingung jedoch, dass a^x die in §. 81 definirte reelle eindeutige Potenz bedeute.

Ist x eine positive oder negative ganze Zahl, so ist nach §. 72 auch a^x positiv. Dasselbe findet statt, wenn x positiv oder negativ gebrochen, etwa gleich $\frac{\alpha}{\beta}$ oder $-\frac{\alpha}{\beta}$ ist, weil dann a^x resp. den absoluten Werth der Wurzeln $\sqrt[\beta]{(a^\alpha)}$ und $\sqrt[\beta]{(a^{-\alpha})}$ vorstellt.

Somit kann, da hier x reell vorausgesetzt wird, der Logarithmand eines reellen Logarithmen nie etwas anderes als eine absolute Zahl sein.

§. 89. *Eindeutigkeit der reellen Logarithmen.* Um zu untersuchen, ob die reellen Logarithmen eindeutig seien, bezeichnen wir den $\log b$ einmal durch x und einmal durch y, so dass man nach Gl. (XIII) die Gleichungen $a^x = b$ und $a^y = b$, und folglich auch die Gleichung $a^x = a^y$ erhält — und sehen zu, ob diese letzte Gleichung sich mit der Annahme verträgt, dass x und y von einander verschieden seien.

Dass x und y nicht verschiedene positive ganze Zahlen sein können, ist unmittelbar klar, da a als Basis eines reellen Logarithmen eine absolute (von Eins verschiedene) Zahl ist und nach §. 52, 9, wenn x als die grössere der beiden Zahlen x und y vorausgesetzt wird, $a^x > a^y$ oder $a^x < a^y$ hervorgeht, je nachdem $a > 1$ oder $a < 1$ ist.

Ebenso folgt, dass x und y nicht verschiedene negative ganze Zahlen sein können, da, wenn $x = -u$, $y = -v$ gesetzt wird, $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^u$, $a^y = \left(\frac{1}{a}\right)^v$ ist, und $u > v$ vorausgesetzt, wie-

derum nach §. 52, 9, $\left(\frac{1}{a}\right)^u \gtrless \left(\frac{1}{a}\right)^v$ folgt, je nachdem $\frac{1}{a} \gtrless 1$ d. h. $a \lesseqgtr 1$ ist.

Ferner kann nicht der eine von den Exponenten x und y eine positive, der andere eine negative ganze Zahl sein; denn wäre x positiv, und $y = -v$, so würde, nach §. 52, 9, wenn $a > 1$ ist, $a^x \geqq a^1 \geqq a$, $a^y = \left(\frac{1}{a}\right)^v \leqq \frac{1}{a}$ mithin gewiss kleiner als a sein; während, falls $a < 1$ ist, $a^x \leqq a$, $a^y > a$ folgen würde.

Somit können dem $\log b$ nicht zwei von einander verschiedene reelle ganze Zahlenwerthe zukommen.

Es kann aber auch nicht ein Werth von $\log b$, etwa x, gleich Null und der andere eine reelle ganze Zahl sein, weil dann $a^x = a^0 = 1$, $a^y \gtrless 1$ folgen würde.

Endlich können auch nicht zwei verschiedene reelle gebrochene Zahlenwerthe für $\log b$ existiren. Denn nimmt man $x = \frac{\alpha}{\beta}$, $y = \frac{\gamma}{\delta}$, so hat man nach §. 81, da $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma\beta}{\beta\delta}$ ist,

$$a^x = \sqrt[\beta\delta]{(a^{\alpha\delta})}, \quad a^y = \sqrt[\beta\delta]{(a^{\beta\gamma})},$$

oder, weil hier die absoluten (also eindeutigen) Wurzeln gemeint sind, nach §. 57 Gl. (23),

$$a^x = \left(\sqrt[\beta\delta]{a}\right)^{\alpha\delta}, \quad a^y = \left(\sqrt[\beta\delta]{a}\right)^{\beta\gamma}.$$

Da nun $\sqrt[\beta\delta]{a}$ von absolutem Werthe ist, und $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ positive oder negative ganze Zahlen sind, so kann, dem Obigen zufolge nicht $a^x = a^y$ sein, wenn nicht auch $\alpha\delta = \beta\gamma$, d. h. (diese Gleichung durch $\beta\delta$ dividirend) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, also $x = y$ ist.

§. 90. *Gesetze für die reellen Logarithmen.* Wegen der im vorigen §. bewiesenen Eindeutigkeit und der in der Erklärung des §. 88 liegenden Gültigkeit der Gleichung (XIII) unterscheiden sich die Gesetze der reellen Logarithmen nicht von denen der allgemeinen eindeutigen Logarithmen des vorigen Kapitels.

§. 91. *Von der jedesmaligen Existenz der reellen Logarithmen.* Von der Existenz der reellen Logarithmen gilt dasselbe, was

von der Existenz der absoluten Werthe der Wurzeln aus absoluten Zahlen gesagt worden ist.

Handelt es sich z. B. um den zur Basis a gehörenden Logarithmen von b, wo wir zunächst $a > 1$ denken wollen, so bilde man die steigende Zahlenreihe

$$a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, \ldots . a^r, a^{r+1}, \ldots .$$

von denen die kleinste $a^0 = 1$ ist, die folgenden aber fort und fort grösser werden und jede noch so grosse Zahl zu übersteigen im Stande sind. Ferner denke man sich n als eine beliebige sehr grosse ganze absolute Zahl, so dass, wenn $b > 1$ ist, wie wir hier vorläufig voraussetzen, $b^n > 1$ und zwischen zwei Zahlen jener Reihe, etwa zwischen a^r und a^{r+1} liegt. Aus $b^n > a^r$ und $b^n < a^{r+1}$ folgt dann $b > a^{\frac{r}{n}}$ und $b < a^{\frac{r+1}{n}}$, während, wenn $\log b$ eines reellen Werthes z fähig ist, nach Gl. (XIII) $b = a^z$ sein müsste. Existirt also ein solches z, so muss (wie sich aus den Erörterungen des §. (89) leicht folgern lässt) dasselbe zwischen $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$, welche Quotienten sich nur um den sehr geringen Werth $\frac{1}{n}$ von einander unterscheiden, enthalten sein.

Da nun n beliebig gross und mithin $\frac{1}{n}$ beliebig klein gewählt werden kann, so lassen sich die Grenzen $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$, zwischen denen das z liegen muss, beliebig eng ziehen, und man kommt daher durch dieselbe Schlussweise, wie die in §. 75 angewendete auf das Resultat, dass, falls dem $\log b$ kein in endlichen Ziffern darstellbarer d. h. kein rationaler Werth beigelegt werden könnte, doch gebrochene Zahlen sich angeben lassen, deren Eigenschaft sich von der durch das Zeichen $\log b$ geforderten Eigenschaft (nämlich b zu geben, wenn man damit das a potenzirt) so zu sagen, beliebig wenig unterscheidet; und dass sich diese gebrochenen Zahlen als Näherungswerthe für $\log b$ gebrauchen lassen, die um so genauer ausfallen, je grösser der Werth ihrer Nenner (und hiermit zugleich ihrer Zähler) gestiegen ist. Gestehen wir also dem $\log b$ einen rellen Werth zu, auch wenn ihm kein angebbarer rationaler Zahlenwerth zukommt, so müssen wir ihn als irrational ansprechen, d. h. ihn mit einem Bruche von unend-

lich grossem Zähler und Nenner vergleichen. Der $\log b$ repräsentirt dann bloss die in Gl. (XIII) ausgesprochene Eigenschaft und verhält sich daher etwa zu den Brüchen, wie die Brüche zu den wirklichen (natürlichen) Zahlen *).

Sollte $b < 1$ sein, so dass, wenn n wiederum eine absolute ganze Zahl vorstellt, $b^n < 1$, also $b^{-n} > 1$ ist, so wird man nicht mehr b^n, wohl aber b^{-n} zwischen zwei auf einander folgenden Zahlen der obigen Zahlenreihe liegen finden, und kommt dann, auf dieselbe Weise wie vorher, auf den Schluss, dass der etwa existirende Werth von $\log b$ zwischen den beliebig wenig von ein-

*) Bei den Brüchen war das Räsonnement folgendes: Sind μ und ν (natürliche) Zahlen und ist dabei μ kein Vielfaches von ν, so existirt keine (natürliche) Zahl, welche als Werth des Quotienten $\mu : \nu$ angesprochen werden kann. Man kann dann auch nicht fragen, ob dennoch $\mu : \nu$ einen Werth habe, weil $\mu : \nu$ in diesem Falle, so lange nur von natürlichen Zahlen gesprochen worden ist, keinen Sinn als Zahlzeichen hat. Man könnte höchstens neue (von den natürlichen Zahlen verschiedene) Zahlen schaffen, denen sich das $\mu : \nu$ einreihen lässt. Zu dem Ende führten wir das Quotientenzeichen $\mu : \nu$, um auf dasselbe die Gesetze der Zahlenquotienten anwenden zu können, zunächst nur als ein Zeichen ein, welches für x in das Zeichen $x \cdot \nu$ gesetzt, eine Zusammenstellung gibt, die wir uns vornahmen, als Zeichen für die Zahl μ zu gebrauchen, und nannten dann dieses Zeichen $\mu : \nu$ einen Bruch.

Ebenso verhält es sich mit den irrationalen Wurzeln des §. 75, und verhält es sich mit dem hier besprochenen reellen Logarithmus $\log b$. Gibt es keine reelle rationale Zahl, welche sich als Werth von $\log b$ betrachten lässt, so kann man auch nicht fragen, ob $\log b$ dennoch einen reellen Werth habe, weil andere als **rationale** reelle Werthe für uns noch nicht existiren. Man könnte höchstens neue (von den reellen rationalen Zahlen verschiedene) Zahlen schaffen, denen sich das Zeichen $\log b$ einreihen lässt. Zu dem Ende führen wir den $\log b$, um auf denselben die Gesetze der rationalen reellen Logarithmen anwenden zu können, zunächst nur als ein Zeichen ein, welches, wenn es für x in das Potenzzeichen a^x gesetzt wird, eine Zusammenstellung liefert, die wir uns vornehmen, als Zeichen für die absolute Zahl b zu gebrauchen.

Derlei Ausdrücke lassen sich dann nebst den nicht rationalen Wurzeln des §. 75 und 76 unter dem Titel irrationaler Zahlen in die Reihe der nach ihrer Grösse geordneten rationalen Zahlen (der Ausdruck $\log b$ zwischen $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$) eingeschaltet und dadurch eine neue Zahlenreihe (unter dem Namen: Reihe der reellen Zahlen) gebildet denken.

ander verschiedenen negativen Zahlen $-\frac{r}{n}$ und $-\frac{r+1}{n}$ liegen muss, und daher der $\log b$, falls er nicht in endlichen Ziffern darstellbar ist, als negative Irrationalzahl in die Reihe der reellen rationalen Zahlen eingeschaltet gedacht werden kann.

Nimmt man an, es sei $a < 1$, so ändert sich nichts weiter an dem vorstehenden Räsonnement, als dass die obige Zahlenreihe eine von Eins an abnehmende wird, also a^1, a^2, a^3, ... echte Brüche werden, und dass man deswegen in dem Falle, wo $b > 1$ ist, b^{-n} statt b^n einführen muss, so wie in dem Falle, wo $b < 1$ ist, nicht b^{-n} sondern b^n in Betracht zu ziehen hat — wobei man dann im ersten Falle auf negative, im zweiten Falle auf positive Irrationalzahlen stösst.

§. 92. *Zusatz.* Aus dem vorigen §. folgt, dass bei einer logarithmischen Basis, die grösser als Eins ist, die Logarithmen derjenigen absoluten Zahlen, die kleiner als Eins sind, positiv, die Logarithmen der echten Brüche dagegen negativ sein müssen, während das Umgekehrte der Fall ist, wenn die Basis kleiner als Eins ist.

Zweiter Abschnitt.

Haupt-Anwendungen der Gesetze der allgemeinen Arithmetik.

I.

Von der Verwandlung gegebener Ausdrücke in andere von vorgeschriebener Form

oder

die besondere Arithmetik.

A. Von der Umformung der einfachsten Rechnungsformen in Reihen, die nach Potenzen fortschreiten.

§. 93. *Erklärungen.* Eine Summe von der Form

$$ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \ldots\ldots,$$

in welcher die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ reelle, nach ihrer Grösse geordnete Zahlen sind, heisst eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe, und zwar eine nach steigenden oder fallenden Potenzen fortschreitende, je nachdem jene Exponenten steigend oder fallend geordnet sind; sie heisst eine endliche oder unendliche Reihe, je nachdem die Zahl ihrer Glieder beschränkt oder unbegrenzt ist. Die Faktoren a, b, c, d, ... nennt man die Coefficienten der Reihe.

Kommen als Exponenten nur die Null und absolute ganze Zahlen vor, und ist dabei die Reihe eine endliche, so nennt man sie eine ganze Funktion von x, und zwar vom μten Grade, wenn μ der höchste Exponent von x ist.

Sonach ist z. B. $ax^2 + bx^1 + cx^0$, d. h. $ax^2 + bx + c$ eine ganze Funktion vom zweiten Grade, $ax + b$ eine vom ersten Grade, a (als gleichbedeutend mit ax^0) eine ganze Funktion vom 0ten Grade.

Quotienten ganzer Funktionen von x heissen gebrochene Funktionen von x, und zwar echtgebrochene, wenn der Dividend von einem niedrigeren Grade als der Divisor ist, unecht gebrochene, wenn er von gleichem oder höheren Grade ist.

Einen, das Zeichen x enthaltenden Ausdruck in eine nach Potenzen von x fortlaufende Reihe umformen heisst „diesen Ausdruck nach Potenzen von x entwickeln."

§. 94. *Aufgabe.* Eine Summe oder Differenz von Reihen, die nach Potenzen von x fortschreiten, in eine gleichfalls nach Potenzen von x fortlaufende Reihe zu entwickeln.

Die Umformung geschieht nach den Regeln des §. 21 und nach §. 36, wie sich aus den folgenden Beispielen ersehen lässt.

1) Ist die Summe

$$(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)+(a_1x^2+b_1x+c_1)+(a_2x^3+b_2x^2)$$

nach Potenzen von x zu entwickeln, so hat man, da nach §. 21 die Klammern fortgelassen und dann die Glieder beliebig geordnet werden dürfen, zunächst

$$ax^4+bx^3+a_2x^3+cx^2+a_1x^2+b_2x^2+dx+b_1x+e+c_1,$$

und sodann nach der Gleichung VII des §. 36

$$ax^4+(b+a_2)x^3+(c+a_1+b_2)x^2+(d+b_1)x+(e+c_1).$$

2) Ist die Differenz

$$(ax^3+bx^2+cx+d)-(a_1x^2+b_1x+c_1)$$

zu entwickeln, so hat man zuerst nach §. 21

$$ax^3+bx^2-a_1x^2+cx-b_1x+d-c_1,$$

und dann nach §. 36

$$ax^3+(b-a_1)x^2+(c-b_1)x+(d-c_1).$$

Zusatz. Man sieht aus dem Vorstehenden unmittelbar, dass algebraische Summen ganzer Funktionen immer wiederum in die Form einer ganzen Funktion sich bringen lassen, und dass die letztere nie von einem höheren Grade sein kann, als die höchste der addirten oder subtrahirten Funktionen.

§. 95. *Aufgabe.* Ein Produkt zweier endlichen nach Potenzen von x fortlaufenden Reihen nach Potenzen von x zu entwickeln.

Die Ausführung geschieht nach den Gesetzen der §§. 40, 36, 59, wie es das folgende Beispiel zeigt.

Ist das gegebene Produkt

$$(bx^2+xc+d)(a_1x^2+xb_1+c_1),$$

so formt man dasselbe nach §. 40 zunächst in

$$(bx^2+cx+d)a_1x^2+(bx^2+cx+d)b_1x+(bx^2+cx+d)c_1,$$

und dann in

$$ba_1x^2x^2+ca_1xx^2+da_1x^2+bb_1x^2x+cb_1xx+db_1x+bc_1x^2+cc_1x+dc_1$$

um; alsdann nach §. 59 Gl. (X) in

$$ba_1x^4+ca_1x^3+da_1x^2+bb_1x^3+cb_1x^2+db_1x+bc_1x^2+cc_1x+dc_1,$$

und endlich nach §. 20 u. 36 in

$$ba_1x^4+(ca_1+bb_1)x^3+(da_1+cb_1+bc_1)x^2+(db_1+cc_1)x+dc_1.$$

Zusatz. Man sieht hieraus, dass, wenn A und B ganze Funktionen resp. vom mten und nten Grade sind, die Entwickelung von $A.B$ eine ganze Funktion vom $(m+n)$ ten Grade wird.

§. 96. *Aufgabe.* Einen Quotienten in eine zweigliedrige Summe umzuformen, deren erstes Glied ein beliebig gegebenes ist.

Ist $A:B$ der umzuformende Quotient und z das beliebig gewählte erste Glied der gesuchten Summe, so hat man, wenn man das zweite Glied vorläufig durch v bezeichnet,

$$\frac{A}{B}=z+v.$$

Soll diese Gleichung eine richtige sein, so müssen auch die aus $A:B$ und $z+v$ dadurch hervorgehenden Ausdrücke, dass man z von ihnen subtrahirt, einander gleich sein, d. h. es muss

$$\frac{A}{B}-z=v, \text{ oder, was dasselbe ist } \frac{A-Bz}{B}=v$$

sein, und umgekehrt wird in der That $A:B$ der Summe $z+v$ gleich, sobald man unter v den Quotienten $(A-Bz):B$ denkt.

§. 97. *Lehrsatz.* Jede unechtgebrochene Funktion von x ist einer Summe gleich, deren eines Glied eine ganze Funktion von x und zwar von $m-n$ten Grade ist, wenn der Divisor vom nten und der Dividend vom mten Grade war, und deren zweites Glied eine echtgebrochene Funktion ist, die mit dem gegebenen Quotienten einerlei Divisor hat.

Beweis. Der gegebene Quotient sei $A_m:B_n$, und zwar sei

$$A_m=ax^m+P_{m-1}, \quad B_n=bx^n+p_{n-1},$$

wo P_{m-1} eine ganze Funktion vom $(m-1)$ten, p_{n-1} eine ganze Funktion vom $(n-1)$ten Grade vorstellen soll.

Wendet man nun auf $A_m:B_n$ die Zerlegung des vorigen §. an, indem man

$$z = \frac{ax^m}{bx^n} = \frac{a}{b} x^{m-n}$$

setzt, so erhält man, den Quotienten $a:b$ durch α bezeichnend, weil hier

$$B_n z = (bx^n + p_{n-1})z = (bx^n + p_{n-1})\alpha x^{m-n} = ax^m + \alpha p_{n-1} x^{m-n}$$

und mithin

$$A_m - B_n z = (ax^m + P_{m-1}) - (ax^m + \alpha p_{n-1} x^{m-n}) = P_{m-1} - \alpha p_{n-1} x^{m-n}$$

ist,

$$\frac{A^m}{B_n} = \alpha x^{m-n} + \frac{A_m - B_n z}{B_n} = \alpha x^{m-n} + \frac{P_{m-1} - \alpha p_{n-1} x^{m-n}}{B_n}$$

Beachtet man nun, dass nach §. 95, $\alpha p_{n-1} x^{m-n}$ einer ganzen Funktion von $(n-1)+(m-n)$ten, d. h. von $(m-1)$ten Grade, und mithin nach §. 94 auch $P_{m-1} - \alpha p_{n-1} x^{m-n}$, welche Differenz wir durch A_{m-1} bezeichnen wollen, einer ganzen Funktion vom höchstens $(m-1)$ten Grade gleich ist — so gibt die vorstehende Gleichung zu erkennen, dass jede unechtgebrochene Funktion aus zwei Theilen zusammengesetzt werden kann, von denen der erste entsteht, wenn man das höchste Glied des Dividenden durch das höchste Glied des Divisors dividirt, und daher ein mit x^{m-n} multiplicirtes Glied ist, wenn jener vom mten, dieser vom nten Grade war, während der zweite Theil wiederum eine gebrochene Funktion ist, welche denselben Divisor aber einen wenigstens um einen Grad niedrigeren Dividenden hat.

Ist dieser letzte Theil noch eine unechtgebrochene Funktion, so lässt sich auf ihn dieselbe Zerlegung anwenden, d. h. es lässt sich aus demselben ein Glied einer ganzen Funktion so heraussondern, dass der Rest eine gebrochene Funktion wird, deren Dividend wiederum um wenigstens einen Grad niedriger ist, während der Divisor derselbe bleibt. Ist auch dieser Rest noch keine echtgebrochene Funktion, so muss man doch zuletzt, wenn man auf die jedesmal übrig bleibende gebrochene Funktion jene Zerlegung wiederholt anwendet, endlich auf eine echtgebrochene Funktion kommen, während die ausgeschiedenen Glieder eine ganze Funktion vom $(m-n)$ten Grade bilden.

Ist A_{m-1} nicht niedriger als vom $(m-1)$ten Grade, so kommt man hierdurch nach und nach auf folgende Zerlegungen

$$\frac{A_m}{B_n} = \alpha x^{m-n} + \frac{A_{m-1}}{B_n}, \quad \frac{A_m}{B_n} = \alpha x^{m-n} + \alpha_1 x^{m-n-1} + \frac{A_{m-2}}{B_n}$$

$$\frac{A_m}{B_n} = \alpha x^{m-n} + \alpha_1 x^{m-n-1} + \alpha_2 x^{m-n-2} + \frac{A_{m-3}}{B_n}, \text{ etc.}$$

$$\frac{A_m}{B_n} = \alpha x^{m-n} + \alpha_1 x_1^{m-n-1} - \alpha_2 x^{m-n-2} + \ldots \alpha_{m-n}\, x^0 + \frac{A_{n-1}}{B_n}$$

wo $\alpha_1 x^{m-n-1}$ der Quotient aus dem höchsten Gliede von A_{m-1} und dem höchsten Gliede von B_n, d. h. von bx^n, ist, wo $\alpha_2 x^{m-n-2}$ durch Division von bx^n in das höchste Glied von A_{m-2} entstanden ist, etc.

Beispiel. Im folgenden Beispiele ist die gewöhnlich bei diesem Verfahren angewendete Form beobachtet, und der Dividend als vom 7ten Grade durch A_7, der Divisor als vom 4ten Grade durch B_4 bezeichnet.

$$(5x^7 - 8x^6 - 5x + 2) : (2x^4 - 3x^3 + 1)$$

$$\begin{array}{ll}
B_4 z = & 5x^7 - \frac{15}{2}x^6 + \frac{5}{2}x^3 \\
A_6 = A_7 - B_4 z = & -\frac{1}{2}x^6 - \frac{5}{2}x^3 - 5x + 2 \\
B_4 z_1 = & -\frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{4}x^2 \\
A_5 = A_6 - B_4 z_1 = & -\frac{3}{4}x^5 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 5x + 2 \\
B_4 z_2 = & -\frac{3}{4}x^5 + \frac{9}{8}x^4 - \frac{3}{8}x \\
A_4 = A_5 - B_4 z_2 = & -\frac{9}{8}x^4 \frac{5}{2} - x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{37}{8}x + 2 \\
B_4 z_3 = & -\frac{9}{8}x^4 + \frac{27}{16}x^3 - \frac{9}{16} \\
A_3 = A_4 - B_4 z_3 = & -\frac{67}{16}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{37}{8}x + \frac{9}{16},
\end{array}
\qquad
\left.\begin{array}{l}
z = \frac{5}{2}x^3 \\
z_1 = -\frac{1}{4}x^2 \\
z_2 = -\frac{3}{8}x \\
z_3 = -\frac{9}{16}
\end{array}\right.$$

so dass der gegebene Quotient gleich

$$\frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{9}{16} + \frac{-\frac{67}{16}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{37}{8}x + \frac{9}{16}}{2x^4 - 3x^3 + 1}$$

wird.

B. Von der Zurückführung der einfachsten Rechnungs-Ausdrücke auf die Form $P+Qi$.

§. 98. Wenn man in der Summe $a+bi$, a und b beliebig reell, und i als einen Werth von $\sqrt{-1}$ denkt, so begreift dieselbe, da b auch den (reellen) Werth Null vorstellen kann, unter andern auch alles Reelle in sich, und da das Reelle wiederum alle Zahlen mit umfasst, so stellt $a+bi$ unter andern auch alle wirklichen Zahlen vor. Man kann daher beim Operiren mit Zahlen auf nichts kommen, wozu man nicht auch durch Operiren mit Summen von der Beschaffenheit des $a+bi$ kommen könnte. Liesse sich daher zeigen, dass man durch Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, etc. von Summen, welche die Beschaffenheit des $a+bi$ haben, nie auf etwas kommen könne, was sich nicht auf eine Summe von eben

dieser Beschaffenheit zurückführen liesse, so würde damit zugleich bewiesen sein, dass auch das Operiren d. h. das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren, Radiciren und Logarithmiren) mit Zahlen nie einen Ausdruck liefern kann, der nicht fähig wäre, die Form von $a+bi$ anzunehmen. In der That geht man aber bei allen Rechnungen von Zahlen aus; mithin würde die Analysis, in welcher keine anderen als die genannten Operationen angewendet werden, und welche mit nichts umgeht, was nicht durch diese Operationen aus Zahlen gewonnen wird, völlig allgemein verfahren, wenn sie bei allen Ausdrücken, mit denen sie sich beschäftigt, voraussetzte, dass sie jene Form haben. Namentlich verlöre man durchaus nicht an Allgemeinheit, wenn man sich bei dem Zeichenrechnen des vorigen Abschnitts alle Elemente als Summen von der Form $a+bi$ dächte. Der beregte Nachweis soll nun hier, wenigstens so weit es die uns bis jetzt zu Gebote stehenden Mittel zulassen, geführt werden.

1) Sind die Ausdrücke $a+bi$ und $c+di$ (a, b, c, d als beliebig reell gedacht) zu addiren oder zu subtrahiren, so hat man

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i,$$

mithin haben wir, da $a+c$, $b+d$, $a-c$, $b-d$ als algebraische Summen reeller Zahlen wieder reelle Zahlen sind, die Summen und Differenzen in Ausdrücke verwandelt, welche die verlangte Form $P+Qi$ haben.

2) Sind die Ausdrücke $a+bi$ und $c+di$ zu multipliciren, so hat man nach §. 40, da $ii=(\surd-1)^2=-1$ ist,

$$(a+bi)(c+di)=i(ac-bd)+(ad+bc)i,$$

mithin, da ac, bd, ad, bc und folglich auch $ac-bd$ und $ad+bc$ reell sind, wiederum einen Ausdruck von der gedachten Form.

3) Sind $a+bi$ und $c+di$ durch einander zu dividiren, so hat man, weil $(c+di)(c-di)=c^2-d^2i^2=c^2+d^2$ ist,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,$$

und mithin den Quotienten auf die verlangte Form zurückgeführt.

4) Von dem im vorigen Abschnitte specialisirten Potenzen sind nur die mit positivem oder negativem ganzen Exponenten

von der Art, dass man den Dignanden von der Form $a+bi$ annehmen darf, daher auch nur diese hier schon untersucht werden können.

Da aber $(a+bi)^m$, wenn m eine (positive) ganze Zahl ist, den Werth eines Produktes hat, so folgt schon aus Nr. 2, dass dieser Werth allemal der Form $P+Qi$ fähig ist.

Und ist m negativ, etwa gleich $-m$, so ist $(a+bi)^m$ $=\frac{1}{(a+bi)^m}$, wo $(a+bi)^m$ als ganze Potenz die Form $P+Qi$ annehmen kann, so dass nach Nr. 3 auch der Quotient $\frac{1}{(a+bi)^m}$ sich in einen Ausdruck von derselben Beschaffenheit verwandeln lässt.

Von den Logarithmen endlich lässt sich hier gar nicht sprechen, weil in denjenigen, die im vorigen Abschnitte näher bestimmt worden sind, die Basis und der Logarithmand als positiv vorausgesetzt wurden und daher nicht allgemein gleich $a+bi$ gesetzt werden dürfen. Es muss daher die Vervollständigung der hier angefangenen Untersuchung späteren Abschnitten vorbehalten bleiben.

C. Von der sogenannten Ausführung der Rechnungs-Operationen.

§. 99. *Erklärung.* Gewöhnlich versteht man unter Addition, Subtraktion, Multiplikation, etc. nicht, wie wir es im vorigen Abschnitte gethan haben, die Bildung einer Summe, Differenz, etc. (mittels der Zeichen +, —, etc.) sondern die Umformung einer Summe, Differenz, etc., und zwar die Umformung in einen Ausdruck von einer ein für allemal festgesetzten Form. Zuweilen bedient man sich auch des Ausdruckes „angedeuteter Operation“ („angedeuteter Addition, Subtraktion, etc.“) für unser bisheriges Addiren, Subtrahiren, etc., und nennt das letztgedachte Umformen im Gegensatze hierzu, „Ausführung der Operation.“ Dieser letzten Redeweise werden auch wir uns im Folgenden bedienen (aber nur, um uns nicht von dem gewöhnlichen Sprachgebrauche zu entfernen, nicht aber um auszudrücken, dass das Verbinden der Glieder durch die Zeichen +, —, etc. ein noch nicht fertiges Addiren, Subtrahiren, etc.

sei), und unter dem Titel „Ausführung der Rechnungs-Operationen" 1) die Formen namhaft machen, in welche man beim sogenannten Ausführen der Rechnung die verschiedenen Ausdrücke verwandelt wissen will, 2) die Umformungen angeben, welche nach den allgemeinen Regeln des ersten Abschnittes nach einander in Anwendung gebracht werden müssen, um auf diese Formen (die sogenannten Resultate der Rechnung) zu kommen.

Sind die zu verbindenden Elemente Ziffern, so nennen wir die Herstellung der Endformen, auf welche es bei der Ausführung der Rechnungsoperationen abgesehen ist, Ziffernrechnung; sind die Elemente Buchstaben, oder untermischt Buchstaben und Ziffern, so nennen wir sie Buchstabenrechnung.

a. Ziffernrechnung.

§. 100. *Erklärung der dekadischen Zahlen und Brüche.* Jede in der gewöhnlichen Weise geschriebene mehrziffrige Zahl lässt sich als ein abgekürztes Zeichen für eine nach fallenden Potenzen geordnete ganze Funktion von 10 betrachten, in welcher jeder der Coefficienten eine der ersten 9 ganzen Zahlen oder die Null ist. So ist z. B. die 7ziffrige Zahl *abcdefg* gleichbedeutend mit

$$a\,.\,10^6+b\,.\,10^5+c\,.\,10^4+d\,.\,10^3+e\,.\,10^2+f\,.\,10^1+g\,.\,10^0$$

und die fünfziffrige Zahl 30532 gleichbedeutend mit

$$3\,.\,10^4+0\,.\,10^3+5\,.\,10^2+3\,.\,10^1+2\,.\,10^0.$$

Man schreibt demnach bei der gewöhnlichen Schreibweise der numerischen Zahlen nur die Coefficienten der Reihe hin, und der Exponent der fortgelassenen Potenz von 10, mit welcher jeder Coefficient multiplicirt werden soll, ist der Anzahl der auf ihn folgenden Ziffern gleich.

Beim Aussprechen der Zahl sagt man bekanntlich „zehntausend" statt 10^4, „tausend" statt 10^3, etc.

Die ganze Reihe nennen wir dekadische Summe, oder, wenn sie abgekürzt nur mit ihren Coefficienten geschrieben ist, dekadische Zahl.

Jeden Quotienten dekadischer Zahlen oder dekadischer Summen nennen wir einen dekadischen oder gemeinen Bruch, wofern er sich nicht in eine dekadische Zahl umformen lässt, also keiner ganzen Zahl gleich ist.

Diejenigen dekadischen Brüche, deren Nenner einer Potenz von 10 gleich ist (in deren Nenner also alle Coefficienten bis auf den

ersten, welcher der Einheit gleich ist, Null sind) nennen wir Decimalbrüche.

Da man von einem Decimalbruche nur den Zähler und den Exponenten der Potenz von 10, welche den Nenner bildet, zu wissen braucht, um den Bruch zu kennen, so schreibt man der Kürze wegen stets nur den Zähler hin, und deutet, wenn der Nenner 10^α ist, dies dadurch an, dass man vor der αten Ziffer des Zählers ein Komma setzt, wobei man, wenn der Zähler nur α, oder weniger als α Ziffern hat, so viele Nullen derselben vorsetzt, bis die Zahl der Ziffern $\alpha+1$ geworden ist. So sind also 3,512; 0,3582: 0,000385 Abkürzungen für $\frac{3512}{10^3}$, $\frac{3582}{10^4}$, $\frac{385}{10^6}$. — Die hinter dem Komma stehenden Ziffern nennt man die Decimalstellen des Bruches.

§. 101. *Ausführung der Operationen mit dekadischen ganzen und gebrochenen Zahlen.* Die Ausführung des Rechnens mit dekadischen ganzen und gebrochenen Zahlen besteht in der Verwandlung gegebener Verbindungen dekadischer Zahlen oder dekadischer Brüche in ganze, oder wenn dies unmöglich ist, in gebrochene dekadische Zahlen. Für unechte Brüche wünscht man zuweilen auch eine Summe aus einer dekadischen ganzen Zahl und einem dekadischen echten Bruche. Sonach ist die Ausführung numerischer Rechnungen nichts als eine Umformung in Summen oder in Quotienten von Summen, die eine vorgeschriebene (die dekadische) Form haben. Für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ganzer Zahlen wird offenbar der Weg, auf welchem diese Umformung geschieht, im allgemeinen derselbe sein, wie derjenige, welcher in §. 94—97 für den allgemeinen Fall angegeben ist, dass die Summen nicht nach Potenzen von 10, sondern nach Potenzen eines beliebigen x (welches also auch im besonderen Fall den Werth 10 haben kann) geordnet sind. Das Modificirende ist nur, dass man noch dahin zu sehen hat, dass die Coefficienten des Resultats einziffrig bleiben (nicht grösser als 9 werden). Dieser Modification soll nun in dem nächstfolgenden §. kurz näher Erwähnung geschehen.

§. 102. *Bemerkungen zur Ausführung der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division dekadischer ganzer Zahlen.* Bei der Addition mehrziffriger Zahlen und bei der Multiplikation einer mehrziffrigen Zahl durch eine einziffrige entspricht die eben angeregte Umformung, welche nöthig ist, um

einziffrige Coefficienten im Resultate zu erhalten, dem sogenannten Hinüberzählen beim schulmässigen Addiren und Multipliciren.

Behalten wir z. B. das erste Beispiel des §. 94 bei, wo wir uns nun $x=10$, und $a, b, c, \ldots$ als einziffrige Zahlen zu denken haben, mithin die im Resultate erscheinenden Summen $b+a_2$, $c+a_1+b_2$, etc. wiederum ganze Zahlen (oder Null) werden; bezeichnen wir ferner $b+a_2$, $c+a_1+b_2$, $d+b_1$, $e+c$, durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so dass das Resultat

$$a\cdot10^4+\alpha\cdot10^3+\beta\cdot10^2+\gamma\cdot10+\delta$$

wird: so ist, wenn a, α, β, γ, δ sämmtlich einziffrig sind, schon $a\alpha\beta\gamma\delta$ das Resultat in der gewöhnlichen Schreibweise. Ist aber z. B. $\beta>9$, und etwa, dekadisch geschrieben, gleich $m.10+n$, so wird $\alpha.10^3+\beta.10^2$ d. h. $\alpha\cdot10^3+(m.10+n)10^2$ nacheinander in $\alpha 10^3+m.10^3+n.10^2$ und $(\alpha+m)10^3+n.10^2$ umgeformt, und das Resultat ist, wenn $\alpha+m<10$ bleibt, bei numerischer abgekürzter Schreibweise die 5 ziffrige Zahl $a(\alpha+m)n\gamma\delta$.

Man erkennt sogleich in dem Gange der Umformungen das in den Elementar-Schulen gelehrte Additions-Verfahren. Dort werden nur die zu gleichen Potenzen von 10 gehörigen Coefficienten nicht neben, sondern unter einander gesetzt, so dass der Ansatz so erscheint

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ & & a_1 & b_1 & c_1 \\ & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ \hline a & (\alpha+m) & n & \gamma & \delta \end{array}$$

Ebenso hat man es bei der Multiplikation. Ist z. B. 3573 mit 3 zu mulitpliciren, so findet man

$$(3.10^3+5\cdot10^2+7\cdot10+2)3=3.3.10^3+5.3.10^2+7.3.10+2.3,$$

oder die Produkte 3.3, 5.3, 7.3, 2.3 auf dekadische Form bringend,

$$9\cdot10^3+(1\cdot10+5)10^2+(2\cdot10+1)10+6,$$

welches nach und nach in

$$9\cdot10^3+1\cdot10^3+5\cdot10^2+2\cdot10^2+1\cdot10+6,$$
$$(9+1)10^3+(5+2)10^2+1\cdot10+6,$$
$$1\cdot10^4+0\cdot10^3+7\cdot10^2+1.10+6,$$

d. h in 10716 umgeformt, die Begründung des schulmässigen Hinüberzählens erkennen lässt.

Bei der Subtraktion entspricht die Umformung, welche zu

den Umformungen des §. 94 noch hinzuzufügen ist, um absolute einziffrige Coefficienten zu erhalten, dem sogenannten Borgen beim schulmässigen Subtrahiren.

Sind in dem 2ten Beispiele des §. 94 $b > a_1$, $c > b_1$, $d > c_1$, und sind α, β, γ die Ziffern, welche den Werth von $b - a_1$, $c - b_1$, $d - c_1$ haben, so ist das Resultat die 4ziffrige Zahl $a\alpha\beta\gamma$. Ist aber z. B. $c < b_1$, so ist gewiss $10 + c > b_1$ und man schreibt dann, $10 + c - 10$ für c setzend, statt $b.10^2 + c.10^1$ nur $b.10^2 + (10 + c - 10)10^1$, d. h. $(b-1).10^2 + (10+c)10^1$, so dass das Schema so aussieht:

$$\begin{array}{r} a.10^3 + (b-1).\quad 10^2 + (10+c).\; 10^1 + \;\; d \\ - \;\; a \;\; . \quad 10^2 - \quad b_1 \;\; . \; 10^1 - \;\; c_1 \\ \hline a.10^3 + (b - a_1 - 1)10^2 + (10 + c - b_1)10^1 + (d - c_1) \end{array}$$

und es sind, wofern nur b noch $> a_1 + 1$ ist, a, $b - a_1 - 1$, $10 + c - b_1$, $d - c_1$ die 4 Ziffern des Resultats.

Bei der **Multiplikation zweier mehrziffrigen Zahlen** lässt das Verfahren des §. 95 sogleich den Grund des Einrükkens derjenigen Zahlen, die beim schulmässigen Multipliciren untereinander geschrieben zu werden pflegen, erkennen. Ist z. B. 3572 mit 483 zu multipliciren, so hat man nämlich
$(3572)(4.10^2+8.10+3) = (3572.4)10^2 + (3572.8)10 + 3572.3$
$= 14288.10^2 + 28576.10 + 10716$, folglich wenn man die zu gleichen Potenzen von 10 gehörigen Coefficienten behufs der schulmässigen Addition untereinander setzt,

$$\begin{array}{r} 10716 \\ 28567\,0 \\ 14288\,00 \end{array}$$

Bei der **Division** hat man, wenn man die Bezeichnungen des §. 97 beibehält, das dortige Verfahren nur dahin abzuändern, dass man zum Coefficienten des ersten Gliedes nicht $a:b$, d. h. nicht den Quotienten der ersten Ziffern des Dividenden und Divisors zu nehmen hat, sondern weil dies im allgemeinen eine gebrochene Zahl sein würde, nur die grösste ganze Zahl, welche in $a:b$ enthalten ist, oder vielmehr die höchste ganze Zahl, welche $A - Bz$ noch positiv lässt, etc. Dasselbe gilt dann auch für die folgenden Glieder.

§. 103. *Von den zweiten Potenzen dekadischer Zahlen.*

1. Der dekadische Werth der zweiten Potenz einer nziffrigen Zahl ist eine aus $2n$ oder $2n-1$ Ziffern bestehende Zahl.

Beweis. Man bemerke zunächst, dass *n*ziffrige Zahlen ihrer Grösse nach zwischen 10^{n-1} und 10^n enthalten sind. Es lässt sich jede *n*ziffrige Zahl nämlich vorstellen durch

$$a.10^{n-1}+b.10^{n-2}+\ldots.p.10^3+q.10^2+r.10+s,$$

wo $a, b, \ldots. p, q, r, s$ sämmtlich kleiner als 10 sind. Nun ist, weil $s<10$ ist, $r.10+s<(r+1).10$, mithin, da $r+1$ nicht grösser als 10 sein kann, also $(r+1).10$ höchstens $=10^2$ ist, $r.10+s<10^2$. Daraus folgt, dass $q.10^2+r.10+s<q.10^2+10^2$ d. h. $<(q+1)10^2$, oder, da $q+1$ nicht grösser als 10, also $(q+1)10^2$ höchstens $=10^3$ ist, $q.10^2+r.10+s<10^3$; folglich $p.10^3+q.10^2+r.10+s<p.10^3+10^3$ d. h. $<(p+1)10^3$ oder (weil $p+1$ höchstens $=10$ ist) $<10^4$, etc, mithin endlich die gesammte Zahl kleiner als $(a+1)10^{n-1}$ d. h. kleiner als 10^n. Dass die Zahl aber nicht kleiner als 10^{n-1} geht daraus hervor, dass der kleinste Werth den a annehmen kann, 1 ist, und dann schon das erste Glied allein $a.10^{n-1}$ den Werth 10^{n-1} hat.

Liegt aber eine *n*ziffrige Zahl zwischen 10^{n-1} und 10^n, so liegt ihre 2te Potenz zwischen $(10^{n-1})^2$ und $(10^n)^2$, d. h. zwischen 10^{2n-2} und 10^{2n}, und besteht mithin aus $2n$ oder $2n-1$ Ziffern.

2. Sondert man von einer dekadischen Zahl die letzte Ziffer ab, so dass man z. B. für 2568, die Summe 2560+8 oder 256.10+8 setzt, so hat man, da allgemein $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ ist,

$$(2568)^2=(256.10+8)^2=(256.10)^2+2.(256.10).8+8^2$$
$$=256^2.10^2+2.256.8.10+8^2.$$

Es ist also, wenn man die Ziffern, welche der letzten Ziffer voranstehen, die vorderen Ziffern nennt, die zweite Potenz einer dekadischen Zahl einer Summe von drei Gliedern gleich, deren erstes das Quadrat der aus den vorderen Ziffern gebildeten Zahl mit 10^2 multiplicirt (d. h. mit zwei angehängten Nullen) ist, deren zweites das Produkt aus dem Doppelten der aus den vordern Ziffern gebildeten Zahl, und der letzten Ziffer, mit einer angehängten Null ist, und deren drittes Glied das Quadrat der letzten Ziffer ist.

§. 104. *Ausführung der Quadratwurzel-Ausziehung aus einer ganzen dekadischen Zahl.* Die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl ausführen, heisst diejenige dekadische ganze Zahl darstellen, deren Quadrat dem Radikanden gleich ist, oder

wenn eine solche nicht existirt: die grösste dekadische ganze Zahl finden, deren Quadrat kleiner als der Radikand ist, so dass, wenn a den Radikanden, und z die gesuchte Zahl vorstellt, $z^2 < a$ und $(z+1)^2 > a$ wird.

Des leichteren Verständnisses wegen legen wir der Angabe des Verfahrens, nach welchem diese Zahl z gefunden zu werden pflegt, ein Beispiel zum Grunde. Der gegebene Radikand sei hierbei die Zahl 5832656.

Man beginnt damit, die Ziffern des Radikanden von der Rechten nach der Linken hin zu je zweien zu gruppiren, wobei an der äussersten Linken bei ungerader Zifferzahl eine einzelne Ziffer stehen bleiben wird. Die dadurch entstehenden Ziffernabtheilungen (die im untenstehenden Schema durch Punkte von einander geschieden sind) nennt man Klassen. Von diesen Klassen ist die erste gleich den folgenden, zweiziffrig, wenn die Ziffernzahl des Radikanden eine gerade ist; sie wird von jener sich absondernden Ziffer allein gebildet, wenn dieselbe eine ungerade ist. Es hat alsdann dem §. 103, 1 gemäss die gesuchte Zahl z ebensoviele Ziffern als der Radikand Klassen hat. Diese Ziffern, deren es in unserm Beispiel demnach vier geben wird, bezeichnen wir vorläufig durch n_3, n_2, n_1, n, so dass die gesuchte Zahl durch $n_3 . 10^3 + n_2 . 10^2 + n_1 . 10 + n$ ausgedrückt ist.

$$\sqrt{5.83.26.56} = 2415$$

$$\begin{array}{rrrrr}
2^2.10^6 = & 4 & 00 & 00 & 00 \\ \hline
r_1 = & 1 & 83 & 26 & 56 \\
2.2.4.10^5 = & 1 & 60 & 00 & 00 \\
4^2.10^4 = & & 16 & 00 & 00 \\ \hline
r_2 = & & 7 & 26 & 56 \\
2.24.1.10^3 = & & 4 & 80 & 00 \\
1^2.10^2 = & & & 1 & 00 \\ \hline
r_3 = & & 2 & 45 & 56 \\
2.241.5.10^1 = & & 2 & 41 & 00 \\
5^2 = & & & & 25 \\ \hline
r_4 = & & & 4 & 31
\end{array}$$

Nachdem man den Radikanden in Klassen abgetheilt hat, bestimmt man die höchste Ziffer des gesuchten Wurzelwerthes (das hiesige n_3). Es ist selbige die grösste ganze Zahl, deren Quadrat kleiner als die in der ersten Klasse stehende Zahl ist. In unserem

Beispiele, wo die Zahl Fünf die erste Klasse ausmacht, wird daher $n_3=2$, und mithin 2.10^3 das erste Glied der obigen dekadischen Summe werden. Hierauf wird das Quadrat des nunmehr bekannten ersten Gliedes, also die Zahl $(2.10^3)^2$ oder $2^2.10^6$ vom Radikanden subtrahirt, was nach Ausführung der Subtraktion die Zahl $r_1=1832656$ gibt. Ferner wird das Produkt aus dem Doppelten des gefundenen ersten Gliedes, 2.10^3, und dem zweiten Faktor 10^2 des zweiten Gliedes gebildet (was hier $2.2.10^5$ gibt) und die grösste ganze Zahl bestimmt, welche mit diesem Produkte multiplicirt, kleiner als r_1 bleibt. Diese grösste ganze Zahl, in unserem Falle die Vier, ist die zweite Ziffer n_2 der gesuchten Zahl.

Alsdann subtrahirt man von r_1 1) das eben angedeutete Produkt $2n_3.10^5n_2$ (hier $2.2.4.10^5$ oder 1600000) 2) das Quadrat des nunmehr gefundenen zweiten Gliedes $n_2.10^2$ der gesuchten dekadischen Summe (die Zahl $(4.10^2)^2$ oder 160000). Die bei der Ausführung der Subtraktionen sich ergebende Zahl (hier die Zahl 72656) möge durch r_2 bezeichnet sein. Lässt sich die Subtraktion wegen der zu geringen Grösse des Minuenden r_1 nicht ausführen, so war die für die zweite Ziffer n_2 angenommene Zahl zu gross, und es muss dann dafür die nächst kleinere Zahl, oder vielmehr die grösste von den kleineren Zahlen genommen werden, bei welcher jene Subtraktion möglich wird.

Die dritte Ziffer n_1 wird ebenso mittels der schon gefundenen Zahl $n_3.10^3+n_2 10^2$ aus r_2 bestimmt wie oben die zweite Ziffer n_2 mittels des dort schon gefunden gewesenen Theils der Zahl (des Theils $n_3.10^3$) aus r_1 bestimmt worden ist. Es ist nämlich r_1 die grösste ganze Zahl*), welche mit dem Doppelten der Zahl $n_3.10+n_2.10$ und dem zweiten Faktor 10 des dritten Gliedes $n_1 10$ multiplicirt, kleiner als die Zahl r_2 bleibt, d. h. in unserm Falle die grösste Zahl, welche mit $2.24.10^3$ multiplicirt kleiner als 72656 bleibt — also die Zahl 1. Alsdann subtrahirt man wiederum von r_2 1) das eben angedeutete Produkt $2.24.10^3.1$, also die Zahl 48000, und 2) das Quadrat des gefundenen neuen Gliedes (das Quadrat von $n_1.10$), also die Zahl 100. Die Zahl,

*) Statt der grössten Zahl wird die nächst kleinere genommen, wenn die darauf folgende Subtraktion sich als unmöglich erweisen sollte.

auf welche die Ausführung dieser Subtraktion führt und welche mit r_3 bezeichnet sein mag, wird hier 24526.

Die vierte Ziffer n wird endlich ebenso mittels des nunmehr schon gefundenen Theils der gesuchten Zahl $n_3 10^3 + n_2 10^2 + n_1 10$, d. i. mittels der Zahl 2410 aus der Zahl r_3 bestimmt, wie die zweite Ziffer n_2 aus $n_3 10^3$ und r_1, und wie die dritte Ziffer n_1 aus $n_3 10^3 + n_2 10^2$ und r_2 bestimmt worden ist. Es ist nämlich n die grösste ganze Zahl, welche mit dem Doppelten der Zahl $n_3 10^3 + n_2 10^2 + n_1 10$ multiplicirt, kleiner als r_3 bleibt — mithin in unserem Beispiele die Zahl 5.

Wird hiernach von r_3 subtrahirt 1) das eben angedeutete Produkt $2.241.10^0.5$ d. h. die Zahl 24100 und 2) das Quadrat von $n.10^0$ d. h. das Quadrat von 5: so kommt man auf eine Zahl r_4 (hier die Zahl 431), um welche das Quadrat der gefundenen Zahl 2415 kleiner ist als der gegebene Radikand.

Beweis: Um zu zeigen, dass das angegebene Verfahren auf das geforderte Resultat führt, beweisen wir 1) dass der letzte Rest r_4 in der That der Ueberschuss des Radikanden über das Quadrat der gefundenen Zahl, letzteres also kleiner als der Radikand ist, und 2) dass das Quadrat jeder grösseren (ganzen) Zahl grösser als der Radikand ist.

Was den ersten Punkt betrifft, so bemerke man, dass r_4 dadurch hervorgegangen ist, dass man vom Radikanden nach einander eine Reihe von Zahlen subtrahirt hat, und dass man daher nur nachzuweisen braucht, dass die Summe dieser subtrahirten Zahlen dem Quadrate der gefundenen Zahl (also hier dem Quadrat von 2415) gleich ist. Es ist aber nach dem vorigen §. das Quadrat von 2415, d. h.

$$(2415)^2 = (241.10+5)^2 = (241.10)^2 + 2.241.10.5 + 5^2,$$

mithin eine Summe, deren beide letzte Glieder in der That die beiden letzten Subtrahenden unseres Beispiels sind, so dass nur noch zu zeigen ist, dass das erste Glied $(241.10)^2$ der Summe der vorangegangenen Subtrahenden gleich kommt. Formt man, um dies zu untersuchen, $(241.10)^2$ nach §. 103 um, so erhält man zunächst

$$(241)^2 = (24.10+1)^2 = (24.10)^2 + 2.24.10.1 + 1^2,$$

und dann wegen $(24.10)^2.10^2 = 24^2.10^4$, $(241.10)^2 = (241)^2.10^2$

$$= 24^2.10^4 + 2.24.1.10^3 + 1^2.10^2,$$

wo, wie man sieht, die beiden letzten Glieder wiederum nichts anderes als die beiden von r_2 subtrahirten Zahlen sind. Das erste Glied dieser Summe, $24^2 . 10^4$, ist endlich gleich

$$(2 . 10+4)^2 10^4 = 2^2 . 10^6 + 2 . 2 . 4 . 10^5 + 4^2 . 10^4,$$

und besteht also aus den noch übrigen Zahlen, welche oben bei der Rechnung vom Radikanden subtrahirt worden sind. Es fallen somit in der That die hier nach und nach vom Radikanden subtrahirten Zahlen mit denen zusammen, in welche sich das Quadrat von 2415 durch wiederholte Anwendung des §. 103 zerlegen lässt, d. h. es ist in der That r_4 der Ueberschuss des Radikanden über das Quadrat der gefundenen Zahl.

Aus der Art endlich, wie die letzte Ziffer n gefunden worden ist, sieht man, dass die Umänderung von n in $n+1$ bei der letzten Subtraktion Subtrahenden geliefert hätte, deren Summe die Zahl r_3 übertrifft, d. h. dass das Quadrat der zunächst auf 2415 folgenden Zahl (der Zahl 2416) grösser als der Radikand sein wird.

Die Richtigkeit des Verfahrens ist somit vollständig erwiesen.

Der allgemeine Beweis wird nach dem Vorstehenden keine Schwierigkeit haben.

Bemerkung. In der Praxis pflegt man die im Schema klein geschriebenen Ziffern nicht mit hinzuschreiben, so dass man bei der ersten Ausführung der Subtraktion (bei der Gewinnung des r_1) nur die Ziffern der zweiten Klasse mit heranzieht, bei der zweiten Subtraktion nur die Ziffern der dritten Klasse, etc. Die Auffindung jeder neuen Ziffer des Resultats besteht dann in dem Aufsuchen der grössten Zahl, welche mit dem Doppelten der aus den schon gefundenen Ziffern bestehenden Zahl multiplicirt, kleiner ist als die Zahl, welche man erhält, wenn man aus dem entsprechenden Reste (der bei r_1, r_2, r_3... stehenden Zahl) die letzte Ziffer fortlässt.

§. 105. *Von den dritten Potenzen dekadischer Zahlen.*

1. Der dekadische Werth der dritten Potenz einer nziffrigen Zahl hat wenigstens $3n-2$, und höchstens $3n$ Ziffern.

Denn, da der Werth einer nziffrigen Zahl zwischen 10^{n-1} und 10^n liegt, so liegt der Werth ihrer 3ten Potenz zwischen $(10^{n-1})^3$ und $(10^n)^3$, d. h. zwischen 10^{3n-3} und 10^{3n}.

2. Sondert man von einer dekadischen Zahl die letzte Ziffer ab, und setzt z. B. $256 . 10+8$ für 2568, so hat man, da allgemein $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ ist, $(2568)^3 = (256 . 10+8)^3 =$

$$(256 \cdot 10)^3 + 3(256 \cdot 10)^2 \cdot 8 + 3(256 \cdot 10) \cdot 8^2 + 8^3 =$$
$$256^3 \cdot 10^3 + 3 \cdot (256)^2 \cdot 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 256 \cdot 8^2 \cdot 10 + 8^3.$$

Es hat also die dritte Potenz einer dekadischen Zahl mit einer viergliedrigen Summe gleichen Werth, in welcher

das erste Glied — der mit 10^3 multiplicirten dritten Potenz der aus den vorderen Ziffern gebildeten Zahl,

das zweite Glied — dem mit 10^2 multiplicirten Produkte aus dem dreifachen Quadrate der aus den vorderen Ziffern gebildeten Zahl, und der letzten Ziffer,

das dritte Glied — dem mit 10 multiplicirten Produkte aus dem dreifachen Quadrate der letzten Ziffer und der aus den vorderen Ziffern gebildeten Zahl, und endlich

das vierte Glied — der dritten Potenz der letzten Ziffer

gleich ist.

§. 106. *Ausführung der Kubikwurzel-Ausziehung aus einer dekadischen ganzen Zahl.* Die Ausziehung der Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl A ausführen, heisst diejenige dekadische (ganze) Zahl aufsuchen, deren dritte Potenz gleich A ist, oder wenn eine solche nicht existirt — die grösste dekadische ganze Zahl z bestimmen, deren dritte Potenz kleiner als A ist, welche also die Bedingungen $z^3 < A$ und $(z+1)^3 > A$ erfüllt.

Wir legen wiederum der Angabe des Verfahrens ein besonderes Beispiel zum Grunde und setzen $A = 143878743$.

Man gruppire die Ziffern des Radikanden von der Rechten zur Linken hin fortschreitend zu dreien, und nenne die dadurch gebildeten Ziffernabtheilungen (welche wir im nachstehenden Schema durch Punkte von einander getrennt haben) Klassen. Die erste dieser Klassen wird dabei ein- oder zweiziffrig, wenn die Ziffernzahl des Radikanden kein Vielfaches von Drei ist; sie wird gleich den übrigen Klassen dreiziffrig, wenn dieselbe ein Vielfaches von Drei ist. — Die gesuchte Zahl hat dann nach §. 105 eben soviele Ziffern, als der Radikand Klassen enthält — in unserem Beispiele mithin drei. Diese Ziffern nennen wir vorläufig n_2, n_1 und n, so dass die gesuchte Zahl durch $n_2 \cdot 10^2 + n_1 10 + n$ ausgedrückt ist.

Die erste Ziffer n_3 ist dann die grösste ganze Zahl, deren dritte Potenz kleiner als die in der ersten Klasse stehende Zahl ist; in unserem Beispiele also, wo 143 die Zahl in der ersten Klasse ist — die Zahl 5. Alsdann subtrahirt man vom Radikanden die dritte Potenz

$\sqrt[3]{143.878.743}$	$=524$
$5^3.10^6$	$=125\ 000\ 000$
r_1	$=18\ 878\ 743$
$3.5^2.2.10^5$	$=15\ 000\ 000$
$3.5.2^2.10^4$	$=600\ 000$
$2^3.10^3$	$=8\ 000$
r_2	$=3\ 270\ 743$
$3.52^2.4.10^2$	$=3\ 244\ 800$
$3.52.4^2.10$	$=24\ 960$
4^3	$=64$
r_3	$=919$

des hierdurch bestimmten ersten Gliedes $n_2.10^2$ der gesuchten Zahl, also in unserem Beispiele die Potenz $(5.10^2)^3$ d. i. die Zahl $5^3.10^6$. Die Ausführung der Subtraktion gibt die Zahl 18878743, welche allgemein durch r_1 bezeichnet sei.

Die zweite Ziffer n_1 ist die grösste ganze Zahl †), welche mit dem dreifachen Quadrate des gefundenen ersten Gliedes $n_2.10^2$ und dem Faktor von n_1, d. h. mit 10, multiplicirt, kleiner als die Zahl r_1 bleibt, d. h. hier — die grösste ganze Zahl, welche mit $3.(5.10^2)^2.10$, d. i. mit $3.5^2.10^5$, multiplicirt kleiner als 18878743 bleibt, mithin die Zahl 2. Hierauf subtrahirt man von r_1 1) das eben angedeutete Produkt $3.(n_2.10^2)^2 10.n_1$ oder $3.n_2^2 n_1.10^5$ d. h. $3.5^2.2.10^5$, 2) das Produkt aus dem dreifachen Quadrate des gefundenen zweiten Gliedes $3.(n_1.10)^2$ und dem ersten Gliede, $(n_2.10^2)$, d. h. das Produkt $3.n_2.n_1^2.10^4$ oder $3.5.2^2.10^4$, und 3) die dritte Potenz des gefundenen zweiten Gliedes, nämlich $(n_1 10)^3$ oder $2^3.10^3$. Die Ausführung der Subtraktion gibt für die Differenz die Zahl $r_2=3270743$. — Die nächst folgende Ziffer wird mittels der schon gefundenen Zahl $n_2.10^2+n_1.10$ aus r_2 so gefunden, wie die vorige Ziffer n_1 mittels $n_2 10^2$ aus r_1. Es ist nämlich n die grösste ganze Zahl †), welche mit dem dreifachen Quadrate der schon gefundenen Zahl $n_2.10^2+n_1.10$ und dem Faktor der gesuchten Ziffer (hier mit 10^0) multiplicirt, kleiner als r_2 bleibt, folglich hier die grösste ganze Zahl, welche mit $3(52.10)^2.1$, d. i. mit $3.52^2.10^2$ multiplicirt kleiner bleibt als 3270743, nämlich die Zahl 4. Nun subtrahirt man wiederum von r_2 1) das ebengedachte Produkt, nämlich $3(n_2.10^2+n_1.10)^2.n$, d. h. $3(n_2.10+n_1)^2 n.10^2$ oder $3.52^2.4.10^2$, 2) das Produkt aus dem dreifachen Quadrate des gefundenen Gliedes $n.10^0$ oder n und den schon früher ge-

†) Statt der grössten Zahl wird die nächst kleinere genommen, wenn die folgende Subtraktion sich als unmöglich erweisen sollte.

fundenen Gliedern $n_2.10^2+n_1 10$, d. h. das Produkt $3(n_2 10^2+n_1 10).n^2$ oder $3(n_2 10+n_1)n^2.10$, d. i. $3.52.4^2.10$, und endlich 3) die dritte Potenz des gefundenen neuen Gliedes, nämlich n^3 oder 4^3. Die Ausführung der Subtraktion führt auf die Zahl $r_3=919$, und diese ist der Ueberschuss des Radikanden über die dritte Potenz der gefundenen Zahl $n_2.10^2+n_1 10+n$.

Beweis. Dass der letzte Rest r_3 in der That der Ueberschuss des Radikanden über die dritte Potenz der gefundenen Zahl, und mithin die Bedingung $z^3<A$ erfüllt ist, zeigt man, wie folgt.

Es sind bei dem hier beschriebenen Verfahren eine Reihe von Zahlen nach einander vom Radikanden subtrahirt, und dabei hat sich jenes r_3 als der Ueberschuss des letzteren über die Summe der subtrahirten Zahlen ergeben. Man hat also nur darzuthun, dass diese Summe der dritten Potenz der gefundenen Zahl gleich ist. Es lässt sich aber nach §. 105 die dritte Potenz der gefundenen Zahl wie folgt zerlegen:

$$(524)^3=(52.10+4)^3=(52.10)^3+3.(52.10)^2.4+3.(52.10).4^2+4^3$$
$$=52^3.10^3+3.52^2.4.10^2+3.52.4^2.10+4^3,$$

mithin in eine Summe, deren letzte drei Glieder die von r_2 subtrahirten Zahlen sind, so dass nur nachzuweisen bleibt, dass das erste Glied $52^3.10^3$ denselben Werth hat, wie die Summe der direkt vom Radikanden und von r_1 subtrahirten Zahlen. Es ist aber

$$52^3=(5.10+2)^3=(5.10)^3+3(5.10)^2 2+3(5.10).2^2+2^3$$
$$=5^3.10^3+3.5^2.2.10^2+3.5.2^2.10+2^3,$$

also $52^3.10^3=5^3.10^6+3.5^2.2.10^5+3.5.2^2.10^4+2^3.10^3$,

welche Summe in der That aus den geforderten Gliedern besteht.

Man sieht leicht, dass sich vorstehender Beweis auch auf ein ganz allgemein gehaltenes Beispiel anwenden lässt.

Aus der Art endlich, wie die letzte Ziffer n gefunden ist, folgt, dass die Wahl einer grösseren Ziffer, die letzte Subtraktion unmöglich gemacht haben würde, dass also jede Zahl, die grösser als die gefundene ist, mit 3 potenzirt eine den Radikanden übertreffende Zahl liefern muss, und mithin auch die Bedingung $(z+1)^3>A$ erfüllt ist.

Bemerkung. In der Praxis pflegt man die im Schema klein geschriebenen Ziffern nicht mit hinzuschreiben, so dass man bei der ersten Subtraktion (bei der Gewinnung des r_1) nur die Ziffern der ersten 2 Klassen berücksichtigt, bei der Gewinnung des r_2 nur die der

ersten 3 Klassen, etc. Die Auffindung jeder neuen Ziffer besteht dann in dem Aufsuchen der grössten Zahl, welche mit dem dreifachen Quadrate der aus den schon gefundenen Ziffern bestehenden Zahl multiplicirt, kleiner ist als die Zahl, welche aus dem entsprechenden Reste dadurch hervorgeht, dass man die beiden letzten Ziffern fortlässt.

§. 107. *Ausführung der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der gewöhnlichen dekadischen Brüche.* Für das Addiren und Subtrahiren ist das Verfahren zunächst das des §. 43, für das Multipliciren und Dividiren das des §. 35, worauf die einzelnen Operationen, welche dann nur noch in Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen dekadischer ganzer Zahlen bestehen, nach §. 101 auszuführen sind.

§. 108. *Ausführung der Radikation gewöhnlicher dekadischer Brüche.* Da, wenn $a:b$ ein gewöhnlicher Bruch, also a und b dekadische Zahlen sind, auch ab und ab^2 sich als dekadische ganze Zahlen darstellen lassen, so lässt sich wegen

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{(ab)}}{b}$$

und

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{(ab^2)}}{b},$$

die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche auf die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel aus ganzen Zahlen zurückführen, so dass mit der vorstehenden Umformung das hier vorzunehmende Verfahren hinlänglich angedeutet ist.

§. 109. *Lehrsatz.* Jeder Decimalbruch lässt sich in einen anderen gleichgeltenden Decimalbruch verwandeln, der einen beliebig höheren Nenner hat.

Hat z. B. der gegebene Decimalbruch α Decimalstellen, so dass er durch $\frac{a}{10^\alpha}$ vorgestellt werden kann, und soll er in einen anderen verwandelt werden, der $10^{\alpha+\beta}$ zum Nenner, also β Decimalstellen mehr hat als vorher, so ergibt sich, da

$$\frac{a}{10^\alpha} = \frac{a.10^\beta}{10^\alpha.10^\beta} = \frac{a.10^\beta}{10^{\alpha+\beta}}$$

ist, dass man nur den Zähler mit 10^β zu multipliciren, oder was

dasselbe ist, an den schulmässig geschriebenen Decimalbruch noch β Nullen anzuhängen hat.

Zusatz 1. Ein schulmässig geschriebener Decimalbruch ändert seinen Werth nicht, wenn man an denselben beliebig viele Nullen hängt. Es ist also 35,732 = 35,73200 = 35,7320000 = etc.

Zusatz 2. Um gegebene Decimalbrüche in andere von gleichem Nenner zu verwandeln, braucht man demnach nur an die einzelnen Dezimalbrüche so viele Nullen zu hängen, dass die Zahl ihrer Decimalen der Zahl der Decimalen des mit dem grössten Nenner versehenen Decimalbruches gleich wird. So erhält man z. B. für 5,32; 0,0783; 782,1 deren Nenner resp. 10^2, 10^4, 10^1 sind, die Brüche 5,3200; 0,0783; 782,1000 mit dem Nenner 10^4.

§. 110. *Ausführung der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der Decimalbrüche.* Unter dieser Ausführung versteht man die Verwandlung der Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von Decimalbrüchen in einen Decimalbruch, oder, wo dies unmöglich ist, die Herstellung eines Decimalbruchs, der sich beliebig wenig von der gegebenen Summe, Differenz, etc. unterscheidet. Das Verfahren dabei ist folgendes.

1. Für die Addition und Subtraktion. Nachdem man den gegebenen Decimalbrüchen durch Anhängen von Nullen nach §. 109 gleiche Nenner gegeben hat, so dass, wenn 10^α der höchste gegebene Nenner war, die gegebene Summe oder Differenz resp. sich in der Form

$$\frac{a}{10^\alpha}+\frac{b}{10^\alpha}+\frac{c}{10^\alpha}+\text{etc. und } \frac{a}{10^\alpha}-\frac{b}{10^\alpha}$$

darstellen lässt, so hat man nach §. 43 diese Ausdrücke gleich

$$\frac{a+b+c+\text{etc.}}{10^\alpha}, \quad \frac{a-b}{10^\alpha},$$

welches, da $a+b+c+$ etc. und $a-b$ ganze Zahlen vorstellen, wiederum jederzeit Decimalbrüche sind. Die Regel für die Ausführung lässt sich daher so aussprechen: „Nachdem man durch Anhängen von Nullen den gegebenen Decimalbrüchen gleiche Nenner gegeben hat, addire oder subtrahire man die resultirenden Zähler. Die durch die Ausführung der Addition und resp. Subtraktion entstandene Zahl ist dann der Zähler des gesuchten Decimalbruchs, während der Nenner dem höchsten Nenner der gegebenen Brüche gleich ist.“

2. **Für die Multiplikation.** Sind die zu multiplicirenden Brüche $\frac{a}{10^\alpha}$ und $\frac{b}{10^\beta}$, so ist nach §. 35 deren Produkt gleich $\frac{ab}{10^{\alpha+\beta}}$, also ein Decimalbruch von $\alpha+\beta$ Decimalstellen, wie er hier gesucht wird, und die Regel ist daher: Man multiplicire die Zähler der gegebenen Brüche nach §. 102 und gebe der entstehenden Zahl so viele Decimalstellen, als die Faktoren zusammengenommen haben.

3. **Für die Division.** Sind a und b die Zähler, 10^α und 10^β die Nenner der zu dividirenden Decimalbrüche, so hat man

$$\frac{a}{10^\alpha}:\frac{b}{10^\beta}=\frac{a\,.\,10^\beta}{b.10^\alpha}=\frac{(a.10^\beta):b}{10^\alpha};$$

ist also $(a\,.\,10^\beta):b$ eine ganze Zahl, so ist die letzte Form ein Decimalbruch und mit deren Herstellung die Ausführung vollendet, so dass die Regel dann folgende ist: Man hängt an den Zähler des Dividenden so viele Nullen, als der Divisor Decimalen hat (d. h. man multiplicirt mit 10^β), und dividirt dann durch den Zähler b des Divisors; die bei der Ausführung der Division sich ergebende (ganze Zahl) ist der Zähler des gesuchten Decimalbruchs, und die Zahl der Decimalstellen ist der des Dividenden gleich. Sonach ist z. B. $5{,}372 : 0{,}0025 =$

$$(53720000:25):10^3=2148800:10^3=2148{,}800=2148{,}8.$$

Ist $a\,.\,10^\beta:b$ keine ganze Zahl, und hat man bei der Ausführung der Division $m+\frac{n}{b}$ erhalten, wo m die grösste in $a\,.\,10^\beta:b$ enthaltene ganze Zahl, also $n:b$ ein echter Bruch ist, so ist $\frac{(a\,.\,10^\beta):b}{10^\alpha}$ kein Decimalbruch mehr, lässt sich aber dann so schreiben: $\frac{m}{10^\alpha}+\frac{n:b}{10^\alpha}$, wo $\frac{m}{10^\alpha}$ ein Decimalbruch ist, welcher sich, da $n:b<1$, also $\frac{n:b}{10^\alpha}<\frac{1}{10^\alpha}$ ist, um weniger als $\frac{1}{10^\alpha}$, d. h. um weniger als eine Einheit der αten Decimalstelle von dem Werthe des gegebenen Quotienten unterscheidet.

Da indess, wenn γ eine beliebig grosse ganze Zahl vorstellt, $\frac{a\,.\,10^\beta}{10^\alpha}=\frac{a\,.\,10^\beta\,.\,10^\gamma}{10^{\alpha+\gamma}}$ ist, so hat man noch

$$\frac{a}{10^\alpha}:\frac{b}{10^\beta}=\frac{(a\,.\,10^{\beta+\gamma}):b}{10^{\alpha+\gamma}}.$$

Existirt nun eine ganze Zahl γ so, dass $(a\,.\,10^{\beta+\gamma}):b$ einer ganzen Zahl gleich wird, so benutzt man diese letzte Formel, d. h. man hängt beim vorher angegebenen Verfahren vor der Division durch b an die Zahl $a\,.\,10^\beta$ noch so viele Nullen an, als nöthig sind, um die Division aufgehen zu machen, und gibt dann der resultirenden Zahl, wenn die Zahl jener Nullen γ gewesen ist, $\alpha+\gamma$ Decimalstellen.

Wird aber für keinen Werth von γ, $(a\,.\,10^{\beta+\gamma}):b$ eine ganze Zahl, so ist, wenn die Division auf $\mu+\frac{\nu}{b}$ führt (wo $\nu<b$),

$$\frac{a}{10^\alpha}:\frac{b}{10^\beta}=\frac{\mu}{10^{\alpha+\gamma}}+\frac{\nu:b}{10^{\alpha+\gamma}};$$

es unterscheidet sich also der gefundene Decimalbruch $\frac{\mu}{10^{\alpha+\gamma}}$ (wegen $\nu:b<1$, also $\frac{\nu:b}{10^{\alpha+\gamma}}<\frac{1}{10^{\alpha+\gamma}}$) um weniger als eine Einheit der $(\alpha+\gamma)$ten Decimalstelle von dem Werthe des gegebenen Quotienten, mithin, da γ beliebig gross, und folglich $\frac{1}{10^{\alpha+\gamma}}$ beliebig klein gemacht werden kann, beliebig wenig von demselben.

§. 111. *Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche. Periodische Decimalbrüche.* Ist der zu verwandelnde gemeine Bruch, in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt, durch $a:b$ vorgestellt, und b ein Theiler irgend einer ganzen Potenz von 10, etwa von 10^α, so hat man

$$\frac{a}{b}=\frac{a\,.\,10^\alpha}{10^\alpha}:b=\frac{a\,.\,10^\alpha:b}{10^\alpha},$$

wo $a\,.\,10^\alpha:b$ einer ganzen Zahl gleich ist, und mithin durch Ausführung der Division ein dem Bruche $a:b$ gleicher Decimalbruch von α Decimalstellen erhalten wird. Ist dagegen b kein Theiler irgend einer ganzen Potenz von 10, so nimmt man α beliebig, und erhält nach §. 110. aus $\frac{a\,.\,10^\alpha:b}{10^\alpha}$ einen bis auf die αte Decimalstelle genauen Näherungswerth in Decimalbruchsform.

Decimalbrüche, welche auf diese Weise näherungsweise gefunden werden, sind jederzeit periodisch, d. h. ihr Zähler be-

steht, wenigstens von einer bestimmten Stelle an, aus ganz bestimmten, sich in derselben Ordnung beständig wiederholenden Ziffern, wie gross auch das α genommen werden mag. Ist nämlich $a:b$ ein echter Bruch, so führt das auf $a \,.\, 10^{\alpha} : b$ angewendete gewöhnliche Divisionsverfahren successiv auf Reste, die sämmtlich kleiner als b sind, und unter denen sich daher nur $b-1$ von einander verschiedene befinden können. Da nun $a \,.\, 10^{\alpha}$ aus den Ziffern der Zahl a und darauf folgenden Nullen besteht, und $b > a$ ist, so wird jede bei jenem Divisionsverfahren sich ergebende neue Ziffer des Resultats durch Division von b in den mit einer Null versehenen zuletzt gewonnenen Rest erhalten. Dies gibt aber, da spätestens der bte Rest dem ersten wieder gleich sein muss, spätestens für die bte Ziffer des Quotientenwerthes wieder dieselbe Division, wie bei der ersten Ziffer, und die folgende Rechnung kann sich dann gar nicht weiter von derjenigen unterscheiden, welche man sogleich nach der ersten Ziffer hat ausführen müssen. Es wird also der Quotientenwerth mit höchstens $b-1$ von einander verschiedenen Ziffern anfangen und diese müssen dann dauernd und immer wieder in einerlei Ordnung wiederkehren. — Die sich wiederholenden Ziffern nennt man die P e r i o d e des Decimalbruchs.

Wenn $a:b$ ein unechter Bruch ist, so hat man zur Gewinnung der ersten Ziffer des Quotientenwerthes im Allgemeinen nicht mehr mit b in eine Zahl zu dividiren, die aus einer Zahl, die kleiner wie b ist, und einer darauf folgenden Null besteht; und falls a mehr als das 10fache von b beträgt, wird auch die zweite Ziffer nicht durch Division in solche Zahl gewonnen; beträgt a mehr als das 100fache von b, so gilt dies auch von der dritten Ziffer des Quotientenwerthes etc. Es wird daher alsdann das vorige Räsonnement erst von demjenigen Reste ab anwendbar, zu welchem die erste an a gehängte Null herbeigezogen wird. Eine Folge davon ist, dass die ersten Ziffern des Quotientenwerthes sich bei der Fortsetzung des Divisionsverfahrens nicht mit wiederholen. — Die vorderen, nicht wiederkehrenden Ziffern des Quotientenwerthes heissen die V o r z i f f e r n des periodischen Decimalbruchs, und letzterer selbst wird ein g e m i s c h t p e r i o d i s c h e r genannt, im Gegensatze zu den vorher besprochenen, welche r e i n e p e r i o d i s c h e D e c i m a l b r ü c h e heissen.

§. 112. *Verwandlung periodischer Decimalbrüche in gemeine Brüche.*

1. Es sei der zu verwandelnde Decimalbruch ein rein periodischer, etwa der Bruch 0,285328532853 etc. — Man bezeichne den gesuchten gemeinen Bruch mit z, so dass man hat

$$z = 0{,}285328532853\ldots\ldots,$$

und dieses z mit 10^4 multiplicirend,

$$z.10^4 = 2853{,}285328532853\ldots\ldots$$

Man erhält dann z von $z.10^4$ subtrahirend, $z.10^4 - z = 2853$, oder da $z.10^4 - z = z(10^4 - 1) = 9999\,z$ ist, $9999\,z = 2853$, woraus sich, wenn man jederseits mit 9999 dividirt, ergibt $z = \frac{2853}{9999}$.

Hätte der gegebene Decimalbruch α periodische Ziffern gehabt, so würde man die Differenz $z.10^\alpha - z$ haben bilden müssen, und der Nenner von z hätte aus α Neunen bestanden.

Man erkennt hieraus folgende Regel zur Bestimmung von z.

„Steht in dem gegebenen Bruche das Komma dicht vor der ersten periodischen Ziffer, so besteht der Zähler des ihm gleichen gemeinen Bruches aus den periodischen Ziffern selber, und der Nenner aus einer eben so grossen Anzahl Neunen."

Hat das Komma eine andere Stellung, und ist der gegebene Bruch etwa folgender 285,328532853 oder folgender 0,0000028532853 . . ., so ist, wenn man jenen Bruch mit z_1, diesen mit z_2 bezeichnet, dem z aber die alte Bedeutung lässt,

$$z_1 : 10^3 = 0{,}28532853\ldots = z, \text{ und } z_2 . 10^5 = 0{,}28532853\ldots = z$$

folglich $z_1 = z.10^3 = \frac{2853}{9999}.10^3 = \frac{2853000}{9999}$ und

$$z_2 = z : 10^5 = \frac{2853}{9999.10^5} = \frac{2853}{999900000}.$$

Man erkennt hieraus sogleich die Richtigkeit folgender Regeln:

a) Stehen in einem reinen periodischen Decimalbruche α Ziffern vor dem Komma, so ist derselbe einem gemeinen Bruche gleich, dessen Zähler aus den periodischen Ziffern und α darauf folgenden Nullen besteht, und dessen Nenner aus so vielen Neunen zusammengesetzt ist, als die Periode Ziffern hat.

b) Stehen zwischen dem Komma und der ersten periodischen Ziffer eines echten und reinen periodischen Decimalbruchs α Nullen, so ist derselbe einem gemeinen Bruche gleich, dessen Zähler

die Periode ist, und dessen Nenner aus so vielen Neunen als die Periode Ziffern hat, und α darauf folgenden Nullen besteht.

2. Es sei der Decimalbruch ein gemischt periodischer, etwa 411,28532853...., und der gesuchte gemeine Bruch werde durch z bezeichnet. Man hat alsdann

$$z = 411,28532853....,$$

$$z.10^4 = 4112853,28532853....,$$

folglich $z.10^4 - z = 9999z = 4112853 - 411 = 4112442$,

und findet aus dieser letzten Gleichung durch Division mit 9999,

$$z = \frac{4112442}{9999}.$$

Man erkennt hieraus leicht die Richtigkeit der folgenden Regel.

„Steht das Komma unmittelbar vor der ersten periodischen Ziffer, so ist der Decimalbruch einem gemeinen Bruche gleich, dessen Zähler erhalten wird, wenn man von der aus den Vorziffern und den Ziffern der ersten Periode gebildeten Zahl, die von den blossen Vorziffern gebildete Zahl subtrahirt, und dessen Nenner aus so vielen Neunen besteht, als die Periode Ziffern hat."

Steht das Komma um α Stellen weiter nach rechts oder links, so hat man, wie leicht ersichtlich, nur noch α Nullen resp. an den Zähler oder den Nenner zu hängen.

§. 113. *Ausführung der Quadrat- und Kubik-Wurzelausziehung aus Decimalbrüchen.* Man führt nach dem im §. 108 angegebenen Verfahren die Wurzelausziehung auf die Wurzelausziehung aus einer ganzen Zahl zurück.

1. Ist demnach z. B. die Radikation an $\sqrt[2]{\frac{a}{10^\alpha}}$ auszuführen, so hat man, wenn α eine gerade Zahl, etwa gleich $2n$ ist,

$$\sqrt[2]{\frac{a}{10^\alpha}} = \frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[2]{[10^{2n}]}} = \frac{\sqrt[2]{a}}{10^n}.$$

Man hat also nur die Wurzel aus der ganzen Zahl a zu ziehen und, falls man dabei auf eine ganze Zahl kommt, dieselbe durch 10^n zu dividiren, d. h. dieselbe als Zähler eines Decimalbruches von n Decimalstellen zu nehmen.

Ist α eine ungerade Zahl, etwa gleich $2n-1$, so ist

$$\sqrt[2]{\frac{a}{10^\alpha}} = \sqrt[2]{\frac{a}{10^{2n-1}}} = \sqrt[2]{\frac{a.10}{10^{2n}}} = \frac{\sqrt[2]{(a.10)}}{10^n}.$$

Man bekommt also als Resultat einen Decimalbruch von n Decimalstellen, dessen Zähler durch Wurzelausziehung aus dem 10fachen des Zählers a gewonnen wird.

Ist in diesen Fällen aber $\sqrt[2]{a}$ oder $\sqrt[2]{(a \,.\, 10)}$ keiner ganzen Zahl gleich, so ist $\frac{\sqrt[2]{a}}{10^n}$ und resp. $\frac{\sqrt[2]{(a \,.\, 10)}}{10^n}$ kein Decimalbruch mehr. Man hat aber dann, wenn m die ganze Zahl bezeichnet, welche das Verfahren des §. 104 für $\sqrt{a}$ liefert,

$$\sqrt[2]{a} = m + p,$$

wo $p < 1$, also ein echter Bruch ist, und demnach, falls $\alpha = 2n$ ist,

$$\sqrt{\frac{a}{10^\alpha}} = \frac{m}{10^n} + \frac{p}{10^n}.$$

Der Decimalbruch $\frac{m}{10^n}$ weicht sonach um weniger als $\frac{1}{10^n}$, also um weniger als eine Einheit der nten Decimale von dem Werthe der gegebenen Wurzel ab.

Da aber nach §. 109 dem gegebenen Decimalbruche durch Anhängen von Nullen unbeschadet seines Werthes eine beliebig viel grössere Zahl Decimalen gegeben werden kann, so lässt die Genauigkeit des Resultates sich beliebig weit treiben.

Soll z. B. der resultirende Decimalbruch um weniger als $\frac{1}{10^\gamma}$ von dem Werthe der Quadratwurzel abweichen, so hängt man an den gegebenen Radikanden so viele Nullen, bis die Zahl der Decimalen 2γ wird, zieht dann nach §. 104 aus dem Zähler desselben die Quadratwurzel und gibt der gewonnenen Zahl γ Decimalstellen.

2. Ist an $\sqrt[3]{\frac{a}{10^\alpha}}$ die Wurzelausziehung auszuführen, so ist, wenn α eine durch 3 theilbare Zahl, etwa gleich $3n$ ist,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{10^\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{a}{10^{3n}}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{10^n}.$$

Man zieht also nach §. 106 aus a die Kubikwurzel und hat in der dadurch erhaltenen Zahl, falls dieselbe eine ganze Zahl ist, den Zähler des gesuchten Decimalbruches, während n die Zahl seiner Decimalstellen wird. Ist α nicht durch 3 theilbar, so braucht man nur zuvor an den gegebenen Decimalbruch resp. eine oder

zwei Nullen zu hängen, um die Zahl der Decimalstellen zu einem Vielfachen von drei zu ergänzen.

Sollte ferner $\sqrt[3]{a}$ keiner ganzen Zahl gleich sein, so verfährt man in derselben Weise, wie es so eben für die Quadratwurzel angegeben worden ist, um einen Decimalbruch zu gewinnen, der beliebig wenig von dem Werthe der gegebenen Kubikwurzel abweicht. Sonach wird, wenn z. B. $\alpha = 3n$ ist,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{10^\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{a\,.\,10^{3\beta}}{10^{3n+3\beta}}} = \frac{\sqrt[3]{(a\,.\,10^{3\beta})}}{10^{n+\beta}},$$

und wenn m die ganze Zahl ist, die man nach §. 106 aus $\sqrt[3]{(a.10^{3\beta})}$ erhält, so ist $\frac{m}{10^{n+\beta}}$ ein Decimalbruch, der um weniger als eine Einheit der $(n+\beta)$ten Decimalstelle von der gegebenen Kubikwurzel verschieden ist.

§. 114. *Zusatz.* Man kann das Verfahren des §. 113 benutzen, um das Verfahren der §§. 104 und 106 zu vervollständigen. Ist nämlich $\sqrt{a}$ oder $\sqrt[3]{a}$ (unter a eine ganze Zahl verstanden) keiner ganzen Zahl gleich, so setze man dafür resp.:

$$\sqrt{\frac{a\,.\,10^{2\beta}}{10^{2\beta}}} = \frac{\sqrt{(a\,.\,10^{2\beta})}}{10^\beta} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt[3]{(a\,.\,10^{3\beta})}}{10^{3\beta}} = \frac{\sqrt[3]{(a\,.\,10^{3\beta})}}{10^\beta}$$

wenn man mit Hülfe des §. 113 für die Wurzeln Decimalbrüche erhalten will, die um weniger als eine Einheit der βten Decimalstelle von deren Werthe verschieden sind.

§. 115. *Dekadische Logarithmen. Kennziffer. Mantisse.* Dekadische oder Briggische Logarithmen sind diejenigen, deren Basis die Zahl Zehn ist. Die Ausführung der Logarithmation für diese Basis ist ein für allemal für alle ganze Zahlen von 1 bis 100000 geschehen und finden sich die Resultate in den sogenannten Logarithmentafeln aufgezeichnet. Bei der Irrationalität der meisten Logarithmen können diese Tafeln nur Näherungswerthe enthalten, welche in Form von Decimalbrüchen gewöhnlich bis zur 6ten oder 7ten Decimalstelle gehen. Die Decimalziffern dieser Logarithmenwerthe heissen die Mantisse, während man die Zahl der ganzen Einheiten in diesen Werthen die Kennziffer des Logarithmenwerthes nennt.

So findet man z. B. $\log_{10} 200 = 2{,}3010300$, wo demnach 2 die Kennziffer, 30103000 die Mantisse ist. Nennt man lieber

0,3010300 die Mantisse, so lässt sich die Form der Logarithmenwerthe durch $m+p$ vorstellen, wo m die Kennziffer, und p die Mantisse bezeichnet.

Da $\log_{10} 10^{n-1} = n-1$ und $\log_{10} 10^n = n$ ist, und zwischen 10^{n-1} und 10^n alle nziffrigen Zahlen liegen, so sind die Logarithmen aller nziffrigen Zahlen zwischen $n-1$ und n enthalten, d. h. sie haben sämmtlich die Kennziffer $n-1$. Es ist mithin stets die Kennziffer eines Logarithmen einer ganzen Zahl um Eins geringer als die Zahl der Ziffern des Logarithmanden, daher man in den meisten Tafeln sich mit der Aufzeichnung der Mantissen begnügt hat.*)

§. 116. ***Bestimmung der Logarithmen der Brüche aus den Logarithmen der ganzen Zahlen.*** 1. Was die gemeinen Brüche betrifft, so hat man nach §. 86 Gl. (50).

$$\log_{10} \frac{a}{b} = \log_{10} a - \log_{10} b,$$

so dass also nur nöthig ist, von dem Logarithmen des Zählers den des Nenners zu subtrahiren, um den Logarithmen eines gemeinen Bruchs $a : b$ in dekadischer Form zu erhalten.

2. Handelt es sich um einen Decimalbruch $a : 10^\alpha$ so hat man

$$\log_{10} \frac{a}{10^\alpha} = \log_{10} a - \log_{10} 10^\alpha = \log_{10} a - \alpha.$$

Man erhält also den Logarithmus eines Decimalbruchs, wenn man vom Logarithmen des Zählers die Zahl α der Decimalen subtrahirt.

Ist m die Kennziffer von $\log_{10} a$ (mithin a eine $(m+1)$ zifferige Zahl) und p die Mantisse, so wird

$$\log_{10} \frac{a}{10^\alpha} = (m-\alpha) + p;$$

es hat daher jeder Decimalbruch, der grösser als Eins ist (weil dann $m \geqq \alpha$ ist) dieselbe Mantisse wie sein Zähler, und die Kennziffern unterscheiden sich nur um die Anzahl der Decimalstellen. Ist $a : 10^\alpha$ dagegen ein echter Bruch, also $m < \alpha$ so ist der Logarithmus negativ. In letzterem Falle schreibt man den Logarithmenwerth gewöhnlich in der Form $p-(\alpha-m)$, und behält auf diese Weise in den Rechnungen die Mantisse p des Zählers unverändert bei. — So ist z. B. $\log_{10} 0{,}000235 = \log_{10} 235 - 6 =$

*) Da, wo nur von dekadischen Logarithmen die Rede ist, pflegt man die Basis im Logarithmen-Zeichen nicht zu vermerken.

2,3710679 — 6 = 0,3710679 — 4, wofür man auch gern, um die 10 einzuführen, 6,3710679 — 10 schreibt.

§. 117. *Bestimmung der Logarithmanden aus den Logarithmenwerthen.* Ist der Werth $m+p$ eines Logarithmen gegeben, unter m die Kennziffer und unter p die Mantisse verstanden, und findet man in den Tafeln, dass der zum Logarithmenwerth p gehörende Logarithmand die Zahl a ist, so ist dieses a nach dem vorigen §. auch der Zähler des Decimalbruches, dessen Logarithmus $m+p$ ist, und da die Kennziffer m nur einer $(m+1)$ziffrigen Zahl zukommen kann, so hat man nur ein Komma hinter der $(m+1)$ten Ziffer der Zahl a zu setzen, um den gesuchten Logarithmanden zu haben.

Ist der Werth des Logarithmen eine negative Zahl und in der Form $p-m$ (wo p wiederum die Mantisse vorstellt) gegeben, so sucht man wieder in den Tafeln bei der Mantisse p die zugehörige Zahl, welche wir mit a bezeichnen wollen, und würde, falls $m=0$ wäre, das Komma hinter die erste Ziffer stellen müssen. Da aber nach §. 116, wenn $\log_{10} A = p$ ist, $\log_{10}\frac{A}{10^m} = p - m$ wird, so ist der zu $p-m$ gehörende Logarithmand 10^m mal kleiner, als der zu p gehörige, mithin hat man den für $m=0$ erhaltenen Decimalbruch noch mit 10^m zu dividiren, also das Komma nur $m-1$ Stellen vor der ersten Ziffer der Zahl a zu stellen. Ist sonach z. B. $\log x = 0{,}5044573 - 4$ gegeben, so findet man in den Tafeln $0{,}5044573 = \log_{10} 3{,}1949$, mithin

$$0{,}5044573 - 4 = \log_{10} 0{,}00031949.$$

§. 118. *Ausführung der Operationen mit Zahlen, die auf negative oder imaginäre Resultate führen.* In den vorhergehenden §§. haben wir gesehen, wie alle Zahlenverbindungen, welche einen absoluten rationalen Zahlenwerth haben, sich in dekadischer (endlicher) Form herstellen, d. h. in eine dekadische ganze Zahl oder in einen Quotienten dekadischer ganzer Zahlen verwandeln lassen. Ist der Werth ein irrationaler absoluter Zahlenwerth, so lässt sich, wie gezeigt worden, eine ganze oder gebrochene dekadische Zahl angeben, deren Werth dem Werthe der Zahlenverbindung beliebig nahe kommt.

Ist eine numerische Zahlenverbindung nun zwar reell, aber nicht von absolutem Zahlenwerthe, so wissen wir, dass der Werth,

wenn er nicht Null ist, doch in die Form $-A$ gebracht werden kann, wo A einen Ausdruck von absolutem Zahlenwerthe vorstellt; während nach dem Vorigen wiederum A sich dekadisch genau oder beliebig genähert ausdrücken lässt. In solchem Falle versteht man unter der Ausführung der Operationen die Herstellung dieser Form $-A$.

So wird man also z. B. bei $26-36+12+21-47$ zu diesem Behufe zuerst, das Verfahren des §. 21 anwendend, die additiven und subtraktiven Glieder unter sich verbinden und die Differenz $(26+12+18)-(36+47)$ bilden, dann die Operationen an den beiden Gliedern ausführend, schreiben $56-83$; endlich nach §. 28 die kleinere Zahl von der grösseren subtrahirend, die Zahl 27 bilden und ihr ein + oder − Zeichen vorsetzen, je nachdem der Minuend oder der Subtrahend die grössere Zahl ist.

Wenn endlich der Werth der Zahlenverbindung imaginär ist, so verlangt man bei der Ausführung die Herstellung eines Ausdruckes von der Form $a+b\sqrt{-1}$, wo a und b genaue oder angenähert richtige Zahlen in dekadischer Form vorstellen.

b. Buchstabenrechnung.

§. 119. *Ausführung der Operationen an Buchstaben-Ausdrücken.* Sind die Elemente in einem Ausdrucke Buchstaben, oder Buchstaben und Ziffern, so besteht das gewöhnlich sogenannte Addiren, Subtrahiren etc., oder wie wir es ausdrücken, die Ausführung der Addition, Subtraktion etc. nur resp. in der Umformung einer Summe, Differenz, etc. in einen anderen möglichst einfachen Ausdruck. Da nun die allgemeinen Formeln des ersten Abschnitts für die verschiedenen Verbindungsformen gerade solche einfache Umformungen liefern, so würde das Ausführen der Operationen nichts weiter sein, als die unmittelbare Anwendung der Formeln jenes Abschnittes. Dabei ist dann nur die Bestimmung hinzuzufügen, dass an denjenigen Theilen der Ausdrücke, welche aus Ziffern zusammengesetzt sind, die Ausführungen nach den Regeln der Ziffernrechnung vorzunehmen sind.

Wenn wir daher hierbei noch einen Augenblick verweilen, so geschieht dies vornehmlich, um Gelegenheit zu haben, dem Anfänger diejenigen Beispiele aus der Sammlung des *Mayer*

Hirsch namhaft zu machen, welche zur Einübung der einzelnen Regeln benutzt werden können.

Der Ausdruck „Ausführung der Addition, Subtraktion etc." wird von den Mathematikern, welche überhaupt sich desselben bedienen, in der Regel nur dann angewendet, wenn der Gegensatz zu dem hervorgehoben werden soll, was sie angedeutete Addition, angedeutete Subtraktion, etc. (wir aber schlechthin Addition, Subtraktion etc.) nennen; indess ist bei einigen Umformungen der Ausdruck Ausführung (oder Vollziehung) der Operation stehend geworden, und diese Fälle werden wir am Schlusse besonders namhaft machen.

Der Uebersicht wegen stellen wir hier die allgemeinen Formeln des ersten Abschnitts, nach denen die in der Arithmetik begründeten Umformungen geschehen, mit ihren Nummern zusammen.

(VII) $(a+b)c=ac+bc$

(VIII) $(a^b)^c=(a^c)^b$

(IX) $a^{b+c}=a^b a^c$

(XI) $(ab)^c=a^c b^c$

(XII) $a^{bc}=(a^b)^c$

(14) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

(15) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}=\frac{a:c}{b:d}$

(16) $(a-b)c=ac-bc$

(17) $(a\pm b):c=a:c\pm b:c$

(33) $a^{b-c}=a^b:a^c$

(34) $(a:b)^c=a^c:b^c$

(35) $a^{\frac{b}{c}}=\sqrt[c]{(a^b)}$

(36) $\sqrt[c]{(ab)}=\sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}$

(37) $\sqrt[c]{\frac{a}{b}}=\sqrt[c]{a}:\sqrt[c]{b}$

(38) $\sqrt[bc]{a}=\sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}$

(49) $\log bc=\log b+\log c$

(50) $\log\frac{b}{c}=\log b-\log c$

(51) $\log b^c=c\log b$

(52) $\log\sqrt[c]{b}=\frac{\log b}{c}$

Hierzu kommen nur noch die Formeln für die Addition und Subtraktion, welche sich in den Regeln des §. 20 aussprechen; die Formeln, welche die Vertauschbarkeit der Faktoren eines Produkts lehren; die Regel des §. 40 für die Umformung eines Produkts algebraischer Summen; und die Regel des §. 43 für die Umformung algebraischer Summen von Quotienten.

§. 120. *Ausführung der algebraischen Addition.*

1) Sind die Ausdrücke, an welchen die algebraische Ad-

dition ausgeführt werden soll, selber algebraische Summen: so verlangt man im allgemeinen die Herstellung einer algebraischen Summe mit einfachen Gliedern, d. h. mit Gliedern, die selber keine Summen mehr sind. Es geschieht dies nach den Regeln des §. 20.

So heisst z. B. die Subtraktion an $(a-b+c)-(m+n-p)$ ausführen, diesen Ausdruck in die Summe $a-b+c-m-n+p$ umformen.

2) Sind die Ausdrücke Produkte, welche gleiche Faktoren haben, so will man bei der Ausführung der algebraischen Addition, die Verwandlung in ein Produkt nach den Gll. (VII) und (16). Werden die ungleichen Faktoren von Ziffern gebildet (in welchem Falle sie Coefficienten heissen), so wendet man nachgehend die Regeln der Ziffernrechnung an.

Sonach führt z. B. $3a^2-4b-2c^3-5a^2-3c^3-7b+6c^3-a^2$ nach und nach auf $3a^2-5a^2-a^2-4b-7b-2c^3-3c^3+6c^3$, $(3-5-1)a^2-(4+7)b-(2+3-6)c^3$, $-3a^2-11b+c^3$.

Hierher gehören aus *Mayer Hirsch* die Beispiele 1—24 auf pag. 9 u. 10; ferner 1—24 auf pag. 11 u. 12; 1—6 auf pag. 22; 1—5 auf pag. 41.

Beispiele, in denen die Ausführungen (1) u. (2) gleichzeitig in Anwendung kommen, finden sich a. a. O. pag. 10 u. 11 (1—8), pag. 12 u. 13 (1—21), pag. 23 (11—15), pag. 42 (6—9).

So führt unter andern

$$(3\sqrt[4]{a}-b\sqrt[5]{c}+3cg^3+6g)-(7\sqrt[4]{a}-5\sqrt[5]{c}+6mg^3+f)$$

auf $$(3-7)\sqrt[4]{a}+(5-b)\sqrt[5]{c}+(3c-6m)g^3+6g-f$$

oder $$-4\sqrt[4]{a}+(5-b)\sqrt[5]{c}+3(c-2m)g^3+6g-f.$$

3) Sind die Ausdrücke Quotienten, so will man bei der Ausführung der algebr. Addition die Verwandlung in einen Quotienten nach den Gll. (17), wenn die Divisoren einander gleich sind; nach §. 43, wenn die Divisoren ungleich sind. So will man also z. B.

$$\frac{5a}{3b}-\frac{2h}{4b^2c}+\frac{3a}{2c^3}-5b^2 \text{ in } \frac{20abc^3-6hc^2+18ab^2-60b^4c^3}{12b^2c^3}$$

umgewandelt sehen. Beispiele hiezu s. a. a. O. pag. 62 u. 63 (1—16).

§. 121. *Ausführung der Multiplikation.* 1. Wenn einer oder mehrere der Faktoren algebr. Summen sind, so will man bei der Ausführung der Multiplikation die Verwandlung in eine Summe von Produkten nach den Gll. (VII) u. (16) oder nach §. 40.

Beispiele siehe a. a. O. pag. 14, 15, 16 (1—23). Da additive

und subtraktive Ausdrücke gleichfalls algebr. Summen sind, so lassen sich hieher auch viele der Beispiele von pag. 13 und 14 ziehen.

2. Wenn die Faktoren Quotienten sind, so meint man die Verwandlung in einen Quotienten nach Gl. (14). — Es soll also z. B. $(-5ce)(+\frac{3cd}{4a^2b})(-\frac{4de}{7mn})$ in $\frac{15ccddee}{7a^2bmn}$ umgeformt werden.

Beispiele: a. a. O. einige von pag. 13, 14 (*Multiplikation einfacher Grössen*); der Rest sind Combinationen der Ausführungen (1 u. 2.)

3. Sind die Faktoren Potenzen, so will man die Umwandlung in Potenzen nach Gl. (X) od. (XI). Hiernach ergibt sich z. B. aus

$$(2a^{-\frac{1}{2}}b^3 - 5a^{\frac{1}{3}}b^2c)\ (a^{\frac{1}{5}} - b^{\frac{1}{2}}),$$

nachdem man die Multiplikation nach Nr. 1 ausgeführt d. h.

$$2a^{-\frac{1}{2}}b^3a^{\frac{1}{5}} - 5a^{\frac{1}{3}}b^2ca^{\frac{1}{5}} - 2a^{-\frac{1}{2}}b^3b^{\frac{1}{2}} + 5a^{\frac{1}{3}}b^2cb^{\frac{1}{2}}$$

geschrieben hat, durch Ausführung an den einzelnen Gliedern nach der jetzigen Nummer $2a^{-\frac{3}{10}}b^3 - 5a^{\frac{8}{15}}b^2c - 2a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{2}} + 5a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{2}}c$.

Beispiele für Combinationen mit den Ausführungen (1 und 2) s. a. a. O. pag. 24, 25 (1—24), pag. 25 (1—31), pag. 54 (1—17).

4. Sind die Faktoren Wurzeln, so will man die Verwandlung in eine Wurzel nach Gl. (36), wobei jedoch, so oft man andere Wurzeln als Quadratwurzeln hat, die Voraussetzung gemacht werden muss, dass die Wurzeln nur ihre absoluten Werthe vorstellen, weil sonst die Gl. (36) nicht mehr allgemeine Gültigkeit hat; namentlich dürfen also die Radikanden nicht negativ sein.

So z. B. gibt $\sqrt[6]{(a^2b^3)}.\sqrt[10]{(ab^3)}.\sqrt[3]{(bc^2)}$ nach und nach $\sqrt[30]{([a^2b^3]^5)}.\sqrt[30]{([ab^3]^3)}.\sqrt[30]{([bc^2]^{10})}$, $\sqrt[30]{([a^2b^3]^5[ab^3]^3[bc^2]^{10})}$ oder wenn man die 3 Faktoren nach Gl. (XII) umformt, $\sqrt[30]{(a^{10}b^{15}a^3b^9b^{10}c^{20})}$, und noch die Multiplikationen im Radikanden nach Nr. 3 vollziehend, $\sqrt[30]{(a^{13}b^{34}b^{20})}$. — Als zweites Beisp. diene: $(\sqrt{7} - 3\sqrt{5} + 6\sqrt{11}).2\sqrt{5}$. Führt man zuerst die Multiplikationen nach Nr. 1 aus, so ergibt sich $2\sqrt{7}\sqrt{5} - 6\sqrt{5}\sqrt{5} + 12\sqrt{5}\sqrt{11}$ und alsdann die Multiplikationen an den Wurzeln ausführend, $2\sqrt{35} - 6\sqrt{25} + 12\sqrt{55}$.

Da wir es hier mit Quadratwurzeln zu thun haben, so bleibt die vorstehende Umformung allgemein gültig, wenn man überall die Wurzeln als zweideutig ansieht; für $6\sqrt{25}$ darf man aber nur dann 6.5 oder 30 schreiben, wenn man weiss, dass die Wurzel $\sqrt{5}$ in beiden Faktoren denselben ihrer Werthe vorstellte, weil im entgegengesetzten Falle hier $6\sqrt{25} = -30$ sein würde.

Vergl. §. 80. — Denkt man sich bei der Multiplikation zweier imaginären Quadratwurzeln, dieselben als das Produkt des absoluten Werthes der Quadratwurzeln aus dem numerischen Werthe der Radikanden und aus einem und demselben Werthe der $\sqrt{-1}$, mithin z. B. unter $\sqrt{-3}\sqrt{-7}$ das Produkt $(i\sqrt{3})(i\sqrt{7})$, so bekommt man ein negatives Resultat, in unserem Fall $i^2\sqrt{21}$, oder da $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ ist, $-\sqrt{21}$. Führt man dagegen die Multiplikation an $\sqrt{-3}\,.\,\sqrt{-7}$ direkt aus und behält den absoluten Werth der resultirenden Wurzel bei, so bekommt man $+\sqrt{([-3][-7])} = +\sqrt{21}$. Man darf daher in keinem Falle ohne besondere Gründe bei der Ausführung der Multiplikation an imaginären Quadratwurzeln das Resultat als ein eindeutiges auffassen.

Beispiele s. a. a. O pag. 45 (1—61). In den Beispielen auf pag. 59 (1—21) sind die Resultate aus dem eben angeführten Grunde meist nur beschränkt richtig.

§. 122. *Ausführung der Division.* 1. Wenn Divisor und Dividend algebraische Summen sind, so verlangt man eine Umformung in eine Summe resp. nach Gl. (17) oder nach §. 97.

Beispiele s. a. a. O. pag. 16 (unter der Rubrik „*Division einfacher Grössen*“), pag. 17 (die Rubrik „*Division zusammengesetzter Grössen*“), wo mehrere der früheren Ausführungen gleichzeitig angewendet sind, so wie die Ausführung der nun folgenden Nr. 2.

2. Wenn Divisor und Dividend Quotienten sind, so verlangt man die Umformung in einen Quotienten nach Gl. (15.)

3. Wenn Divisor und Dividend Potenzen mit gleichen Dignanden sind, verlangt man meist Umformungen in Potenzen nach Gl. (33).

Beispiele s. a. a. O. pag. 28. (Rubrik „*Division einfacher Grössen*“), zum Theil in Verbindung mit der Ausführung Nr. 2; und pag. 29 (Rubrik „*Division zusammengesetzter Grössen*“), wo zugleich Ausführungen nach Nr. 1 angewendet sind; ferner pag. 55.

4. Wenn Divisor und Dividend Wurzeln sind, verlangt man meist die Umformung in eine Wurzel nach Gl. (37), wobei wiederum dieselben Rücksichten zu nehmen sind, wie im §. 121. bei Nr. 4.

Beispiele s. a. a. O. pag. 48. (1—14), wo gleichzeitig Ausführungen nach Nr. 2 angewendet sind.

§. 123. *Ausführung des Potenzirens.* 1. Wenn der Dignand eine algebr. Summe und der Exponent eine ganze Zahl ist, so fasst

man die Potenz als Produkt gleicher Faktoren auf, und die Ausführung geschieht dann nach §. 121, 1.

2. Wenn der Dignand ein Produkt oder ein Quotient ist, so will man zuweilen die Umformung in ein Produkt oder eine Potenz nach Gll. (XI und 34).

Beispiele s. a. a. O. pag. 32 (9—20). In den Beispielen (13—20) sind die negativen Dignanden als Produkte aufzufassen, deren erster Faktor —1 ist. Für $(-a^3)^5$ ist also z. B. zu denken $[(-1)a^3]^5$, so dass die Ausführung des Potenzirens auf $(-1)^5(a^3)^5$ d. h. auf $(-1)(a^3)^5$ oder $-(a^3)^5$ führt, während $(-a^3)^6=[(-1)a^3]^6=(-1)^6(a^3)^6=(+1)(a^3)^6=(a^3)^6$ ist.

3. Wenn der Dignand eine Potenz ist, so will man meist wiederum eine Potenz nach Gl. (XII).

Beispiele s. a. a. O. pag. 32 (1—20) und pag. 57 (1—11), wo meist ausserdem die Ausführung des Potenzirens der entstehenden Produkte und Quotienten nach Nr. 2. vorgenommen ist.

So bekommt man z. B. nach Nr. 2 nach einander für

$$\left(\frac{a^m b^3 c^{-2}}{d^{-5}c^6}\right)^{-3}, \quad \frac{(a^m b^3 c^{-2})^{-3}}{(d^{-5}c^6)^{-3}}, \quad \frac{(a^m)^{-3}(b^3)^{-3}(c^{-2})^{-3}}{(d^{-5})^{-3}(c^6)^{-3}},$$

und dann nach Nr. 3. $\dfrac{a^{-3m}b^{-9}c^6}{d^{15}c^{-18}}$.

§. 124. Bei der *Ausführung der Wurzelausziehung* will man vorzugsweise die Umformung, welche die Gleichung (35) angibt, wenigstens so weit $b : c$ einer ganzen Zahl gleich wird, oder sich sonst in Buchstaben leicht umformen lässt.

§. 125. *Anmerkung.* Am entschiedensten hat sich der Name Ausführung oder Vollziehung der Operation festgestellt

1) für die Fälle §. 120, 1; §. 121, 1 u. 2; §. 122, 1 u. 2; §. 123, 1, so dass eine algebr. Summe mit einfachen (d. h. nicht durch algebr. Addition mehr zusammengesetzten) Gliedern die vorzugsweise erstrebte Form ist, dass ebenso wie die Glieder in algebr. Summen, so die Faktoren in den Produkten nicht mehr durch algebr. Addition zusammengesetzt erscheinen, und dass in den nicht zu vermeidenden Quotienten die Divisoren und Dividenden nicht selber wieder Quotienten enthalten.

2) Wendet man den Ausdruck „Ausführung" allgemein da an, wo die Umformungen der §§. 120—124 auf Ausdrücke führen, in denen an einzelnen aus Ziffern-Elementen zusammenge-

setzten Verbindungen die Operationen nach den Regeln der Ziffernrechnung vollzogen werden können. So wird namentlich die Ausführung des §. 120, 2 hierher zu rechnen sein, wenn die ungleichen Faktoren Ziffern sind, wie in dem ersten der dort angeführten Beispiele; so ferner die Umformung von $a^6 . a^7$ in a^{13}, von $(a^3)^4$ in a^{12}, von $3^m . 5^m$ in 15^m, etc.

D. Von der Reduktion irrationaler Ausdrücke.

§. 126. *Von den Reduktionen im Allgemeinen.* In der Praxis will man durchaus nicht, dass in den Buchstaben-Ausdrücken, mit denen man umgeht, die Operationen stets nach den vorhergehenden Regeln ausgeführt werden, sondern man verlangt nur ihre Verwandlung in die für den jedesmaligen Gebrauch gerade bequemste Form. Welches die bequemste Form ist, muss in jedem besonderen Falle beurtheilt werden. In vielen Fällen, aber keineswegs immer, ist die einfachste Form die bequemste. Die Umformung in einfachere Ausdrücke führt den Namen „Reduktion". — Für die Reduktion irrationaler Ausdrücke — unter irrationalen Buchstaben-Ausdrücken solche verstanden, welche Wurzeln oder Bruchpotenzen enthalten — merke man Folgendes.

§. 127. *Vereinfachung der Radikanden in irrationalen Ausdrücken.* Wenn sich in irrationalen Ausdrücken die Radikanden in solche Produkte umformen lassen, dass die Wurzel aus dem einen Faktor rational wird, d. h. nach §. 56 Gl. (c) durch einen ohne Wurzelzeichen geschriebenen Ausdruck ersetzt werden kann, so erhält man einfachere Radikanden, wenn man nach der gedachten Zerfällung in ein Produkt die Gl. (36) anwendet.

Beispiele: 1) $\sqrt[3]{(a^{4m+5}b^8)} = \sqrt[3]{((a^{3m+3}b^6)(a^{m+2}b^2))} =$
$$\sqrt[3]{(a^{3m+3}b^6)}\sqrt[3]{(a^{m+2}b^2)} = \sqrt[3]{(a^{3(m+1)})}\sqrt[3]{(b^6)}\sqrt[3]{(a^{m+2}b^2)}$$
$$= \sqrt[3]{([a^{m+1}]^3)}\sqrt[3]{([b^2]^3)}\sqrt[3]{(a^{m+2}b^2)} = a^{m+1}b^2\sqrt[3]{(a^{m+2}b^2)},$$
wo die letzte Umformung indess, weil sie nach einer unvollkommenen Gleichung geschehen, im Allgemeinen nur unter der Voraussetzung eindeutiger Wurzeln vorgenommen werden darf.

2) $$\sqrt{\frac{8a^5b^7}{cg}} = \sqrt{\left(\frac{4a^4b^6}{c^2g^2} \cdot 2abcg\right)} = \frac{2a^2b^3}{cg}\sqrt{(2abcg)}.$$

3) $3\sqrt{12} - 5\sqrt{27} - 8\sqrt{243} = 3\sqrt{(4.3)} - 5\sqrt{(9.3)} - 8\sqrt{(81.3)}$

$=3\sqrt{4}\sqrt{3}-5\sqrt{9}\sqrt{3}-8\sqrt{81}\sqrt{3}=6\sqrt{3}-15\sqrt{3}-72\sqrt{3}$, wofür man, wenn die Wurzeln nur ihre absoluten Werthe vorstellen, noch $(6-15-72)\sqrt{3}$ oder $-81\sqrt{3}$ schreiben kann.

4) $\sqrt{(3b^2c^5-5b^3c^3+6ab^5c^2)}=\sqrt{[b^2c^2(3c^3-5bc+6ab^3)]}$
$=bc\sqrt{(3c^2-5bc+6ab^3)}$.

Fernere Beispiele s. a. a. O. pag. 42 (1—36).

§. 128. *Fortschaffung irrationaler Divisoren.* Ist in einem Quotienten der Divisor irrational aber eingliedrig, etwa $b\sqrt[m]{a}$, so erhält man dafür einen Ausdruck mit rationalem Divisor, wenn man Divisor und Dividenden mit $(\sqrt[m]{a})^{m-1}$ multiplicirt. Z. B.

$$\frac{\sqrt{54}-3\sqrt{20}+10}{2\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{54}-3\sqrt{20}+10)\sqrt{5}}{2.5}=$$
$$\frac{(3\sqrt{6}-6\sqrt{5}+10)\sqrt{5}}{10}=\frac{3}{10}\sqrt{30}-\frac{3}{5}\sqrt{25}+\sqrt{5}.$$

Fernere Beispiele hierzu siehe a. a. O. pag. 49 (16—21).

2. Ist der irrationale Divisor zweigliedrig und sind die irrationalen Wurzeln Quadratwurzeln, hat also der Divisor die Form $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, oder die Form $a\pm\sqrt{b}$, so multiplicirt man Dividenden und Divisor resp. mit $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ oder $a\mp\sqrt{b}$, weil der Divisor dadurch resp. in $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})=a-b$, oder in $(a\pm\sqrt{b})(a\mp\sqrt{b})=a^2-b$ übergeht, mithin rational wird. Z. B.

1) $\dfrac{5\sqrt{2}+3}{4-6\sqrt{3}}=\dfrac{(5\sqrt{2}+3)(4+6\sqrt{3})}{4^2-(6\sqrt{3})^2}=-\dfrac{6+10\sqrt{2}+9\sqrt{3}+15\sqrt{6}}{46}$

2) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3}=3\sqrt{3}-3\sqrt{2}.$

3. Bei mehrgliedrigem Divisor, falls die irrationalen Wurzeln Quadratwurzeln sind, wiederholt man das letzte Verfahren.

Z. B. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}([\sqrt{2}-3\sqrt{3}]-\sqrt{5})}{([\sqrt{2}-3\sqrt{3}]+\sqrt{5})([\sqrt{2}-3\sqrt{3}]-\sqrt{5})}$

$$=\frac{\sqrt{4}-3\sqrt{6}-\sqrt{10}}{(\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{4}-3\sqrt{6}-\sqrt{10}}{24-6\sqrt{6}}=$$
$$\frac{1}{6}\frac{(\sqrt{4}-3\sqrt{6}-\sqrt{10})(4+\sqrt{6})}{(4-\sqrt{6})(4+\sqrt{6})}=-\frac{(\sqrt{4}-3\sqrt{6}-\sqrt{10})(4+\sqrt{6})}{60}.$$

Andere Beispiele findet man a. a. O. pag. 49 (22—45).

II.

Von der Auflösung der einfachsten Bestimmungsgleichungen
oder
die Elemente der Algebra.

§. 129. *Unterschied zwischen identischen und Bestimmungs-Gleichungen.* Will man, dass irgend ein Buchstabe keine andere Werthe erhalten soll, als diejenigen, welche einen gegebenen Ausdruck A, in welchem dieser Buchstabe irgend wie als Bestandtheil enthalten ist, einem anderen Ausdrucke B gleich machen, so drückt man dies durch das Hinschreiben der Formel $A = B$ aus.

Diese Formel, welche im allgemeinen keine wahre Gleichung ist, weil nicht für alle, sondern nur für gewisse Werthe der darin vorkommenden Buchstaben in der That A gleich B ist — nennt man Bestimmungsgleichung. Die Bestimmung der Werthe jenes Buchstaben, für welche $A = B$ zu einer richtigen Gleichung wird, heisst das Auflösen der Gleichung. — Den Buchstaben, dessen Werthe durch die Auflösung bestimmt werden, nennt man den Unbekannten der Gleichung und bezeichnet ihn meist durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets.

Im Gegensatze zu den Bestimmungsgleichungen nennt man diejenigenGleichungen, welche wie die Gleichungen im ersten Abschnitte, im allgemeinen für jeden Werth der in ihnen vorkommenden Buchstaben richtig sind — identische Gleichungen. *)

Will man ferner ausdrücken, dass mehrere Buchstaben, etwa x, y, z, u, etc. keine anderen als diejenigen Werthe bezeichnen sollen, welche bewirken, dass A gleich B, C gleich D, E gleich F,

*) So ist Z. B. $(a+b)c = ac + bc$ eine identische Gleichung, weil sie bestehen bleibt, welche Werthe man dem a, b und c auch beilegen mag. Dagegen ist $3x - a = 7$ eine Bestimmungsgleichung; denn es wird dieselbe nur richtig, wenn x den Werth $\frac{1}{3}(a+7)$ oder a den Werth $3x - 7$ erhält, und sie spricht daher aus, dass man sich entweder unter x den Ausdruck $\frac{1}{3}(a+7)$ oder unter a den Ausdruck $3x-7$ denken solle.

etc. werde (unter A, B, C, D, E, F, etc. gewisse Ausdrücke verstanden, welche jene Buchstaben x, y, z, u, ... als Bestandtheile in sich schliessen), so nennt man $A=B$, $C=D$, $E=F$, etc. ein System von Bestimmungsgleichungen, und x, y, z, u, ... die zugehörigen Unbekannten.

Die Lehre von der Auflösung der Bestimmungsgleichungen, (d. h. von der Bestimmung der Werthe ihrer Unbekannten) heisst die Algebra.

§. 130. *Die algebraischen Bestimmungsgleichungen.* Eine Bestimmungsgleichung heisst algebraisch in Bezug auf einen Unbekannten x, wenn sie fähig ist, in eine der folgenden Formen überzugehen,

$$x=a,\ x^2+ax=b,\ x^3+ax^2+bx=c,\ x^4+ax^3+bx^2+xc=d, \text{ etc.}$$

$$x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\ldots mx^2+px=q,$$

und zwar heisst sie resp. vom 1sten, 2ten, 3ten, etc. *n*ten Grade, wenn die höchste Potenz von x die 1ste, 2te, 3te, etc. *n*te ist.

Die Gleichungen des 2ten Grades nennt man auch quadratische, die des dritten Grades kubische, die des vierten Grades biquadratische Gleichungen. Auch gibt man den Gleichungen des ersten Grades zuweilen den Namen lineare Gleichungen, und nennt die von höherem Grade, höhere algebraische Gleichungen.

Die Werthe des Unbekannten, welche einer höheren algebraischen Gleichung genügen, heissen die Wurzelwerthe derselben.

Hat eine algebraische Gleichung eine der oben angegebenen Formen erhalten, so sagt man, sie sei (in Bezug auf x) geordnet.

§. 131. *Vom Ordnen der algebraischen Gleichungen.* Die Umwandlung einer nicht geordneten algebraischen Gleichung in eine geordnete geschieht theils durch Umformungen, theils durch Umänderungen derselben.

Wir verstehen hierbei unter Umformung einer Gleichung das nach den Regeln der Arithmetik ausgeführte Umformen ihrer beiden durch das (=) Zeichen verbundenen Ausdrücke; *) unter Umänderung dagegen das Vornehmen einer und derselben Aenderung mit beiden Seiten der Gleichung. Letzteres geschieht dadurch, dass man beide Ausdrücke mit einem und demselben neuen Ausdrucke durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, etc. verbindet. **)

*) So ist z. B. $5amx^2-10ax^3=10x$ eine Umformung von $5ax^2(m-2x)=10x$.

**) Demnach ist z. B. $ax(m-2x)=2$ eine durch Division mittels $5x$ hervorgebrachte Umänderung der Gleichung $5ax^2(m-2x)=10x$.

Während beim Umformen die beiden Seiten der Gleichung ihren Werth nicht ändern, wird beim Umändern ihr Werth ein anderer, und die neue Gleichung ist daher eigentlich eine von der gegebenen verschiedene. Es ist indess die umgeänderte Gleichung noch für eben die Werthe der Buchstaben richtig, für welche die gegebene Gleichung richtig ist, und man kommt daher auf dasselbe Resultat, mag man die Werthe des Unbekannten aus der gegebenen oder aus der umgeänderten Gleichung herleiten.

Man bemerke hier, dass man der Kürze wegen sagt, man multiplicire, dividire, potenzire, etc. eine Gleichung mit einem Ausdrucke *a*, statt zu sagen, dass man jeden der beiden durch das (=) Zeichen verbundenen Ausdrücke der Gleichung mit *a* resp. multiplicire, dividire, potenzire, etc.

Bei der Angabe, welche Umformungen und Umänderungen beim Ordnen vorzunhemen sind, setzen wir zunächst

A) voraus, dass der Unbekannte, den wir hier wieder x nennen wollen, in der gegebenen Gleichung nur als Bestandtheil in Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten vorkomme. Dabei ist mithin, da positive und negative ganze Potenzen sich als Produkte und Quotienten darstellen lassen, der Fall nicht ausgeschlossen, dass das x im Dignanden positiver oder negativer ganzer Potenzen enthalten ist.

Man verfährt in diesem Falle nach der Reihe wie folgt.

1) Kommt das x in Quotienten vor, so beginnt man damit, die Gleichung mit den Divisoren dieser Quotienten zu multipliciren, um eine umgeänderte Gleichung zu erhalten, welche das x in keinem Quotienten mehr enthält.

Nehmen wir als Beispiel die Gleichung

$$(\alpha) \qquad \frac{5}{x-2}-\frac{5x-3}{x^3}=8+x-\frac{2}{x^2},$$

so finden wir zuerst, mit dem Divisor $x-2$ multiplicirend,

$$5-\frac{(5x-3)(x-2)}{x^3}=(8+x)(x-2)-\frac{2(x-2)}{x^2},$$

und darauf mit dem Divisor x^3 multiplicirend,

$$(\beta) \quad 5x^3-(5x-3)(x-2)=x^3(8+x)(x-2)-2x(x-2).$$

2) Kommt das x in keinem Quotienten vor, oder sind solche Quotienten durch das Verfahren in (1) fortgeschafft, so führt man, falls x in mehrgliedrigen Faktoren enthalten ist, die Multiplikationen aus.

Dies gibt, auf die Gl. (β) angewendet, die umgeformte Gl.

$$(\gamma) \quad 5x^3 - (5x^2 - 13x + 6) = x^5 + 6x^4 - 16x^3 - (2x^2 - 4x).$$

3) Sind keine Quotienten oder mehrgliedrige Faktoren vorhanden, oder hat man solche nach (1 und 2) beseitigt, so führt man, falls das x in addirten oder subtrahirten algebraischen Summen vorkommt, die angedeuteten Additionen und Subtraktionen nach §. 120, 1 aus.

Bei der Gleichung (γ) ergibt sich dabei z. B.

$$(\delta) \quad 5x^3 - 5x^2 + 13x - 6 = x^5 + 6x^4 - 16x^3 - 2x^2 + 4x.$$

Nach dieser neuen Umformung haben die Glieder sämmtlich die Form der Glieder in den geordneten Gleichungen, nur sind dieselben im Allgemeinen anders vertheilt. Um die Uebereinstimmung dann völlig herzustellen, werden zuerst

4) die das x nicht enthaltenden Glieder der einen Seite der Gleichung auf jeder Seite subtrahirt oder addirt, je nachdem sie additiv oder subtraktiv sind — und dann diejenigen Glieder der andern Seite, welche das x in sich enthalten, gleichfalls jederseits resp. subtrahirt oder addirt, je nachdem dieselben additiv oder subtraktiv sind. Man hat dann auf der einen Seite nur Glieder, die mit Potenzen von x multiplicirt sind, auf der anderen Seite nur Glieder, die frei von x sind.

Die Gleichung (δ) giebt z. B. auf diese Weise nach einander

$$5x^3 - 5x^2 + 13x = x^5 + 6x^4 - 16x^3 - 2x^2 + 4x + 6,$$

$$(\varepsilon) \quad 5x^3 - 5x^2 + 13x - x^5 - 6x^4 + 16x^3 + 2x^2 - 4x = 6.$$

Hierauf vereinigt man

5) nach §. 36 die Glieder, welche mit gleichen Potenzen von x multiplicirt sind und ordnet dieselben nach den Exponenten.

Für die Gleichung (ε) z. B. erhält man dabei die Umformung

$$-x^5 - 6x^4 + (5 + 16)x^3 - (5 - 2)x^2 + (13 - 4)x = 6, \text{ oder}$$

$$-x^5 - 6x^4 + 21x^3 - 3x^2 + 9x = 6.$$

Man erhält alsdann die geordnete Form, wenn man endlich

6) die Gleichung durch den Coefficienten der höchsten Potenz von x dividirt.

Im hiesigen Beispiele, wo dieser Coefficient gleich -1 ist, kommt man also auf $x^5 + 6x^4 - 21x^3 + 3x^2 - 9x = -6$.

B) Befindet sich das x noch in einem Radikanden, so hat man vor dem unter (*A*) gegebenen Verfahren die Gleichung so umzuändern, dass die Wurzel isolirt auf der einen Seite des (=)

Zeichens zu stehen kommt, und dann die Gleichung mit den Wurzelexponenten zu potenziren. Das erste geschieht, indem man die Wurzel einstweilen etwa durch den Buchstaben z vorgestellt denkend, die Gleichung in Bezug auf z so behandelt, wie in (A) die gegebene Gleichung in Bezug auf x zu behandeln gelehrt worden ist.

Ist z. B. $\frac{5-\sqrt{(x+2)}}{3x} - x = \frac{a}{x}$ gegeben, so bekommt man nach (A, 1), $5-\sqrt{(x+2)}-3x^2=3a$, dann nach (A, 4) $-\sqrt{(x+2)}=3a+3x^2-5$, und endlich mit dem Wurzelexponenten 2 potenzirend $(-\sqrt{(x+2)})^2=(3a+3x^2-5^2)$, d. h. $x+2 =(3a+3x^2-5)^2$, mithin eine Gleichung, welche nach den bei (A) angegebenen Regeln sich nunmehr in Bezug auf x ordnen lässt.

C) Wenn das x in den Radikanden mehrerer verschiedener Wurzeln vorkommt, so wird die Umgestaltung in eine geordnete algebr. Gleichung meist nur möglich, wenn die Wurzeln Quadratwurzeln und deren nicht mehr als drei sind, oder (wie sich von selbst versteht) wenn die Wurzeln sich in eine einzige vereinigen lassen.

Wie man dabei verfährt, gibt folgendes Beispiel zu erkennen.

Ist die zu ordnende Gleichung $\sqrt{(x-2)}-5x^2=6\sqrt{(x+3)}+7$, so bringt man zunächst die Wurzeln auf eine Seite zusammen, was auf $\sqrt{(x-2)}-6\sqrt{(x+3)}=5x^2+7$ führt, potenzirt alsdann die Gleichung mit 2, wodurch man mit Benutzung der Formel $(a+b)^2 =a^2+2ab+b^2$ erhält: $(\sqrt{(x-2)})^2-12\sqrt{(x-2)}\sqrt{(x+3)} + (6\sqrt{(x+3)})^2=25x^4+70x^2+49$, und wofür sich schreiben lässt: $x-2-12\sqrt{[(x-2)(x+3)]}+36(x+3)=25x^4+70x^2+49$, während diese Gleichung sich weiter nach (B) behandeln lässt.

Ein Beispiel, in welchem sich die Wurzeln auf eine einzige zurückführen lassen, gibt die Gleichung

$6x\sqrt[5]{}+3=(2x^3-7)x\sqrt[4]{(x^2+1)}$, insofern sich dieselbe in

$\frac{6\sqrt[5]{(x+3)}}{\sqrt[4]{(x^2+1)}}=(2x^3-7)x$ umändern, und dann in

$6\sqrt[20]{\frac{(x+3)^4}{(x^2+1)^5}}=(2x^3-7)x$ umformen lässt.

In den nicht unter den Fällen (A, B, C) begriffenen Fällen gehört die Bestimmungsgleichung nicht mehr zu den algebraischen.

Auflösung der algebraischen Gleichungen des ersten Grades.

§. 132. *Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einem Unbekannten.* Da die durch das Ordnen einer Gleichung des ersten Grades gewonnene Gl. $x = a$ eine nothwendige Folge der gegebenen Gleichung ist, so kann die gegebene nicht richtig werden, wofern nicht auch $x = a$ eine richtige Gleichung ist. Mit dem Ordnen der Gleichung ist also nicht bloss a als Werth des Unbekannten gefunden, sondern auch die Gewissheit erlangt, dass ausser dem a kein Werth von x existirt, welcher die gegebene Gleichung befriedigt. *)

§. 133. *Auflösung der Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.* Zwei Gleichungen $ax + by = c$ und $a_1x + b_1y = c_1$, welche sowohl in Bezug auf x als in Bezug auf y vom ersten Grade sind, können, wie das nachstehende Auflösungsverfahren zeigen wird, im Allgemeinen durch nicht mehr als einen Werth von x und einen Werth von y identisch gemacht werden.

Man findet diese Werthe, wenn man aus den gegebenen

*) Vor der Ausbildung der Algebra, wo man sich auf die Behandlung sehr specieller und einfacher Gleichungen beschränken musste, wurden namentlich die sich besonders häufig darbietenden Gleichungen zwischen zwei Quotienten unter dem Namen Proportionen sehr ins Einzelne verfolgt, und jede einfache Umänderung derselben in die Form eines eigenen Lehrsatzes gefasst. Man nannte dabei die Quotienten „Verhältnisse" und sprach die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ aus: „es verhält sich a zu b wie c zu x", schrieb dieselbe gewöhnlich mit dem anderen Divisionszeichen $a : b = c : x$, a und x die äussern, b und c die mittleren Glieder der Proportion nennend. Die daraus hergeleitete Gleichung $ax = bc$ z. B gab den Lehrsatz: „Das Produkt der mittleren Glieder ist gleich dem Produkte der äusseren;" die abgeleitete Gleichung $\frac{bc}{a} = x$ den Lehrsatz: „jedes äussere Glied ist gleich dem Produkte der mittleren Glieder, dividirt durch das andere äussere"; die durch Addition und resp. Subtraktion der Einheit entstehende Gleichung

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{x} \pm 1, \text{ d. h. } (a \pm b) : b = (c \pm x) : x$$

den Lehrsatz: „Die Summe und resp. Differenz des ersten und zweiten Gliedes verhält sich zum zweiten Gliede, wie die Summe und resp. Differenz des dritten und vierten Gliedes zum vierten Gliede"; etc.

Gleichungen zwei andere herleitet, von denen die eine von den Unbekannten x und y nur das x, die andere nur das y enthält, worauf diese dann nach §. 132 aufgelöst die fraglichen Werthe für x und y sofort liefern.

Das Ableiten solcher Gleichungen, in denen einer der Unbekannten nicht mehr vorkommt, heisst das Eliminiren dieses Unbekannten.

Die üblichsten Eliminations-Methoden sind die folgenden.

1) Das Substitutions-Verfahren. Es besteht dasselbe darin, dass man aus der einen der gegebenen Gleichungen nach §. 132 den Werth des einen Unbekannten, etwa des x, so bestimmt, als ob der andere Unbekannte etwas Gegebenes wäre, und den gefundenen Werth für x in der zweiten Gleichung substituirt. Nach dieser Substitution enthält diese zweite Gleichung offenbar nur noch den anderen Unbekannten; sie ist somit das Resultat der Elimination von x, und wird nunmehr nach §. 132 aufgelöst. Da hierdurch der zweite Unbekannte vollständig bekannt geworden ist, so enthält die erste der gegebenen Gleichungen faktisch nur noch den ersten Unbekannten und kann sonach zur Bestimmung desselben nach §. 132 benutzt werden.

Führen wir dies an dem obigen allgemeinen Beispiele aus und lösen die erste Gleichung nach x auf, so erhalten wir

$$(\alpha)\ x = \frac{c - by}{a}.$$

Dieser Ausdruck für x in die zweite Gleichung gesetzt, gibt die Gleichung $a_1 \frac{c-by}{a} + b_1 y = c_1$, welche nur noch das y enthält, also die erste Eliminationsgleichung ist, und nach §. 132 aufgelöst, für y den einzigen Werth $y = \frac{a_1 c - a c_1}{a_1 b - a b_1}$ liefert. Wird dieser Werth statt y in die Gl. (α) gesetzt, so findet sich dazu der Werth des zweiten Unbekannten, nämlich

$$x = \left(c - b\frac{a_1 c - a c_1}{a_1 b - a b_1}\right) : a = \frac{b_1 c - b c_1}{a_1 b - a b_1}.$$

Zusatz. Man sieht aus den für y und x gefundenen Werthen (da sie nur unbrauchbar werden, wenn $a_1 b - a b_1 = 0$ sein sollte), dass die gegebenen Gleichungen (in deren Form sich alle

Gleichungen des ersten Grades mit 2 Unbekannten bringen lassen) jedesmal erfüllt werden können, und zwar nur durch ein einziges Werthepaar der Unbekannten — wofern nur $a_1b - ab_1$ von Null verschieden ist.

Löst man die Gleichung $a_1b - ab_1 = 0$ nach a_1 auf, was $a_1 = \frac{ab_1}{b}$ gibt, setzt diesen Werth für a_1 in die zweite gegebene Gleichung und multiplicirt dieselbe dann mit b, so erhält man $ab_1x + bb_1y = bc_1$, oder durch b_1 dividirend, $ax + by = \frac{bc_1}{b_1}$.
Man sieht hieraus, dass in dem Ausnahmsfall, wo $a_1b - ab_1 = 0$ ist, die letzte Gleichung (und mithin auch die zweite gegebene Gleichung) der ersten gegebenen Gleichung widerspricht, wofern nicht $\frac{bc_1}{b_1} = c$ ist. Ist also $\frac{bc_1}{b_1}$ von c verschieden, so kann man auch von den (sich widersprechenden) gegebenen Gleichungen nicht verlangen, dass sie für irgend Werthe von x und y richtig werden sollen, und es kann von einer Auflösung nicht die Rede sein. Ist aber $\frac{bc_1}{b_1} = c$, so unterscheiden sich die beiden gegebenen Gleichungen nicht mehr von einander; sie werden daher dann beide erfüllt, so oft die Gleichung (α) richtig wird, mithin für jeden Werth von y, wofern nur für x jedesmal der Werth $\frac{c - by}{a}$ gewählt wird. Die gegebene Gleichung gehört alsdann zu den sogenannten unbestimmten Gleichungen, welche durch unzählig viele Werthepaare von x und y befriedigt werden können.

2. Das Combinations-Verfahren. Dasselbe besteht darin, dass man nach §. 132 beide Gleichungen in Bezug auf x auflöst, und beide für x gefundene Ausdrücke zu einer Gleichung verbindet. Diese Gleichung gibt, da sie nur noch das y enthält, (also eine Eliminationsgleichung ist) den Werth für y. Wird dieser Werth statt y in einen der beiden für x gefundenen Ausdrücke gesetzt, so hat man damit auch den Werth des x.

Wenden wir dies auf unser allgemeines Beispiel an, so erhalten wir zunächst, die gegebenen Gleichungen nach x auflösend, $x = \frac{c - by}{a}$, $x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$, und somit durch Gleichstellung der

beiden Ausdrücke $\frac{c-by}{a}=\frac{c_1-b_1y}{a_1}$, welche nach §. 132 aufgelöst, wiederum auf $y=\frac{a_1c-ac_1}{a_1b-ab_1}$, führt. Die Bestimmung des x bleibt dieselbe wie vorher.

3. Das Subtraktions-Verfahren. Dies Verfahren besteht darin, dass man zuerst die gegebenen Gleichungen sowohl in Bezug auf x als in Bezug auf y ordnet, d. h. ihnen die Form gibt, welche die oben zum Grunde gelegten Gleichungen haben; hierauf, falls man das x eliminiren will, die erste Gleichung mit dem Coefficienten multiplicirt, den das x in der 2ten Gleichung hat, so wie die zweite Gleichung mit dem Coefficienten, den das x der ersten Gleichung hat. Alsdann sind in den beiden so entstehenden Gleichungen die mit x multiplicirten Glieder dieselben; es fallen also selbige von selber fort, wenn man nun die Gleichungen von einander subtrahirt, und man erhält damit eine von x freie Gleichung (die erste Eliminationsgleichung), welche zur Bestimmung des y dient.

Ebenso macht man es sodann in Bezug auf y. Man multiplicirt die erste der gegebenen Gleichungen mit dem Coefficienten, den das y in der zweiten hat, und die zweite mit dem Coefficienten, den das y in der ersten Gleichung hat. Die Subtraktion beider Gleichungen liefert die (von y freie) zweite Eliminationsgleichung, welche den Werth von x bestimmt.

Auf unser Beispiel angewendet haben wir zuvörderst, die erste Gleichung mit a_1, die zweite mit a multiplicirend

$$aa_1x+a_1by=a_1c$$
$$aa_1x+ab_1y=ac_1,$$

und dann die zweite von der ersten subtrahirend, $a_1by-ab_1y=a_1c-ac_1$ zu bilden, wo die letzte Gleichung sofort den Werth von y, genau wie oben gefunden, liefert.

Hierauf multiplicirt man die erste Gleichung mit b_1, die zweite mit b, was auf

$$b_1ax+b_1by=b_1c$$
$$ba_1x+bb_1y=bc_1$$

führt, und zieht hieraus durch Subtraktion die Gleichung

$$b_1ax-ba_1x=b_1c-bc_1,$$

welche denselben Werth für x gibt, den wir schon oben gefunden haben.

§. 134. *Auflösung der Gleichungen ersten Grades mit mehr als zwei Unbekannten.* Was vorher von zwei Gleichungen mit

zwei Unbekannten gesagt worden, lässt sich auch allgemein von n Gleichungen mit n Unbekannten sagen, nämlich dass im Allgemeinen immer ein (aber nur ein einziges) System von Werthen existirt, welche für die Unbekannten gesetzt, die sämmtlichen Gleichungen befriedigen. Um diese Werthe zu finden, leitet man aus den n gegebenen Gleichungen $n-1$ andere ab, welche einen der n Unbekannten nicht mehr enthalten; aus diesen $n-1$ Gleichungen leitet man auf demselben Wege wiederum $n-2$ Gleichungen ab, welche von den Unbekannten nur noch $n-2$ enthalten, aus diesen wiederum $n-3$ neue Gleichungen, welche nur noch $n-3$ der Unbekannten enthalten, etc. bis man auf eine einzige Gleichung kommt, welche nur noch einen der Unbekannten in sich schliesst und zur Bestimmung desselben nach §. 132 dient. Ist dieser gefunden, so ist man durch blosse Substitutionen aus den nach einander gewonnenen Zwischengleichungen im Stande, die Werthe der übrigen Unbekannten herzustellen. Der Weg, den man bei den angedeuteten Eliminationen einzuschlagen hat, kann wiederum einer der drei im vorigen §. angegebenen sein.

Sind beispielsweise vier Gleichungen zwischen den Unbekannten x, y, z, u gegeben — wir wollen diese Gleichungen durch A, B, C, D bezeichnen — und soll das erste Verfahren angewendet werden, so verfährt man demnach wie folgt.

Man löst eine der gegebenen Gleichungen, z. B. die Gleichung D nach x auf und setzt den hierdurch für x gefundenen Ausdruck statt x in die drei übrigen Gleichungen. — Diese Gleichungen, welche alsdann nur noch die drei Unbekannten y, z, u enthalten, mögen durch A', B', C' vorgestellt sein. — Hierauf löst man eine dieser letzten Gleichungen, etwa C', nach y auf, setzt den für y gefundenen Ausdruck statt y in die beiden anderen Gleichungen A' und B', und bekommt auf diese Weise zwei Gleichungen A'' und B'' zwischen den beiden Unbekannten z und u. Alsdann B'' nach z auflösend, und den gefundenen Ausdruck statt z in A'' setzend, hat man eine Gleichung, welche, da sie nur noch u enthält, den Werth von u bestimmt.

Wird dann der gefundene Werth von u in B'' eingesetzt, so hat man eine nur noch das z enthaltende Gleichung, welche den Werth für z liefert. Die gefundenen Werthe von z und u in A' setzend, hat man eine Gleichung, die nur y enthaltend, den Werth

von y gibt. Endlich erhält man aus der Gleichung A, da nunmehr in derselben alles bis auf x bekannt ist, den Werth von x.

Soll das zweite Verfahren angewendet werden, so löst man alle vier Gleichungen, A, B, C, D, nach x auf, was auf $x=A_1$, $x=B_1$, $x=C_1$, $x=D_1$ führen mag, und bildet die Gleichungen

$$A_1=B_1,\ A_1=C_1,\ A_1=D_1,$$

welche nur noch die Unbekannten y, z, u in sich schliessen. Alsdann löst man diese drei Gleichungen nach y auf, was etwa $y=A_2$, $y=B_2$, $y=C_2$ geben mag, und verbindet diese zu den Gleichungen $A_2=B_2$, $A_2=C_2$, welche nur noch die Unbekannten z und u enthalten. Werden diese endlich nach z aufgelöst, und erhält man dabei etwa $z=A_3$ und $z=B_3$, so hat man in $A_3=B_3$ eine Gleichung, die nur noch den einen Unbekannten u in sich fasst, und den Werth von u bestimmt.

Ist aber u gefunden, so gibt die Gleichung $z=A_3$ das zugehörige z; die Gleichung $y=A_2$ gibt ferner den gesuchten Werth von y, da das darin vorkommende z und u nunmehr bekannt ist, und $x=A_1$ gibt endlich den Werth von x, da hiermit das darin vorkommende y, z, u bestimmt ist.

Soll endlich das dritte Verfahren angewendet werden, so eliminirt man nach §. 133, 3 aus A und B, dann aus A und C, und endlich aus A und D das x, und bekommt auf diese Weise drei Gleichungen zwischen den drei Unbekannten y, z, u. Dasselbe Verfahren auf diese 3 Gleichungen in Bezug auf y angewendet, gibt 2 Gleichungen zwischen z und u, während diese wiederum von neuem, nach §. 133, 3 behandelt, z und u liefern. Die anderen Unbekannten ergeben sich auf demselben Wege direkt, oder durch Substitution der für z und u gefundenen Werthe in die früheren Gleichungen.

Auflösung der algebraischen Gleichungen des zweiten Grades.

§. 135. *Auflösung der reinen quadratischen Gleichung.* Rein nennt man die quadratische Gleichung $x^2+ax=b$, wenn der Coefficient a den Werth Null hat. Dieselbe spricht dann, nunmehr auf $x^2=b$ reducirt, aus, dass x die Eigenschaft haben muss, mit 2 potenzirt, b zu geben. Diese Eigenschaft haben aber nur die Werthe von $((\sqrt{b}))$, mithin sind $x=\sqrt{b}$ und $x=-\sqrt{b}$ die beiden einzigen Wurzelwerthe der Gleichung, und wie man sieht, sind dieselben stets von einander verschieden, wenn nicht zufällig $b=0$ ist.

§. 136. *Auflösung der vollständigen quadratischen Gleichung.* Der einfachste Fall einer vollständigen quadratischen Gleichung, d. h. einer Gleichung, in welcher, wenn sie geordnet ist, der Coefficient von x nicht den Werth Null hat, ist der, wo $b=0$ ist, die Gleichung also in $x^2+ax=0$ übergeht. Es lässt sich dieselbe alsdann in der Form $x(x+a)=0$ schreiben und zerfällt, da ein Produkt nicht Null werden kann, wenn nicht einer der Faktoren Null ist, in die zwei Gleichungen ersten Grades $x=0$ und $x+a=0$, so dass die gesuchten Wurzelwerthe, wiederum zwei an der Zahl, Null und $-a$ sind.

Ist dagegen b von Null verschieden, so bestimmt man zuerst statt der Werthe von x, die Werthe eines von x verschiedenen, aber leichter zu findenden Ausdrucks, welcher durch y bezeichnet sein möge, und wählt, wenn man den Unterschied zwischen x und diesem neuen Ausdrucke h nennt, das h so, dass die Gleichung in Bezug auf y eine reine quadratische, also nach §. 135 auflösbar wird. Da alsdann $x=y+h$ ist, so verwandelt sich die gegebene Gleichung $x^2+ax=b$ in $(y+h)^2+a(y+h)=b$, d. h., wenn man nach y ordnet, in $y^2+(2h+a)y=b-ah-h^2$. Soll diese Gleichung nun rein quadratisch werden, so muss $2h+a=0$ werden, was nach §. 132 nur möglich ist, wenn man $h=-\frac{1}{2}a$ wählt. Wird aber für h dieser Werth $-\frac{1}{2}a$ in die letzte Gleichung gesetzt, so hat man $y^2=b+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4}a^2=b+\frac{1}{4}a^2$, folglich nach §. 135 $y=\pm\sqrt{(b+\frac{1}{4}a^2)}$. Demnach sind wegen $x=y+h=y-\frac{1}{2}a$, die Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung:

$$x=-\tfrac{1}{2}a+\sqrt{(b+\tfrac{1}{4}a^2)} \quad \text{und} \quad x=-\tfrac{1}{2}a-\sqrt{(b+\tfrac{1}{4}a^2)}.$$

Beispiel: Ist die gegebene Gleichung $\frac{3}{x-4}=\frac{1}{4}x$, so erhält man zunächst, wenn man dieselbe ordnet, $x^2-4x=12$ und hat daher hier $a=-4$, $b=12$, mithin $b+\frac{1}{4}a^2=16$ und folglich $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(b+\frac{1}{4}a^2)}=2\pm\sqrt{16}=2\pm4$, so dass $x=2+4=6$ und $x=2-4=-2$ die beiden Wurzelwerthe sind.

§. 137. *Auflösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten.* Wir bemerken zunächst, dass bei der Bestimmung des Grades einer algebraischen Gleichung mit mehreren Unbekannten $x, y, z, \ldots$ ein Glied, welches in Bezug auf $x, y, z, \ldots$ von der mten Dimension ist, wie ein Glied von mten Grade betrachtet werden muss, so dass z. B. $pxy=a$ in Bezug auf x und y vom 2ten

Grade, $px^2y+xz=a$ eine Gleichung vom 3ten Grade zwischen x, y und z ist, etc.

Was nun die Auflösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten betrifft, so unterscheidet sich das Verfahren von dem der §§. 133 und 134 wesentlich gar nicht. Auch hier eliminirt man einen Unbekannten nach dem andern, bis man auf eine Gleichung mit einem einzigen Unbekannten kommt. Nur ist zu beachten, dass bei der Elimination die dritte Verfahrungsweise des §. 133 eine Modifikation erleidet und nur selten anwendbar ist. Bei der Elimination eines Unbekannten x aus 2 Gleichungen sind nämlich dieselben, was nicht allemal möglich ist, mit solchen Ausdrücken zu multipliciren, dass die Coefficienten aller das x enthaltenden Glieder resp. einander gleich werden, weil sonst bei der nachmaligen Subtraktion der Gleichungen das x nicht herausfällt. — Ferner ist zu bemerken, dass die Eliminationsgleichung höher als vom 2ten Grade wird, wofern nicht die gegebenen Gleichungen sämmtlich bis auf eine einzige vom ersten Grade sind. Im Allgemeinen wird dieselbe nämlich vom 4ten, 6ten, ... $2n$ten Grade, je nachdem 2, 3, ... n der Gleichungen vom 2ten Grade sind. Nur in einzelnen Fällen kommt man auf Eliminationsgleichungen niedrigeren Grades zurück, wenn es gelingt, aus den gegebenen Gleichungen, Gleichungen des ersten Grades abzuleiten, welche sich an die Stelle jener setzen lassen. — Das letztere kann meist dadurch geschehen, dass man nicht die Unbekannten selber, sondern Verbindungen derselben eliminirt, oder dass man zunächst nicht die Werthe der Unbekannten selber, sondern die Werthe von Verbindungen derselben aufsucht.

Einige Beispiele mögen dies klar machen.

1. Hat man die drei Gleichungen $x^2 - y^2 + 4z^2 - 3x = 8$, $x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 5$, $y^2 - 2z^2 - x = -4$, so betrachtet man, da y und z nur in der 2ten Potenz vorkommen, y^2 und z^2 als Unbekannte, in Bezug auf welche nun die 2te und 3te Gleichung vom ersten Grade werden. Man eliminirt dann z. B. nach §. 133,3 aus der zweiten und dritten Gleichung das z^2 durch blosse Addition, wodurch man $x^2 - 2y^2 - x = 1$ erhält, findet hieraus, nach y^2 auflösend,

$$(\alpha) \quad y^2 = \frac{x^2 - x - 1}{2},$$

substituirt diesen Werth in die erste und dritte Gleichung, und gewinnt dadurch zwei Gleichungen zwischen zwei Unbekannten, näm-

lich $x^2-5x+8z^2=15$, $x^2-3x-4z^2=-7$. Zur Elimination von z^2 multiplicirt man nach §. 133, 3 die letzte Gleichung mit -2, und subtrahirt sie von der ersten. Dadurch ergibt sich $3x^2-11x=1$, und diese Gleichung nach dem vorigen §. aufgelöst gibt $x=\frac{11}{6}\pm\frac{1}{6}\sqrt{133}$.

Aus (α) und der Gleichung $x^2-3x-4z^2=-7$ ergibt sich dann

$$y=\sqrt{\frac{x^2-x-1}{2}} \quad \text{und} \quad z=\frac{\sqrt{(x^2-3x+7)}}{2},$$

worin nur noch für x der eben gefundene Werth zu setzen übrig bleibt.

2. Sind die gegebenen Gleichungen $x(y+z)=a$, $y(x+z)=b$, $z(x+y)=c$, so schreibe man dieselben zunächst so

$$(\alpha)\quad xy+xz=a \qquad (\beta)\quad xy+yz=b \qquad (\gamma)\quad xz+yz=c,$$

addire sie zu einander, was auf

$$(\delta)\qquad xy+xz+yz=\tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

führt, und eliminire aus den Gleichungen (α), (β), (γ) und (δ) die drei Summen $xy+xz$, $xy+yz$, $xz+yz$. Subtrahirt man zu dem Ende die Gleichungen (α), (β), (γ) von (δ), so findet man

$$yz=\tfrac{1}{2}(b+c-a),\quad xz=\tfrac{1}{2}(a+c-b),\quad xy=\tfrac{1}{2}(a+b-c),$$

und kann dann, diese Gleichungen paarweise durcheinander dividirend, folgende Gleichung ersten Grades gewinnen

$$\frac{y}{x}=\frac{b+c-a}{a+c-a},\quad \frac{z}{x}=\frac{b+c-a}{a+b-c},$$

welche nun statt zweier der drei gegebenen Gleichungen benutzt werden können, und somit die Erzielung einer quadratischen Eliminationsgleichung möglich machen.

3. Sind die gegebenen Gleichungen $x+y=xy$, $x+y+x^2+y^2=a$, so sieht man sogleich, dass die letzte Gleichung, wenn sie noch das Glied $2xy$ enthielte, also $(x+y)+(x+y)^2=k$ geschrieben werden könnte, sich als Gleichung mit einem einzigen Unbekannten betrachten liesse, wenn man weder x noch y, sondern $x+y$ als Unbekannten ansieht — und dann nach $x+y$ aufgelöst eine Gleichung des ersten Grades zwischen x und y geben würde. Das fehlende Glied $2xy$ lässt sich aber aus der ersten Gleichung herbeischaffen, da dieselbe $2xy=2(x+y)$ liefert. Addirt man also diese Gleichung zu der zweiten gegebenen, so erhält man $(x+y)^2+x+y=a+2(x+y)$, d. h. $(x+y)^2-(x+y)=a$, welche Gleichung nach §. 136 aufgelöst $x+y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{(a+\frac{1}{4})}$ liefert, und in Verbindung mit der gegebenen $x+y=xy$ auf eine Eliminationsgleichung des 2ten Grades führt.

Auflösung der algebraischen Gleichungen des dritten Grades.

§. 138. *Auflösung der zweigliedrigen kubischen Gleichungen.* Wenn von den drei Coefficienten a, b, c, der allgemeinen kubischen Gleichung $x^3+a^2x+bx=c$ zwei der Null gleich sind, so ergeben sich die Werthe derselben augenblicklich. Ist nämlich

1) $a=0$ und $b=0$, in welchem Falle die Gleichung eine reine kubische heisst, so reducirt sich dieselbe auf $x^3=c$, und für diese sind die Wurzelwerthe keine anderen, als die Werthe von $((\sqrt[3]{c}))$, weil diese allein die Eigenschaft haben, mit 3 potenzirt c zu geben.

Ist 2) b und c gleich Null, reducirt sich die Gleichung also auf $x^3+ax^2=0$, so lässt sich dieselbe auch so schreiben: $x^2(x+a)=0$, und zerfällt, da ein Produkt nicht Null werden kann, wenn nicht einer der Faktoren Null wird, in die Gleichungen $x^2=0$ und $x+a=0$, von denen die erste $x=\pm\sqrt{0}=0$, die zweite $x=-a$ liefert; mithin fallen zwei Wurzelwerthe der Gleichung in den einen Werth Null zusammen und der dritte ist $-a$. Ist endlich

3) $b=0$ und $c=0$, so reducirt sich die Gleichung auf $x^3+bx=0$ oder $x(x^2+b)=0$ und zerfällt in $x=0$ und $x^2+b=0$, so dass ihre Wurzelwerthe 0, $+\sqrt{-b}$, und $-\sqrt{-b}$ werden.

§. 139. *Auflösung der reducirten kubischen Gleichung.* Reducirt heisst die kubische Gleichung, wenn in derselben der Coefficient von x^2 den Werth Null hat, so dass sie sich allgemein durch

$$x^3+bx=c$$

vorstellen lässt. Statt bei deren Auflösung direkt auf die Bestimmung der Werthe von x einzugehen, suchen wir wiederum zunächst die Werthe eines leichter zu findenden Ausdrucks zu ermitteln, der von x um Etwas, etwa um z, abweiche, und durch y vorgestellt sein mag, indem wir das z möglichst so wählen, dass das y nach dem Früheren, also etwa aus einer reinen kubischen Gleichung oder einer quadratischen Gleichung, gewonnen werden kann. Dies ausführend erhalten wir demnächst, in der gegebenen Gleichung $y+z$ statt x setzend,

$$(y+z)^3+b(y+z)=c,$$

d. h.
$$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+b(y+z)=c,$$

oder
$$y^3+(3yz+b)(y+z)+z^3=c,$$

und wählen, um diese Gleichung möglichst zu vereinfachen, dann z so, dass das zweite Glied verschwindet — also $3yz+b=0$

wird, d. h. wir nehmen $z = -\frac{b}{3y}$, oder B statt $\frac{1}{3}b$ schreibend,

$$(\alpha) \qquad z = -\frac{B}{y}.$$

Die obige Gleichung verwandelt sich alsdann in $y^3 + z^3 = c$, oder, den eben gewählten Werth von z einführend, in $y^3 - \frac{B^3}{y^3} = c$ welche Gleichung in Bezug auf y^3 quadratisch ist, also nach §. 136 zwei Werthe für y^3 liefert. Multiplicirt man nämlich die Gleichung mit y^3 und ordnet dieselbe, so ergibt sich, $\frac{1}{2}c$ durch C vorstellend,

$$(\beta) \qquad (y^3)^2 - 2C(y^3) = B^3$$

und hieraus zufolge des §. 136

$$y^3 = C \pm \sqrt{(B^3 + C^2)}.$$

Aus $y^3 + z^3 = 2C$ folgt andrerseits $z^3 = 2C - y^3$, d. h.

$$z^3 = 2C - [C \pm \sqrt{(B^3 + C^2)}] = C \mp \sqrt{(B^3 + C^2)},$$

und somit

$$x = y + z = \sqrt[3]{[C \pm \sqrt{(B^3 + C^2)}]} + \sqrt[3]{[C \mp \sqrt{(B^3 + C^2)}]},$$

wo man von doppelten Vorzeichen nur die oberen beizubehalten braucht, weil die unteren auf denselben Ausdruck führen.

Als Kubikwurzelwerthe haben zwar sowohl y als z drei Werthe, so dass man, indem man jeden Werth von y mit jedem Werthe von z verbindet, für $y + z$ neun Werthe erhält. Von diesen Werthen sind aber nur drei zugleich Werthe von x, da mit jedem der drei Werthe von y nur derjenige Werth von z verbunden werden darf, welcher der Gleichung (α) genügt. Sind y', y'', y''' die drei Werthe von y; z', z'', z''' die drei Werthe von z: so ist nach §. 64 $y'' = y'(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})$, $y''' = y'(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})$ und $z'' = z'(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})$, $z''' = z'(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})$; sind ferner y' und z' zwei zusammengehörige Werthe, d. h. ist zufolge der Gl. (α) $y'z' = -B$, so sind (weil dann auch $y''z''' = y'z' = -B$ und $y'''z'' = y'z' = -B$ ist) die drei Werthe von x resp. $y' + z'$, $y'' + z'''$, $y''' + z''$.

Obiges Auflösungsverfahren heisst die *Cardan*'sche Regel.

§. 140. *Auflösung der vollständigen kubischen Gleichung.* Ist a von Null verschieden, so verfährt man bei der Auflösung der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx = c$ wie bei der Auflösung der vollständigen quadratischen Gleichung in §. 136, d. h. man führt statt des x einen um h von x verschiedenen Ausdruck y ein, und bestimmt

das h so, dass dieses y als Wurzelwerth einer reducirten Gleichung erscheint. Es geht nämlich die hiesige Gleichung, indem man $y+h$ für x setzt, über in $(y+h)^3+a(y+h)^2+b(y+h)=c$, oder, wenn man diese Gleichung nach y ordnet, in

$$y^3+(3h+a)y^2+(3h^2+2ah+b)y=c-h^3-ah^2-bh,$$

und wird zu einer reducirten kubischen Gleichung, wenn man das h so wählt, dass $3h+a=0$ wird, d. h. wenn man $h=-\frac{1}{3}a$ nimmt.

Diese Gleichung, hierdurch auf $y^3+(b-\frac{1}{3}a^2)y=c+\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3$ reducirt, und nach §. 139 aufgelöst, liefert drei Werthe für y, während dann die drei zugehörigen Werthe von x, die drei Werthe von $y+h$, d. h. von $y-\frac{1}{3}a$ werden.

Auflösung der algebraischen Gleichungen des vierten Grades.

§. 141. *Auflösung der reinen biquadratischen Gleichung.* Die Gleichung $x^4=d$, welche man die reine biquadratische Gleichung nennt, hat zu Wurzelwerthen die vier Werthe von $((\sqrt[4]{d}))$, da diese allein die Eigenschaft haben, mit 4 potenzirt d zu geben.

§. 142. *Auflösung der reducirten Gleichung des vierten Grades.* Die Gleichungen des vierten Grades nennt man reducirt, sobald sie in ihrer geordneten Form kein mit x^3 multiplicirtes Glied enthalten. Ihre allgemeine Form ist daher $x^4+x\,b^2+cx=d$, oder wenn man auf jeder Seite d subtrahirt, $x^4+bx^3+cx-d=0$.

Es ist klar, dass diese Gleichung sich wird auflösen lassen, sobald 4 Ausdrücke α, β, α', β' so bestimmt werden können, dass das Produkt $(x^2+\alpha x+\beta)(x^2+\alpha' x+\beta')$ der algebraischen Summe x^4+bx^2+cx-d gleich wird. Die gegebene Gleichung lässt sich nämlich alsdann so schreiben

$$(x^2+\alpha x+\beta)(x^2+\alpha' x+\beta')=0\ ;$$

und zerfällt, da ein Produkt nicht Null werden kann, ohne dass einer der Faktoren Null wird, in die beiden nach §. 136 auflösbaren Gleichungen

$$x^2+\alpha x+\beta=0,\quad x^2+\alpha' x+\beta'=0,$$

aus denen sich dann 4 Werthe für x als Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung ergeben.

Um zu erfahren, ob für α, β, α', β' sich stets Werthe von der verlangten Eigenschaft finden lassen, führen wir die Multipli-

kation in dem Produkte $(\alpha+x\alpha+\beta)(x^2+\alpha'x+\beta')$ aus, was auf
$$x^4+(\alpha+\alpha')x^3+(\alpha\alpha'+\beta+\beta')x^2+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)x+\beta\beta'$$
führt, und sehen demnach, dass jenes Produkt in der That der Summe x^4+bx^2+cx-d gleich gemacht werden kann, wenn sich α, β, α', β' so bestimmen lassen, dass folgenden Gleichungen genügt wird
(1) $\alpha+\alpha'=0$, (2) $\alpha\alpha'+\beta+\beta'=b$, (3) $\alpha\beta'+\alpha'\beta=c$, (4) $\beta\beta'=-d$.

Versuchen wir daher diese 4 Gleichungen nach α, β, α', β' aufzulösen, und eliminiren zu dem Ende mittels der ersten Gleichung aus den 3 letzten das α', d. h. setzen wir in denselben $-\alpha$ statt α', so ergibt sich: $\beta+\beta'=b+\alpha^2$, $\alpha(\beta'-\beta)=c$, $\beta\beta'+d=0$. Die beiden ersten dieser Gleichungen sind nach β und β' vom ersten Grade und liefern $\beta=\frac{1}{2}(\alpha^2+b-\frac{c}{\alpha})$, $\beta'=\frac{1}{2}(\alpha^2+b+\frac{c}{\alpha})$, so dass die Gleichung $\beta\beta'+d=0$, wenn wir für β und β' diese Werthe setzen und dieselbe in Bezug auf α^2 ordnen in
$$(\alpha^2)^3+2b(\alpha^2)^2+(b^2+4d)(\alpha^2)-c^2=0$$
übergeht, mithin in Beziehung auf α^2 kubisch ist. Es lassen sich somit durch Auflösung dieser Gleichung nach §. 140 stets 3 Werthe für α^2 und mithin 6 Werthe für α finden, welche die gesuchte Eigenschaft haben. Für jeden dieser Werthe ergibt sich alsdann ein System von Werthen für α', β, β' aus den oben gefundenen Gleichungen $\alpha'=-\alpha$, $\beta=\frac{1}{2}(\alpha^2+b-\frac{c}{\alpha})$, $\beta'=\frac{1}{2}(\alpha^2+b-\frac{c}{\alpha})$. Da nun nach dem Obigen aus jedem Systeme von Werthen für α, β, α', β' sich 4 Werthe für x ergeben, so käme man auf diesem Wege zu 24 Werthen für x. Von diesen sind aber je 6 einander gleich, wie sich sowohl direkt nachweisen lässt, als auch indirekt, indem man, was weiter unten in §. 147 geschehen soll, beweist, dass eine Gleichung des 4ten Grades nicht mehr als 4 von einander verschiedene Wurzelwerthe haben kann.

§. 143. *Auflösung der vollständigen Gleichung des vierten Grades.* Die vollständige Gleichung $x^4+ax^3+bx^2+cx=d$ führt man behufs ihrer Auflösung (wie dies in §. 136 und 140 resp. mit der vollständigen quadratischen und kubischen Gleichung geschehen ist) dadurch auf eine reducirte zurück, dass man für x die Summe $y+h$ einführt und das h so bestimmt, dass das mit y^3 multiplicirte Glied herausfällt. Es verwandelt sich dieselbe durch die Einführung des y zunächst in
$$(y+h)^4+a(y+h)^3+b(y+h)^2+c(y+h)=d,$$

oder wenn man sie nach y ordnet, in
$$y^4+(4h+a)y^3+(6h^2+3ah+b)y^2+(4h^3+3ah^2+2bh+c)y=d-h^4-ah^3-bh^2-ch,$$
und wird demnach zu einer reducirten Gleichung, wenn man h so wählt, dass $4h+a=0$ wird, d. h. wenn man $h=-\frac{1}{4}a$ nimmt. Hat man alsdann die 4 Werthe von y aus dieser Gleichung nach dem vorigen §. gefunden, so ergeben sich die Werthe von x aus $x=y+h=y-\frac{1}{4}a$.

Von der Zahl der Wurzelwerthe einer algebraischen Gleichung.

§. 144. *Erklärung.* Eine ganze Funktion A heisst durch eine andere ganze Funktion B theilbar, sobald der Quotient $A:B$ wiederum einer ganzen Funktion gleich ist.

§. 145. *Lehrsatz.* Wenn eine ganze Funktion von x für $x=\alpha$ den Werth Null annimmt, so ist dieselbe durch $x-\alpha$ theilbar.

Beweis. Bezeichnet man die ganze Funktion, welche vom nten Grade sein möge, durch F_n, so kann, weil $x-\alpha$ gleichfalls eine ganze Funktion (vom ersten Grade) ist, der Quotient $F_n:(x-\alpha)$ nach §. 97 in eine Summe von der Form $F_{n-1}+\frac{r}{x-\alpha}$ zerlegt werden, in welcher F_{n-1} eine ganze Funktion vom $(n-1)$ten Grade, und $\frac{r}{x-\alpha}$ eine echtgebrochene Funktion, mithin r vom Nullten Grade, d. h. ein von x freier Ausdruck ist. Soll nun die Behauptung des Lehrsatzes eine richtige, d. h. $F_n:(x-\alpha)$ eine ganze Funktion sein, so muss r den Werth Null haben. Dass dies aber in der That der Fall ist, erkennt man sogleich, wenn man aus der Gleichung $\frac{F_n}{x-\alpha}=F_{n-1}+\frac{r}{x-\alpha}$ durch Multiplikation mit $x-\alpha$ die Gleichung
$$F_n=F_{n-1}(x-\alpha)+r$$
ableitet, und sodann α statt x setzt. Es reducirt sich nämlich dieselbe alsdann, da F_n der Voraussetzung nach für $x=\alpha$ der Null gleich wird, unmittelbar auf $0=r$.

§. 146. *Zusatz.* Da, wenn F_n eine ganze Funktion vom nten Grade ist, $F_n=0$ eine algebraische Gleichung des nten Grades vorstellt, so lässt sich der vorige Satz auch so aussprechen:

Ist $F_n=0$ eine geordnete algebraische Gleichung vom nten Grade und α ein Wurzelwerth derselben, so ist F_n durch $x-\alpha$ theilbar, und daher $F_n=(x-\alpha)F_{n-1}$ — unter F_{n-1} eine ganze Funktion vom $(n-1)$ten Grade verstanden.

§. 147. *Lehrsatz.* Eine algebraische Gleichung vom nten Grade kann nicht mehr als n von einander verschiedene Wurzelwerthe haben.

Beweis. Hätte die algebraische Gleichung $F_n = 0$ (in der F_n eine ganze Funktion vom nten Grade bezeichne) mehr als n von einander verschiedene Wurzelwerthe, etwa die Wurzelwerthe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}$, so würde man folgende Schlüsse ziehen können.

Da α_1 ein Wurzelwerth der Gl. $F_n = 0$ ist, so hat man nach dem vorigen Satze $F_n = (x - \alpha_1) F_{n-1}$ *), und die gegebene Gleichung lässt sich daher $(x - \alpha_1) F_{n-1} = 0$ schreiben. Es soll aber auch α_2 ein Wurzelwerth derselben sein, mithin erhält man, wenn man den Werth α_2 statt x in die letzte Gleichung setzt, $(\alpha_2 - \alpha_1)(F_{n-1})_2 = 0$, und sonach muss, weil $\alpha_2 - \alpha_1$ nach der Voraussetzung von Null verschieden ist, $(F_{n-1})_2 = 0$ sein. Aus $(F_{n-1})_2 = 0$ folgt aber nach §. 146 wiederum $F_{n-1} = (x - \alpha_2) F_{n-2}$, mithin lässt sich die gegebene Gleichung auch so schreiben:

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) F_{n-2} = 0.$$

Insofern nun ferner auch α_3 ein Wurzelwerth derselben ist, so folgt $(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(F_{n-2})_3 = 0$, oder da $\alpha_3 - \alpha_1$ und $\alpha_3 - \alpha_2$ von Null verschieden sind, $(F_{n-2})_3 = 0$, während nach §. 146 diese Gleichung wiederum die Gl. $F_{n-2} = (x - \alpha_3) F_{n-3}$ nach sich zieht, so dass die gegebene Gleichung auch durch

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) F_{n-3} = 0$$

vorgestellt werden kann. Ebenso folgt weiter, weil α_4 ein von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ verschiedener Wurzelwerth der Gl. $F_n = 0$ sein soll, dass $F_{n-3} = (x - \alpha_3) F_{n-4}$ ist, also die gegebene Gleichung sich auch

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) F_{n-4} = 0$$

schreiben lässt. Setzt man diese Schlussreihe fort, so bekommt man endlich in Folge davon, dass auch $\alpha_5, \alpha_6, \ldots \alpha_n$ Wurzelwerthe sind, für die gegebene Gleichung noch die Form

a) $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) \ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n) F_0 = 0.$

Aus dieser Gleichung folgt aber, insofern auch α_{n+1} ein Wur-

*) Unter $F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots F_{n-2}, F_{n-1}$ verstehen wir in diesem §. ganze Funktionen von x resp. vom 0ten, 1ten, 2ten, 3ten, ... $(n-2)$ten, $(n-1)$ten Grade, so wie unter $(F_1)_r, (F_2)_r, (F_3)_r, \ldots (F_{n-2})_r, (F_{n-1})_r$ die Werthe, welche $F_1, F_2, F_3, \ldots F_{n-2}, F_{n-1}$ annehmen, wenn in ihnen α_r statt x gesetzt wird.

zelwerth derselben sein soll,

$(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\ldots(\alpha_{n+1}-\alpha_{n-1})(\alpha_{n+1}-\alpha_n)(F_0)_{n+1}=0.$

Ist also α_{n+1} von α_1, α_2, α_3, ... α_n verschieden, so muss, da dann keiner der ersten Faktoren Null sein kann, $(F_0)_{n+1}=0$, d. h. (da F_0 unabhängig von x und mithin $(F_0)_{n+1}=F_0$; ist) $F_0=0$ sein. Ist dies aber der Fall, so erhält (wie man sieht, wenn man die Multiplikationen in der Gl. (a) ausführt) jeder Coefficient der Gleichung $F_n=0$ den Werth Null, und es hört daher dieselbe auf eine Bestimmungsgleichung zu sein. Folglich kann in der That ausser den n Wurzelwerthen α_1, α_2, α_3, ... α_n der algebraischen Gleichung $F_n=0$ ein anderer von ihnen verschiedener nicht existiren.

§. 148. *Zusatz.* Sind zwei ganze Funktionen von x, die vom nten Grade sind, einander gleich für mehr als n Werthe von x, so müssen in beiden die Coefficienten der gleichvielen Potenzen von x einander gleich sein. Denn nennt man jene Funktionen F_n und φ_n, und ist

$$F_n=a+a_1x+a_2x^2+\ldots.+a_nx^n$$
$$\varphi_n=b+b_1x+b_2x_2+\ldots.+b_nx^n,$$

so hat man für jeden Werth von x, der $F_n=\varphi_n$ macht, $F_n-\varphi_n=0$, d. h.

$$(a-b)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\ldots.+(a_n-b_n)x^n=0,$$

und diese Gleichung kann nach §. 147 für mehr als n Werthe von x nur erfüllt sein, wenn jeder Coefficient gleich Null, d. h. wenn $a=b$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, etc. $a_n=b_n$ ist.

§. 149. *Zusatz.* Da alle Werthe von $((\sqrt[n]{a}))$ der Erklärung der Wurzel gemäss die Eigenschaft haben, mit n potenzirt a zu geben, also Wurzelwerthe der Gleichung $x^n=a$ zu sein, und dies eine algebraische Gleichung des nten Grades ist, so kann nach §. 147 die $((\sqrt[n]{a}))$ nie mehr als n von einander verschiedene Werthe haben.

B e i l a g e.

Von den benannten Zahlen.

1. *Vom Grössenmasse.* Sind Grössen auf eine genaue Weise in irgend einer Beziehung, (etwa in Hinsicht auf ihre Menge oder ihre Ausdehnung, ihren Gebrauchswerth, ihre Wirkung etc.) mit einander vergleichbar, und soll ihre Vergleichung mit völliger Schärfe ausgeführt werden: so pflegt man sie einzeln mit einer und derselben Grösse, die jener Beziehung nach (also nach ihrer Menge, Ausdehnung etc.) als bekannt voraus gesetzt wird, zu vergleichen, und aus den Vergleichsresultaten dann ihr gegenseitiges Verhalten zu erkennen oder zu ermitteln. — Jene vermittelnde Grösse nennt man die Einheit der übrigen.

Ist E eine solche Einheit, und eine Grösse A in der fraglichen Beziehung ein Vielfaches, etwa das afache, derselben, so nennt man aE das Mass von A, und a die Masszahl.

Ist A kein Vielfaches von E, wohl aber ein Vielfaches eines genauen Theiles von E, etwa das mfache des nten Theiles desselben, so nennt man $\frac{m}{n}E$ das Mass von A und versinnlicht dies durch die Formel $A = \frac{m}{n}E$. Behandelt man in dieser Formel A und E wie arithmetische Ausdrücke, und das E wie einen Faktor, so erhält man aus derselben $nA = mE$ als eine richtige Gleichung, da in der That nA und mE Massausdrücke für Grössen vorstellen, die einerlei Werth in der gedachten Beziehung haben. Den Quotienten $m:n$ nennt man wiederum die Masszahl von A in Bezug auf E.

Gibt es keinen genauen Theil von E, von welchem A ein Vielfaches wäre, so bezeichnet man das Mass durch αE und denkt unter α eine absolute Zahl, die grösser ist wie jede gebrochene Zahl, die mit E verbunden das Mass einer Grösse vorstellen würde, welche kleiner als A ist, dagegen kleiner wie jede gebrochene Zahl, die mit E verbunden das Mass einer Grösse vorstellen würde, welche grösser

als A ist. Die (natürlich irrationale) Zahl α heisst wiederum die auf E bezogene Masszahl von A. Vergl. die Einleitung pag. 9. ff.

Die Massausdrücke von Grössen führen gewöhnlich den Namen benannte Zahlen. S. die Einl. pag. 1 und 2.

2. *Verwandlung von Massausdrücken gleichartiger Grössen, welche sich auf ungleiche Einheiten beziehen, in andere, die auf einerlei Einheit bezogen sind.* Sind A_1, A_2, A_3,.... gleichartige Grössen (d. h. Grössen, deren Massen einerlei Einheit zum Grunde gelegt werden kann) und sind für sie resp. die Ausdrücke $a_1 E_1$, $a_2 E_2$, $a_3 E_3$,.... als Masse gegeben; ist ferner E die Einheit, auf welche sie sämmtlich bezogen werden sollen: so bestimme man zunächst das Mass der Grössen E_1, E_2, E_3,... in Bezug auf E. Findet sich z. B. $E_1 = b_1 E$, $E_2 = b_2 E$, $E_3 = b_3 E$,.... so lassen sich die Masse von A_1, A_2, A_3,.... auch $a_1(b_1 E)$, $a_2(b_2 E)$, $a_3(b_3 E)$ schreiben und es sind dann $(a_1 b_1)E$, $(a_2 b_2)E$, $(a_3 b_3)E$,.... die verlangten Massausdrücke.

Sind a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3,.... ganze Zahlen, so ist dies an sich klar. Um die Richtigkeit für gebrochene Zahlen einzusehen, denke man z. B. $a_1 = m : n$, $b_1 = \mu : \nu$, (m, n, μ, ν, als natürliche Zahlen gedacht), und folgre aus $A_1 = a_1 (b_1 E)$ die Gleichung $nA_1 = m(b_1 E)$. Da nun $b_1 E$ das μfache des νten Theils von E ist, so ist $m(b_1 E)$ das μmfache dieses νten Theils d. h. $nA_1 = \frac{m\mu}{\nu} E$ und somit A_1 als der nte Theil hiervon, das $m\mu$fache des $n\nu$ten Theils von E, d. h. $A_1 = (a_1 b_1)E$. — Dass endlich $A_1 = (a_1 b_1)E$ bleibt, wenn a_1 und b_1 irrational sind, folgt aus der obigen Definition irrationaler Masszahlen, da dann $a_1 b_1$ kleiner ist als jeder rationale Ausdruck, der als Masszahl mit E verbunden, eine Grösse vorstellt, die grösser als A_1 ist, und grösser wie jeder, der auf E bezogen, eine Grösse vorstellt, die kleiner als A_1 ist.

Ist ferner z. B. $A_1 = a_1 E_1$ und auf eine Einheit E_4 zu beziehen, welche durch die Gleichungen $E_1 = a_2 E_2$, $E_2 = a_3 E_3$, $E_3 = a_4 E_4$, gegeben ist, so findet man $A_1 = (a_1 a_2)E_2$, also $A_1 = (a_1 a_2 a_3)E_3$ und endlich $A_1 = (a_1 a_2 a_3 a_4)E_4$.

Sind in diesem Falle a_2, a_3, a_4 grösser als Eins, ist also $E_1 > E_2$, $E_2 > E_3$, $E_3 > E_4$, so sagt man, wenn man A_1 durch $(a_1 a_2)E_2$ oder $(a_1 a_2 a_3)E_3$ oder $(a_1 a_2 a_3 a_4)E_4$ ausdrückt, man habe A_1 auf eine niedrigere Einheit (oder Benennung) gebracht. Sind

dagegen a_2, a_3, a_4 kleiner als Eins, also $E_1 < E_2$, $E_2 < E_3$, $E_3 < E_4$, so sagt man, es sei A_1 auf eine höhere Einheit (oder Benennung) gebracht.

Ist z. B. $A_1 = \frac{11}{8}$ Thlr., und hat man 1 Thlr. = 30 Sgr., 1 Sgr. = 12 Pf. (wo Thlr., Sgr., Pf., dem E_1, E_2, E_3 entsprechen), so kommt man auf $\frac{11}{8}.30$ Sgr., $\frac{11}{8}.30.12$ Pf. als Massausdrücke von A_1 mit niedrigerer Benennung.

3. *Grössensummen und Grössendifferenzen.* Versteht man unter der Summe $A+B$ zweier Grössen A und B eine Grösse C, welche in einer bestimmten Beziehung (z. B. ihrer Menge oder ihrer Ausdehnung nach) dem A und B zusammengenommen gleich kommt, und sind ax und bx die Masse von A und B, so ist offenbar $(a+b)$x ein Mass von C, d. h. gleich $A+B$.

Versteht man ferner unter ihrer Differenz $A-B$ eine Grösse, welche zu B (in dem eben angegebenen Sinne) addirt A gibt, so ist offenbar $A - B = (a - b)$x.

Es lassen sich also nur gleichartige Grössen durch (Grössen-) Addition und (Grössen-) Subtraktion mit einander verbinden, und wenn man die vorstehenden Massformeln anwenden will, müssen die zu vereinigenden Grössen, wofern ihre Masse in Bezug auf verschiedene Einheiten gegeben sind, zuvor nach Nro. 2. auf einerlei Einheit gebracht werden.

Ferner sieht man aus den Gleichungen $aE + bE = (a+b)E$, $aE - bE = (a-b)E$, dass sich in denselben wiederum E wie ein arithmetischer Faktor behandeln lässt.

4. *Von der Bedeutung negativer Masszahlen.* Zuweilen kann eine Grösseneinheit E mit zweierlei Prädikaten verbunden werden, welche der Art entgegengesetzt sind, dass eine Vermehrung um aE, wenn E das eine Prädikat erhält, einer Verminderung von aE, wenn dem E das zweite Prädikat beigelegt wird, gleichkommt. So hat z. B. bei der Berechnung eines Kassenbestandes eine Vermehrung von a ausgegebenen Thalern dieselbe Wirkung, wie eine Verminderung von a eingenommenen Thalern. Man hat daher da, wo eingenommene Thaler zu addiren sind, ausgegebene Thaler zu subtrahiren, und umgekehrt. — Der Erleichterung wegen hat man sich in solchen Fällen erlaubt, das Prädikat mit der Einheit zu einer eigenen Einheit zu verbinden, und dann die entgegengesetzten Additions- und Subtraktionszei-

chen, durch welche die Grössen unter einander in Verbindung treten, je nachdem das eine oder das andere Prädikat ihnen zukommt, ihrer Masszahl anzuheften; also die Masszahl von a Einheiten der einen Art durch $+a$, die von a Einheiten der anderen Art durch $-a$ vorzustellen. Es soll dadurch die durch die verschiedenen Prädikate veranlasste Ungleichartigkeit der Grössen wiederum beseitigt werden, indem man alsdann während der Rechnung das $+a$ und $-a$ wiederum auf dieselbe Einheit, im obigen Beispiele auf Thaler schlechthin, bezogen denken darf. Auf diese Weise haben bei den Grössen der angegebenen Art auch negative Masszahlen einen Sinn erhalten. Ist nun das Endresultat der Rechnung ein negatives, etwa $-c$, so hat man den natürlichen Sinn wiederherzustellen, d. h. man hat das (—) nicht mehr als Rechnungszeichen (also das $-c$ nicht mehr als negative Zahl), sondern als provisorisches Symbol anzusehen, welches wieder von dem c abzulösen ist, und dazu dient, das der Einheit beizulegende Prädikat zu bestimmen.

Wie mit den beiderlei Thalern, verhält es sich unter andern mit Entfernungen in einer und in der entgegengesetzten Richtung. (Man vergleiche den Artikel von den relativen Zahlen in der Einleitung pag. 12 ff.)

5. *Grössen-Produkte.* Unter dem Produkte einer Grösse A, deren Mass aE ist, mit einer absoluten Zahl α versteht man eine Grösse derselben Art vom Masse αaE; also das αfache von A, wenn α eine ganze Zahl ist, das mfache des nten Theils von A, wenn α ein Bruch mit dem Zähler m und dem Nenner n ist, etc.

Produktformen, in denen der eine Faktor eine Grösse, der andere eine negative Zahl ist, oder in denen b e i d e Faktoren Grössen sind und folglich auch Grössen-Potenzen, haben keinen Sinn.

6. *Grössen-Quotienten.* *a*) Unter dem Quotienten einer Grösse A, deren Mass aE ist, und einer absoluten Zahl α versteht man eine Grösse derselben Art vom Masse $\frac{a}{\alpha}E$; also den αten Theil von A, wenn α eine ganze Zahl ist, das nfache des mten Theils von A, wenn α ein Bruch mit dem Zähler m und dem Nenner n ist, etc.

b) Unter dem Quotienten zweier gleichartigen Grössen A und B versteht man den Quotienten ihrer auf einerlei Einheit bezogenen Masszahlen. In diesem Falle gebraucht man indess häufiger für

„Quotient“ den Namen „Verhältniss“, und wenn z. B. aE das Mass von A, bE das Mass von B, also $a:b$ ihr Quotient (oder Verhältniss) ist, so sagt man, es verhalte sich A zu B wie a zu b.

Die zur Erklärung des Grössenverhältnisses dienende Gleichung $\frac{aE}{bE}=\frac{a}{b}$ ist, wie man sieht auch eine richtige, wenn man sie arithmetisch auffasst, sobald man das Einheitszeichen E wiederum wie einen Faktor behandelt. Da ferner $\frac{aE}{1.E}=a$ ist, so kann jede Masszahl einer Grösse auch als Verhältniss der Grösse zu ihrer Einheit betrachtet werden.

Das Verhältniss zweier Grössen ist offenbar unabhängig von der Grösse der zum Grunde gelegten Einheit; denn bezieht man A und B auf eine neue beliebige Einheit E', und ist $E=mE'$, so hat man $A=amE'$, $B=bmE'$ und der Quotient der neuen Masszahlen am und bm ist wiederum gleich $a:b$.

7. *Gleichartigkeit der Grössen in Grössen-Gleichungen.* Da man nur solche Grössen gleichartig nennt, welche mit einander vergleichbar sind, so versteht es sich von selbst, dass Gleichungen zwischen ungleichartigen Grössen keinen Sinn haben; und wo man von Gleichungen zwischen ungleichartigen Grössen spricht, geschieht es nur in uneigentlicher Weise. Stets enthalten sie nur Masse von einerlei Grössenart und von anderen Grössen nicht die Masse, sondern nur Masszahlen, die überdies ihre Bedeutung als solche, d. h. ihre Beziehung zu einer Einheit, verloren haben, bloss Bestandtheile bildend von Zahlenverbindungen, welche als Masszahlen jener einen Grössenart auftreten.

Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen.

a) Man sagt, eine Fläche sei einem Produkte zweier Linien gleich, obwohl es nicht Produkte von benannten Zahlen gibt, und obwohl Linien und Flächen ungleichartig sind. Um den Sinn dieses Ausspruches zu beleuchten, legen wir ein ganz specielles Beispiel zum Grunde. — Sind p, g, h resp. die Masszahlen für die Ausdehnung eines Parallelogramms und für die seiner Grundlinie und Höhe, so ist, wie die Geometrie lehrt, $p=gh$. Erlaubt man sich nun in Bezug hierauf die Redensart, es sei der Inhalt des Paralellogramms das Produkt aus Grundlinie und Höhe, so meint man damit nicht, wenn E die Flächeneinheit, E' die Linieneinheit vorstellt, dass jene Gleichung aus einer durch $pE=gE'.hE'$ versinnlichten Grössengleichung herstamme; vielmehr ist die entsprechende Grössengl. $pE=(gh)E$ oder $pE=g(hE)$ oder $pE=h(gE)$, und es haben g und h innerhalb dieser Gleichungen ihre Beziehung zur Linieneinheit verloren. In

dem einfachsten Falle, wo g und h ganze Zahlen sind, drückt die erste dieser drei Gleichungen aus, dass das Parallelogramm pE der Summe von gh Flächeneinheiten gleich ist, also sich in gh Flächen von der Grösse der Flächeneinheit zertheilen lässt, und die obige Redensart soll nur andeuten, auf welche Einheit sich die Zahlen g und h vor ihrer Vereinigung zu einem Produkte bezogen haben. Die zweite Gleichung drückt aus, dass die Fläche pE einer Summe von h Flächen von der Grösse gE gleich ist, und die Zahl g ist gleichfalls nicht mehr Längenmasszahl, sondern die unbenannte Zahl, welche angibt, wie oft sich die Flächeneinheit über der Grundlinie auftragen lässt. Aehnlich verhält es sich mit der dritten Gleichung. — In der That beruht auch der geometrische Beweis der obigen Formel auf einer entsprechenden Zertheilung der Fläche pE.

Allgemein drückt nun die Gleichung $x^2 = ab$, wenn x^2 die Masszahl einer Fläche vorstellt, und früher (vor der Entwickelung der Gleichung) x, a, b sich auf Linieneinheiten bezogen hatten, nur aus, indem man sie als Grössengleichung $x^2E = (ab)E$ oder $(xx)E = (ab)E$ zu schreiben hat, dass ein Rechteck von den Dimensionen xE' und xE' einem Rechtecke von den Dimensionen aE' und bE' gleich sei.

b) Ebenso verhält es sich mit der Redensart, dass die Geschwindigkeit eines sich gleichförmig bewegenden Körpers dem Quotienten aus dem durchlaufenen Wege und der dazu verbrauchten Zeit gleich sei. Es ist in der That, wenn v, s, t die Masszahlen resp. für die Geschwindigkeit, den durchlaufenen Weg und die verwendete Zeit vorstellen, $v = \frac{s}{t}$, aber 1) sind „Geschwindigkeit" und „Weg" gleichartige Grössen, da man unter jener den in der Zeiteinheit durchlaufenen Weg versteht, und 2) ist, wenn E die Wegeinheit, E' die Zeiteinheit bedeutet, die entsprechende Grössengleichung nicht $vE = \frac{sE}{tE'}$, sondern $vE = \frac{sE}{t}$ oder $vE = \frac{s}{t}E$, und es sagt dieselbe z. B. in dem einfachsten Falle, wo t eine ganze Zahl ist, wenn wir unter E' eine Secunde denken, nur aus, dass der Körper in 1 Secunde den tten (nicht den tSecunden-ten) Theil desjenigen Weges durchlaufe, den er in t Secunden zurücklegt.

c) Man sagt, eine Kraft, welche einem ruhenden Körper eine gleichförmige Bewegung mittheilt, sei dem Produkte aus der Masse des Körpers und seiner erlangten Geschwindigkeit gleich. Allein man versteht hier unter Kraft nicht die Kraft selbst, sondern den Betrag ihrer in der Zeiteinheit auf die Masseneinheit ausgeübten Wirkung, so dass wiederum Kraft und Geschwindigkeit gleichartig (nämlich Wege) sind. Sind nun p, m, v resp. die Masszahlen für die Kraft, die Masse und die Geschwindigkeit, so ist in der That $p = mv$, aber die entsprechende Grössengleichung ist nicht, wenn E die Wegeinheit, E' die Masseneinheit bedeutet, $pE = mE' . vE$, sondern $pE = (mv)E$, und es drückt dieselbe nur aus, dass der Weg $(mv)E$, der von einer Masse mE' in der Zeiteinheit zurückgelegt wird, einer Kraft von derselben Grösse zugeschrieben werden darf, wie der Weg pE, der in derselben Zeit von der Masseneinheit zurückgelegt wird; oder dass die Kraft, welche der Masse mE' die Geschwindigkeit vE mittheilt, das mfache der Kraft sei, welche der Masse E' diese Geschwindigkeit gibt.

Jedenfalls ist aber m eine unbenannte Zahl, welche innerhalb der Gleichung ihre Beziehung zur Masseneinheit verloren hat.

8. *Begriff der Proportionalität ungleichartiger Grössen.* Gilt die Gleichung $z = mx$ für jeden Werth von x, während m mit dem Werthe von x nicht zusammenhängt, so dass das z mit dem x zugleich seinen Werth ändern muss, so sagt man, es sei z dem x „direkt proportional" oder auch schlechthin „proportional." Ist unter denselben Voraussetzungen $z = \frac{m}{x}$, so sagt man, es sei z dem x „umgekehrt proportional." *) Dieselben Redensarten hat man auch auf benannte Zahlen angewendet, indem man sagt, wenn z und x die Masszahlen zweier Grössen A und B waren, und $z = mx$ oder $z = mx^n$, m aber unabhängig von x ist, es sei A resp. dem B oder der nten Potenz von B proportional, obgleich eigentlich von Potenzen benannter Zahlen nicht gesprochen werden kann; und indem man sagt, wenn $z = \frac{m}{x}$ oder $z = \frac{m}{x^n}$ ist, es sei A dem B oder der nten Potenz von B umgekehrt proportional.

Sonach ist z. B. nach (Nro. 7, *b*) die Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Körpers direkt proportional dem durchlaufenen Raume, und umgekehrt proportional der Zeit, indem das hiesige m in der ersten Beziehung dem dortigen t, in der zweiten Beziehung dem dortigen s entspricht.

9. *Von der Abhängigkeit der Einheiten ungleichartiger Grössen von einander.* Hängen ungleichartige Grössen, deren Einheiten resp. E, E_1, E_2, E_3, etc. sein mögen, in der Art unter einander zusammen, dass die Wahl der Einheit der einen Grösse, etwa von E, sich nach der Wahl der Einheiten der übrigen richtet: so fragt sich wie das E geändert werden müsse, wenn für E_1, E_2, E_3 etc. beliebige andere Einheiten derselben Art, etwa die Einheiten E_1',

*) Die Benennung „proportional" hat folgenden Grund. Sind x' und x'' zwei Werthe von x, und z' und z'' die zugehörigen Werthe von z; ist also im ersten Falle $z' = mx'$ und $z'' = mx''$, so erhält man durch Division dieser Gleichungen durcheinander die Gleichung $\frac{z'}{z''} = \frac{x'}{x''}$, und es bilden somit jede zwei Werthe von x mit den zugehörigen Werthen von z eine Proportion. Im zweiten Falle, wenn $z' = \frac{m}{x'}$, $z'' = \frac{m}{x''}$ ist, erhält man durch Division dieser Gleichungen $\frac{z'}{z''} = \frac{x''}{x'}$, und es bilden also dann die Werthe von x mit den umgekehrten Werthen von z eine Proportion.

E_2', E_3', etc. durch die Gleichungen $E_1=\alpha_1 E_1'$, $E_2=\alpha_2 E_2'$, $E_3=\alpha_3 E_3'$, etc. eingeführt werden.

Bezeichnet man die für E zu substituirende neue Einheit durch E', und setzt vorläufig $E=\gamma E'$, so handelt es sich demnach um die Kenntniss des Werthes von γ. Um nun diesen Werth von γ zu bestimmen, kann man unter andern auf folgende Weise verfahren.

Man stellt durch aE, a_1E_1, a_2E_2, a_3E_3, etc. zusammengehörige Masse der in Rede stehenden Grössen vor, und bildet aus a, a_1, a_2, a_3, etc. diejenige Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen diesen Grössen ausdrückt; alsdann setzt man in dieser Gleichung für a, a_1, a_2, etc. resp. $a\gamma$, $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, etc., um die entsprechende Gleichung für die neuen Einheiten zu erhalten, und gewinnt endlich aus der Verbindung beider Gleichungen durch Elimination den Werth von γ.

Ein nicht wesentlich hiervon verschiedener Weg ist der, dass man in der zweiten dieser Gleichungen für a_1, a_2, a_3, etc. die zu $a=1$ gehörigen Werthe setzt, und dann dieselbe nach γ auflöst.

Beispiele. *a) Zusammenhang zwischen den Einheiten der Linien, Flächen und Körper.* Ist aE das Mass einer Fläche, und sind bE_1 und cE_1 die Masse der Seiten eines dieser Fläche gleichen Rechtecks, wo E und E_1 resp. die Flächen- und Linien-Einheit vorstellen, so hat man in $aE=bcE$, oder in $a=bc$, die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen der Fläche aE und den Linien bE_1 und cE_1 ausspricht. Wird nun in der letzten Gleichung γa statt a, $\alpha_1 b$ statt b, $\alpha_1 c$ statt c gesetzt, so ergibt sich $\gamma a=bc\alpha_1^2$, und beide Gleichungen durch einander dividirend: $\gamma=\alpha_1^2$.

Ebenso findet man, wenn E die Körpereinheit, E_1 die Linieneinheit bezeichnet, $\gamma=\alpha_1^3$ für die Gleichung des Zusammenhanges zwischen den Linien- und Körper-Einheiten.

b) Handelt es sich um die Abhängigkeit der Einheit für die Geschwindigkeit gleichförmig sich bewegender Körper von der Raum- und Zeit-Einheit, so hat man aus No. 7, $v=\frac{s}{t}$ als Gleichung des Zusammenhanges für die betreffenden Grössen, und erhält als zweite Gleichung, wenn die Raum- und Zeiteinheit resp. nach den Verhältnisszahlen α_1 und α_2 geändert wird,

$$v\gamma=\frac{s\alpha_1}{t\alpha_2},$$

und folglich durch Division der letzten Gleichung durch die erste,

$$\gamma=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

c) Ebenso findet man für die in No. 7, *c* definirten Kräfte aus der Gleichung $p=mv$, wenn die Kraft-, Massen- und Geschwindigkeits-Einheiten nach den Verhältnisszahlen γ, α_3 und α_4 geändert werden, $\gamma=\alpha_3\alpha_4$, und mithin, wenn man nach dem Vorhergehenden auf die Raum- und Zeit-Einheit zurückgeht,

$$\gamma = \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2}.$$

d) Unter der Einheit von Pferdekräften, die wiederum durch E bezeichnet sein mag, versteht man eine Kraft, welche in 1 Minute ein Gewicht von 33000 Pfd. um 1 Fuss zu heben im Stande ist. Nennen wir nun a die Zahl der Pferdekräfte, welche nöthig ist, um ein Gewicht von a_1 Pfd. in a_2 Min. um a_3 Fuss zu heben, und bemerken, dass, um 33000 Pfd. in a_2 Min. um 1 Fuss zu heben, $\frac{1}{a_2}$ E, also um dies Gewicht in a_2 Min. um a_3 Fuss zu heben, $\frac{a_3}{a_2}$ E nöthig ist, und dass mithin $\frac{a_1 a_3}{33000 a_2}$ E erfordert wird, wenn a_1 Pfd. in a_2 Min. um a_3 Fuss gehoben werden soll: so hat man

$$a = \frac{a_1 a_3}{33000 a_2}.$$

Setzt man nun hierin $a\gamma$ statt a, $a_1\alpha_1$ statt a_1, $a_2\alpha_2$ statt a_2, $a_3\alpha_3$ statt a_3 und alsdann, da für $a_1 = 33000$, $a_2 = 1$ und $a_3 = 1$, das a in 1 übergehen muss, statt a, a_1, a_2, a_3 resp. 1, 33000, 1, 1, so ergibt sich

$$\gamma = \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2}.$$

10. *Von der Homogeneität der zur Bestimmung von Grössenmassen dienenden Gleichungen.* Soll eine Gleichung G, welche Beziehungen zwischen Masszahlen ausdrückt, zur Bestimmung des Masses einer Grösse A dienen, so muss sie natürlich für dieses Mass denselben Werth liefern, wie jede andere Gleichung G', die sich aus G durch blosse Einführung anderer Einheiten ergibt — vorausgesetzt jedoch, dass bei der Wahl der neuen Einheiten, falls solche von einander abhängig sind, die in Nro. 9 besprochenen Beziehungen zwischen denselben berücksichtigt werden.

Wird jene nothwendige Bedingung, kein anderes Mass für A als die Gleichung G' zu geben, von der Gleichung G erfüllt, so nennt man sie homogen.

Ist die Gleichung an sich keine homogene, so wird sie zu einer solchen, wenn man für die Masszahlen das Verhältniss der Masse zu ihrer Einheit unter Beibehaltung der Quotientenform setzt.

Beispiele. *a*) Ist $z = \log x$ eine Gleichung, in welcher z sich auf eine Linien-Einheit E bezieht, und auch das x sich auf eben diese Einheit bezogen hatte, so muss dieselbe, wenn eine neue Einheit durch die Gleichung $\mathrm{E} = \alpha\mathrm{E}'$ eingeführt wird, in $\alpha z = \log(\alpha x)$ (in das obige G') verwandelt werden, weil $z\mathrm{E} = (\alpha z)\mathrm{E}'$, $x\mathrm{E} = (\alpha x)\mathrm{E}'$ ist. Die erste Gleichung liefert aber $z\mathrm{E} = (\log x)\mathrm{E}$, die zweite dagegen $(\alpha z)\mathrm{E}' = (\log \alpha x)\mathrm{E}'$, und es müsste mithin wegen $z\mathrm{E} = (\alpha z)\mathrm{E}'$, $\alpha \log x = \log(\alpha x)$ sein, was, wie man sieht, nicht allgemein der Fall ist. Es ist also $z = \log x$ nicht an sich homogen. Wird aber für z das Verhältniss $\frac{z\mathrm{E}}{\mathrm{E}}$, d. h. $\frac{z}{1}$,

für x das Verhältniss $\frac{xE}{E}$, d. h. $\frac{x}{1}$, gesetzt, also die Gleichung in

$$\frac{z}{1} = \log \frac{x}{1}$$

umgeformt, wo die beiden Einsen als ursprünglich mit x und z auf einerlei Einheit bezogen zu denken sind, so wird dieselbe homogen, da dann weder $\frac{z}{1}$ noch $\frac{x}{1}$ durch Einführung neuer Einheiten seinen Werth ändert.

b) Bezieht sich in der Gleichung $z^2 = px + q$, z^2 auf die Flächeneinheit E, und ging x ursprünglich auf die Linien-Einheit E_1, während p und q weder mit E noch mit E_1 etwas zu thun haben, so erhält man, $E = \gamma E'$, $E_1 = \alpha E_1'$ nehmend, in Folge von Nro. 9 durch die Einführung von E' und E'_1, $z^2\alpha^2 = px\alpha + q$, und kommt demnach, da $z^2E = z^2\alpha^2E'$ ist, und daher $(px+q)E = (px\alpha + q)E'$, also $(px+q)\alpha^2 = px\alpha + q$ sein müsste, auf einen Widerspruch. Die Gleichung wird daher an sich erst homogen, wenn man sie in der Form

$$\frac{z^2}{1} = p\frac{x}{1} + q$$

schreibt, und die erste Eins auf die Flächeneinheit, die zweite als ursprünglich auf die Linieneinheit bezogen denkt. — Ist aber p die Masszahl einer Linie oder einer solchen proportional, und q der Masszahl einer Fläche oder dem Produkte zweier Linien-Masszahlen gleich oder proportional gewesen, so erhält man durch die Einheits-Aenderung

$$z^2\alpha^2 = px\alpha^2 + q\alpha^2,$$

welche Gleichung sich auf die gegebene sogleich reduciren lässt, so dass $z^2 = px + q$ unter der jetzigen Voraussetzung eine an sich homogene Gleichung ist.*)

*) Allgemein gefasst heisst in der Analysis jeder Ausdruck P, welcher die Buchstaben x, y, z, ... enthält, homogen in Bezug auf x, y, z, ..., sobald er sich, nachdem in demselben für x, y, z, ... überall αx, αy, αz, ... gesetzt worden ist, auf die Form $\alpha^n P$ bringen lässt; und zwar heisst er nach dem Exponenten n, homogen von der nten Dimension. Ferner nennt man eine Gleichung $P = Q$ homogen, wenn P und Q homogene Ausdrücke von derselben Dimension sind, und sich demnach dieselbe nach der eben erwähnten Substitution in $\alpha^n P = \alpha^n Q$ verwandelt, also in eine Gleichung, welche mit der ursprünglichen $P = Q$ zugleich identisch wird.

Demzufolge wird namentlich jede Gleichung zwischen Ausdrücken, welche aus Gliedern von einerlei Dimension bestehen, homogen sein. Letzteres ist z. B. mit der Gleichung $z^2 = px + q$ in Bezug auf die Linienmasszahlen der Fall, wenn der obigen Voraussetzung gemäss p proportional einer Linienmasszahl p', also etwa $p = mp'$ ist, und wenn q einer Flächenmasszahl gh proportional und etwa gleich ngh ist, wobei dann g und h die Masszahlen der Seiten eines der Fläche ghE gleichen Rechtecks vorstellen können. Da nämlich die Fläche z^2E einem Quadrate von der Seite zE_1 gleich ist, so erhält man, weil nunmehr z, p', g und h sich auf Linien-Einheiten bezo-

11. *Vom Ansatze der algebraischen Gleichungen, die zur Bestimmung von Grössenmassen dienen.* Das Princip bei dem Ansatze der fraglichen Gleichungen ist, dass man für den Werth von Masszahlen einer und derselben Grösse aus den gegebenen und den einstweilen durch Buchstaben vorgestellten gesuchten Masszahlen zwei oder mehrere ihrer Construction nach verschiedene Ausdrücke zu bilden sucht, und diese an Werth gleichen Ausdrücke zu Gleichungen mit einander verbindet — bei der Bildung dieser Ausdrücke übrigens keinen Unterschied zwischen dem, was gegeben und was gesucht ist, machend. Zuweilen ist es bequem, statt der gesuchten Masszahlen andere mit denselben in einfachem Zusammenhange stehende als Unbekannte einzuführen.

Eine grosse Anzahl Aufgaben geht darauf hinaus, aus dem Zusammenhange, in welchem gewisse gegebene Masszahlen a, b, c, d, etc. unter einander stehen, den Werth x zu bestimmen, welcher an die Stelle des a treten muss, wenn b, c, d, etc. resp. in b_1, c_1, d_1, etc. übergehen. — In diesem Falle entwickelt man den Werth, welchen a oder b annehmen muss, sobald die übrigen Masszahlen sich auf Eins reduciren, einmal, indem man a, b, c, d, etc. zum Grunde legt, ein zweites Mal, indem man x, b_1, c_1, d_1, etc. zum Grunde legt. Die beiden gefundenen Ausdrücke sind dann diejenigen, welche durch das $=$ Zeichen verbunden, die Gleichung des Ansatzes darstellen.

Beispiele. 1. Soll der Preis einer nach dem Gewichte verkäuflichen Waare von b_1 Pfd. bestimmt werden, wenn man weiss, dass der Preis von b Pfd. a Thlr. beträgt, so findet man, die Masszahl des zu bestimmenden Preises x nennend, aus a und b für den Preis der Gewichts-Einheit $\frac{a}{b}$ Thlr., aus x und b_1 ferner $\frac{x}{b_1}$ Thlr., und die Gleichung des Ansatzes ist daher $\frac{a}{b} = \frac{x}{b_1}$. (Regel de tri).

gen denken lassen, für diese Zahlausdrücke resp. αz, $\alpha p'$, αg, αh setzend, $\alpha^2 z^2 = \alpha^2 mp'x + \alpha^2 ngh$, in welcher Formel alle Glieder homogen von der zweiten Dimension sind. — Ferner gehört hierher die Gleichung $\frac{z}{1} = \log \frac{x}{1}$, welche in Bezug auf Linienmasszahlen homogen von der 0ten Dimension ist, da sie durch die Substitution von αz, αx, $\alpha.1$ für z, x, 1 sich auf $\alpha^0 z = \log(\alpha^0 x) = \alpha^0 \log x$ reducirt.

Es bedarf keiner Erörterung, dass die hier gegebene allgemeine Definition der Homogeneität allemal die Eigenschaft nach sich zieht, welche im Texte als Merkmal derselben angeführt worden ist.

2. Soll der ajährige Zinsbetrag eines Kapitals von b Thlrn. bestimmt werden, welches jährlich zu c Prozent verzinst wird: so hat man, diesen Zinsbetrag durch x Thlr. bezeichnend die Sätze: 1) dass 100 Thlr. in 1 Jahre c Thlr. und 2) b Thlr. in a Jahren x Thlr. einbringen. Aus 100, 1 und c findet man als Zinsbetrag für die Kapital- und Zins-Einheit (d. h. für 1 Thlr. in 1 Jahre) $\frac{c}{100}$ Thlr.; aus b, a und x zuerst den Zinsbetrag von b Thlrn. in 1 Jahre, $\frac{x}{a}$ Thlr. u. daraus denselben für 1 Thlr. in 1 Jahre, nämlich $\frac{x}{ab}$ Thlr. Der Ansatz wird sonach $\frac{c}{100} = \frac{x}{ab}$. (Einfache Zinsrechnung.)

3. Sollen sich 3 Gläubiger, A, B und C, welche resp. Forderungen von a, b, c Thlr. zu machen haben, in eine Masse von d Thlrn. theilen, und ist der Antheil eines jeden zu bestimmen: so nenne man x den Antheil, zu welchem die Forderung von 1 Thlr. berechtigen würde, und die beiden Sätze sind dann: 1) eine Forderung von $a+b+c$ Thlr. gibt Recht auf d Thlr. 2) eine Forderung von 1 Thlr. gibt Recht auf x Thlr. Der erste Satz gibt $\frac{d}{a+b+c}$ Thlr. als Antheil für 1 Thlr., der zweite Satz liefert dafür x Thlr., und der Ansatz ist folglich $x = \frac{d}{a+b+c}$. Es bekommen daher A, B und C resp. ax, bx und cx Thlr. d. h. $\frac{ad}{a+b+c}$, $\frac{bd}{a+b+c}$, $\frac{cd}{a+b+c}$ Thlr. (Gesellschafts-Rechnung.)

4. Haben 3 Kaufleute A, B, C zu einem Geschäft resp. a Thlr. seit α Monaten, b Thlr. seit β Monaten, c Thlr. seit γ Monaten geliefert, und will man ihren Antheil an einem Gewinne von d Thalern wissen: so kann man vereinfachend so verfahren.

Aus a, α, x (unter x den Gewinnantheil des A sich denkend) findet man zunächst als Gewinnantheil für a Thlr. in 1 Monat, $\frac{x}{\alpha}$ Thlr., also für 1 Thlr. in 1 Monat $\frac{x}{a\alpha}$ Thlr.; mithin erhält A so viel, als ob er $a\alpha$ Thlr seit einem Monat geliefert hätte. Aus demselben Grunde würde B so viel bekommen, als ob er $b\beta$ Thlr., C so viel, als ob er $c\gamma$ Thlr. seit 1 Monate vorgestreckt hätte, und die Aufgabe stimmt dann mit der vorigen völlig überein. Es bekommt folglich z. B. A vom Gewinne $\frac{a\alpha d}{a\alpha+b\beta+c\gamma}$ Thlr.

5. Soll bestimmt werden, in welchen Quantitäten zwei Weinsorten, deren Preis à Quart resp. a und b Thlr. ist, zu mischen seien, um c Quart, das Quart zu d Thlrn. zu erhalten, so lässt sich für den Preis der Mischung ein zweifacher Ausdruck finden. Einmal ist er nämlich cd Thlr., und dann ist er gleich der Summe der Preise der beiden zu mischenden Sorten. Stellt nun x die Quartzahl der ersten, also $c-x$ die Quartzahl der zweiten Sorte vor, so ist deren Preis resp. ax und $(c-x)b$ Thlr., und der Ansatz folglich $ax+(c-x)b = cd$. (Mischungs-Rechnung.)

Ein anderes Beispiel der Mischungsrechnung ist folgendes:

6. Soll die Menge Kupfer bestimmt werden, welche zu a Mark b löthigen Silbers gesetzt, c löthiges Silber gibt: so lässt sich die Silbermenge zweifach ausdrücken, einmal als Gehalt der a Mark des b löthigen Silbers, und zweitens als Gehalt des c löthigen Silbers. Im ersten Falle ist die Silbermenge ab Lothe, im zweiten Falle $c(a+x)$ Lothe, wenn x die Zahl der Marke des zugesetzten Kupfers vorstellt. Der Ansatz wird daher $ab = c(a+x)$.

7. Soll bestimmt werden, wann ein Bote A einen anderen B einholt, wenn dieser a Stunden früher ausgegangen ist und Anfangs schon einen Vorsprung von b Meilen hatte, und wenn man weiss, dass B auf c Meilen d Stunden, A auf γ Meilen δ Stunden verwendet: so nenne man x die gesuchte Zahl der Stunden, gerechnet vom Abgange des Boten A, und y die Zahl der Meilen, welche derselbe bis zum Zusammentreffen zurückzulegen hat.

Das, was sich zweifach ausdrücken lässt, ist alsdann hier die Zeit, welche A auf seinem Wege zu verwenden hat, nämlich 1) als Zeit, welche A zu seinen y Meilen verbraucht, und 2) als Zeit, welche B noch vom Momente der Abreise des A verbraucht. Da A auf eine Meile $\frac{\gamma}{\delta}$ Stunden verwendet, so bedarf er $\frac{\gamma}{\delta}y$ Stunden; da ferner B nur $y-b$ Meilen zu machen hat, und für jede Meile $\frac{c}{d}$ Stunden nöthig hat, so bedarf er $\frac{c}{d}(y-b)$ Stunden, und die Gleichung des Ansatzes ist daher $\frac{\gamma}{\delta}y = \frac{c}{d}(y-b)$. Hat man aus derselben das y gewonnen, so erhält man das x aus $x = \frac{\gamma}{\delta}y$.

8. Ist die Menge von Silber und Kupfer in einer Mischung zu bestimmen, die unter Wasser gewogen a Pfd. verliert, wenn man weiss, dass dieselbe in Luft gewogen b Pfd. wiegt, dass c Pfd. Silber unter Wasser gewogen — d Pfd. verlieren, und γ Pfd. Kupfer — δ Pfd.: so ist der Gewichtsverlust der Mischung dasjenige, was sich zweifach ausdrücken lässt, indem er einmal durch a Pfd. vorgestellt ist, und zweitens der Summe der Gewichtsverluste des Silbers und des Kupfers gleich kommt. Ist x Pfd. das Gewicht des Silbers, also $(b-x)$ Pfd. das des Kupfers, so hat man, weil 1 Pfd. Silber $\frac{d}{c}$ Pfd. verliert, als Gewichtsverlust des ganzen Silbers $\frac{d}{c}x$ Pfund, und als Gewichtsverlust der Kupfers, weil von diesem jedes Pfund $\frac{\delta}{\gamma}$ Pfd. verliert, $\frac{\delta}{\gamma}(b-x)$ Pfund. Die Gleichung ist daher $\frac{d}{c}x + \frac{\delta}{\gamma}(b-x) = a$.

9. Soll die Zeit bestimmt werden, in welcher 3 Arbeiter A, B, C mit einer Arbeit fertig werden, wenn man weiss, dass A und B a Tage, B und C b Tage, A und C c Tage darauf verwenden müssten; so ist dasjenige, was sich mehrfach ausdrücken lässt, der Betrag der täglichen Arbeit, der von A, B und C zugleich, von A und B zugleich, von B und C zugleich, und von A und C zugleich ausgeführt werden kann.

Verbrauchen nämlich A, B und C jeder für sich resp. x, y, z Tage, und alle zusammen u Tage, so vollenden A, B, C täglich resp. $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ der Arbeit, und alle drei $\frac{1}{u}$ derselben. Man hat also 1) für die Tagesarbeit von allen dreien $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{u}$; 2) für die Tagesarbeit von A und B, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$; 3) für die Tagesarbeit von B und C $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b}$; und 4) für die Tagesarbeit von A und C $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c}$. Diese vier Gleichungen liefern dann nach der Elimination von x, y, und z das gesuchte u.

12. *Vom Auflösen der Gleichungen zwischen Grössen.* Das in Nr. 3, 5, 6 erklärte Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren kommt nur bei der Bildung von Grössengleichungen behufs des Ansatzes von Gleichungen zur Sprache. Nach der Herstellung des Ansatzes beginnt das Rechnen nach den Regeln der Arithmetik, und zwar nicht mit den Grössen, sondern mit den Zahlenverbindungen, auf welche die Grössenverbindungen geführt haben. Schon beim Ansatze fallen alle Grösseneinheiten bis auf eine heraus (s. Nr. 7), indem die Masszahlen der übrigen Grössen in den Gleichungen nur Bestandtheile der Masszahlen jener einen Grösse bilden *). Das Fortführen dieser einen Einheit ist einerseits überflüssig, und verbietet sich andrerseits mehrentheils von selbst, da die Rechnungsoperationen, welche allein auf Grössen angewendet werden können, sich auf ein Hinzufügen, ein Vermindern, und auf ein Multipliciren und Dividiren durch absolute Zahlen beschränken **).

*) So kann z. B. die Gleichung im ersten Beispiele in Nro. 11 als Grössengleichung nur $\frac{a}{b}$ Thlr. $=\frac{x}{b_1}$ Thlr., nicht $\frac{a \text{ Thlr.}}{b \text{ Pfd.}}=\frac{x \text{ Thlr.}}{b_1 \text{ Pfd.}}$ geschrieben werden, und ebensowenig kann die daraus abgeleitete Gleichung $ab_1=bx$ in a Thlr. b_1 Pfund $=b$ Pfund . x Thlr. umgewandelt werden.

**) Das sogenannte Dividiren zweier gleichartigen Grössen, von welchem in Nro. 6 gesprochen worden, ist nämlich nicht ein Dividiren von Grössen, sondern ein Dividiren ihrer Masszahlen.

Zweiter Theil.

Die niedere Analysis.

Einleitung.

§. 150. *Vom unendlich Grossen.* Um zur Vorstellung des unendlich Grossen zu kommen, pflegen wir, von etwas schon sehr Grossem ausgehend, dasselbe fort und fort grösser und grösser zu denken, und alsdann, da keine Zeit ausreicht, hierbei auf eine Grenze zu gelangen, diesen Denkakt, ihn objektiv fassend, als ohne Ende fortgesetzt vorzustellen.

Sagen wir nun von einem Ausdrucke x, er sei unendlich gross, so meinen wir damit nicht eine ungeheuer grosse Zahl, auch nicht eine Alles übersteigende Zahl (weil eine solche nicht existirt), sondern wir wollen nur die Vorstellung von jenem Processe des unausgesetzten (von einer unbestimmt grossen absoluten Zahl aus beginnenden) Wachsens hervorrufen. Das unendlich Grosse, auch schlechthin das Unendliche genannt, ist demnach nicht ein ruhendes Sein, ein Gewordenes, sondern ein Werdendes.

Das übliche Zeichen für das schlechthin Unendliche ist ∞.

Die Summe $+x$ nennt man positiv unendlich, die Differenz $-x$ negativ unendlich, sobald x unendlich gross gedacht werden soll, und wendet dafür resp. die Zeichen $+\infty$ und $-\infty$ an.

Da in dem Unendlichen der Mangel einer Grenze des Quantitativen sich ausdrückt, so kann man sich auch des Ausdrucks bedienen, dass „zwischen $+\infty$ und $-\infty$ alle reelle Zahlen liegen."

Anmerkung. Da für $x > 1$, auch $x^2 > x$, $x^3 > x^2$, etc. ist, und auch bleibt, wenn x fortwährend ins Unbestimmte wachsend gedacht wird, d. h. wenn x unendlich wird, so kommt man

auf den Schluss, dass ein Unendliches grösser als ein anderes Unendliches sein könne. Ungereimt würde dies erscheinen, wenn man das Unendliche als ein Fertiges — als das, Alles an Grösse Uebertreffende — sich dächte. Es beruht aber das Unendliche nach dem Obigen auf der Vorstellung von einem nicht zu vollendenden Denkakte, und man hat unter der Redensart, dass das unendliche x^2 und x^3 grösser sei, als das unendliche x, nur zu verstehen, dass neben dem, in stetem Wachsen begriffenen x, das x^2 und x^3 als etwas gleichfalls fortwährend Wachsendes, aber dabei stets durch grössere Werthe Hindurchgehendes nebenher laufe. Wir hätten uns also hier nur bei diesen ungleich unendlich gross zu denkenden Ausdrücken das Wachsen ungleich rasch vor sich gehend und dabei überdies von verschieden hohen Ausgangspunkten gleichzeitig auslaufend vorzustellen.

§. 151. *Von dem unendlich Kleinen und dem Endlichen.* Wenn man in einem Quotienten $\frac{1}{x}$, den Divisor x unendlich gross, also ohne Ende wachsend denkt, so nimmt der Werth des Quotienten fortdauernd ab, und nähert sich beständig der Null, ohne diese je zu erreichen *). Jeden Ausdruck ε nun, der wie dieser Quotient für ein unendlich gross gedachtes x, in beständigem Abnehmen begriffen vorgestellt werden soll, so dass er nach und nach jede noch so klein gewählte bestimmte absolute Zahl an Kleinheit übertrifft, ohne in die Null selbst überzugehen — nennt man schlechthin unendlich klein. Es beruht also auch das unendlich Kleine auf der Vorstellung eines nicht zu vollendenden Denkakts.

Ist ε schlechthin unendlich klein, so nennt man $+\varepsilon$ positiv-, $-\varepsilon$ negativ-unendlich klein. Ferner nennt man einen Ausdruck von der Form $p+qi$ (wo i einen Werth von $((\sqrt{-1}))$ bezeichnet) imaginär unendlich klein, wenn q positiv- oder negativ-unendlich klein, und p gleich Null oder gleichfalls positiv- oder negativ unendlich klein ist.

*) Niemals ist $\frac{1}{\infty}$, wiewohl es hin und wieder behauptet wird, der Null wirklich gleich, sondern allemal etwas, wenn auch unendlich wenig, von Null Verschiedenes.

Ein Ausdruck heisst endlich 1) wenn sein Werth völlig bestimmt oder völlig bestimmbar ist, oder 2) wenn sich sein Werth von einem völlig bestimmten oder bestimmbaren von Null verschiedenen Werthe nur unendlich wenig unterscheidet — mag er übrigens reell oder imaginär sein. — Hat also z. B. a einen bestimmbaren Werth und ist ε unendlich klein, so würden wir $a+\varepsilon$ noch endlich nennen, so oft a von Null verschieden ist.

Anmerkung. Wenn ε unendlich klein genommen werden soll, so nehmen bei dem Processe des fortwährenden Abnehmens des ε die Werthe von ε^2, ε^3, etc. gleichzeitig ins Unbestimmte ab, nähern sich aber, weil sie während des Abnehmens stets kleiner bleiben als das ε, schneller der Null, als dieses. Wäre das unendlich Kleine etwas Ruhendes, das an Kleinheit Alles Uebersteigende, so könnte man mit Recht sagen, dass es widersinnig sei, ein Etwas, ein ε, unendlich klein zu nennen, da doch jedesmal noch etwas Kleineres, wie z. B. das ε^2, ε^3, etc., existire. Dass ein unendlich Kleines, A, kleiner ist, als ein anderes unendlich Kleines, ε, will aber nach dem oben aufgestellten Begriffe des unendlich Kleinen nur sagen, dass bei dem Abnehmen des ε, das A gleichfalls der Null ins Unbegrenzte sich nähert, und zwar dergestalt, dass, wenn man bei dem Akte des Kleiner-Denkens des ε irgendwo einmal inne hält, gleichzeitig dem A ein kleinerer Werth beigelegt werden muss, als der, den das ε gerade erreicht hat. Sonach hat es auch einen Sinn, wenn man z. B. sagt, ε^2 sei unendlich viel mal kleiner, als das unendlich kleine ε. *)

§. 152. *Von dem Range des unendlich Kleinen.* Sind a und b unendlich klein, so sagt man a und b seien von derselben Ordnung, wenn der Quotient $a:b$ einen endlichen Werth hat. Man sagt, es sei a unendlich klein von der ersten, zweiten, dritten, etc. nten Ordnung in Bezug auf b, wenn resp. $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b^2}$, $\frac{a}{b^3}$, etc., $\frac{a}{b^n}$

*) Setzt man $\varepsilon=\frac{1}{x}$, und denkt x unendlich gross, so hat man (wegen $\varepsilon=x\cdot\frac{1}{x^2}=x.\varepsilon^2$) $\varepsilon=\infty.\varepsilon^2$, und ist also berechtigt, das ε^2 unendlich viel mal kleiner als das ε zu nennen.

von endlichem Werthe ist. — Sonach ist also z. B. ε^n von der nten Ordnung in Bezug auf ε, weil $\frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^n}$ gleich Eins, also endlich ist.

Man bemerke hierüber folgende Sätze:

1. Ist a endlich und ε unendlich klein, so ist auch das Produkt $a\varepsilon$ unendlich klein und zwar von derselben Ordnung wie ε. Denn hätte $a\varepsilon$ einen endlichen Werth δ, so würde aus $a\varepsilon=\delta$ folgen, dass $\varepsilon=\frac{\delta}{a}$, also das unendlich kleine ε dem Quotienten zweier endlichen Ausdrücke d. h. etwas Endlichem gleich wäre. Es ist folglich $a\varepsilon$ mit ε zugleich unendlich klein, wie gross auch das a sein möge. Dass es aber von derselben Ordnung wie ε ist, folgt aus der vorstehenden Erklärung.

2. Sind a und b von derselben Ordnung wie ein unendlich kleines ε, oder ist a von gleicher Ordnung mit ε, und b von einer höheren Ordnung, so ist auch $a\pm b$ mit ε von einerlei Ordnung. Im ersten Falle ist nämlich der obigen Erklärung zufolge sowohl $\frac{a}{\varepsilon}$ als $\frac{b}{\varepsilon}$ von endlichem Werthe, mithin auch $\frac{a}{\varepsilon}\pm\frac{b}{\varepsilon}$ d. h. $\frac{a\pm b}{\varepsilon}$, und sonach $a\pm b$ mit ε von gleicher Ordnung. Im zweiten Falle ist $\frac{a}{\varepsilon}$ endlich, etwa gleich A, $\frac{b}{\varepsilon}$ aber unendlich klein, etwa gleich ε', folglich $\frac{a\pm b}{\varepsilon}=A\pm\varepsilon'$, d. h. dem §. 151. zufolge von endlichem Werthe. Bei obiger Beschaffenheit des a und b sind natürlich auch die Ausdrücke $a+bi$ und $b+ai$ unendlich klein und mit ε von einerlei Ordnung. Und wenn a reell und von der mten Ordnung in Bezug auf ein unendlich kleines ε ist, und b reell und von der $(m+n)$ten Ordnung, so sind $a+bi$ und $b+ai$ imaginär unendlich klein von der mten Ordnung.

3. Ist a unendlich klein und von der mten Ordnung in Bezug auf ε, und b von der nten Ordnung, so ist ab von der $(m+n)$ten Ordnung in Bezug auf dieses ε. — Aus der obigen Erklärung folgt nämlich, wenn $\frac{a}{\varepsilon^m}=A$, $\frac{b}{\varepsilon^n}=B$ gesetzt wird, dass A und B endlich seien. Man hat daher wegen $a=A\varepsilon^m$ und $b=B\varepsilon^n$, $ab=AB\varepsilon^{m+n}$, und es hat mithin der Quotient $\frac{ab}{\varepsilon^{m+n}}$ den endlichen Werth AB.

4. Sind a und b unendlich klein, und ist dabei a von der mten, b von der nten Ordnung in Bezug auf ε, so ist $a:b$ unendlich klein von der $(m-n)$ten Ordnung. Denn setzt man wiederum $a=A\varepsilon^m$, $b=B\varepsilon^n$, so hat man $\frac{a}{b}=\frac{A}{B}\varepsilon^{m-n}$, und es ist somit in der That $\frac{a}{b}:\varepsilon^{m-n}$ einem Ausdrucke $\frac{A}{B}$ gleich, der einen endlichen Werth hat.

§. 153. *Von den Nachbarwerthen einer reellen Zahl.* Man kann von keiner (reellen) Zahl sagen, dass sie ihrer Grösse nach unmittelbar auf eine andere gegebene reelle Zahl a folge, oder ihr unmittelbar vorhergehe; denn wie wenig sich eine (reelle) Zahl b auch von a unterscheiden möge, immer wird $b-a$ einer angebbaren (reellen) Zahl e, und daher dann b der Summe $a+e$ gleich sein, während $a+\frac{1}{2}e$, $a+\frac{1}{3}e$, $a+\frac{1}{4}e$, etc. z. B. eine unbegrenzte Menge angebbarer Zahlen sind, welche sämmtlich noch zwischen a und b liegen *). Das, was man Zahlenwerthe nennt, die sich unmittelbar an a anschliessen, und die wir „Nachbarwerthe von a“ nennen wollen, sind somit ebensowenig als (reelle) Zahlen aufzufassen, wie man das unendlich Kleine als eine (reelle) Zahl auffassen darf. Wir werden uns daher des Ausdrucks Nachbarwerth nur bedienen, um einen bestimmten nicht zu vollendenden Denkakt hervorzurufen, indem wir unter „nächstfolgendem Nachbarwerth“ die Summe $a+\varepsilon$, unter „nächst vorhergehendem Nachbarwerth“ die Differenz $a-\varepsilon$ verstehen, mit der Voraussetzung, dass ε unendlich klein sei; oder mit anderen Worten: wir wollen durch jenen Ausdruck die Vorstellung von einem ohne Aufhören näher und näher an a Heranrücken erwecken. — Das unendlich Kleine ist hiernach der Nachbarwerth von Null.

§. 154. *Vom Begriffe der Funktion.* Man sagt, ein Ausdruck A sei eine Funktion eines anderen Ausdruckes x, wenn der Werth

*) Ebenso verhält es sich z. B. in der Geometrie in Bezug auf die Punkte einer Linie. Es gibt in einer Linie keine zwei unmittelbar auf einander folgende Punkte, weil zwischen jeden zwei einander noch so nahen Punkten immer noch unbegrenzt viele andere Punkte sich denken lassen.

von A von dem Werthe von x abhängt (d. h. wenn der Werth von A im allgemeinen ein anderer wird, sobald dem x ein anderer Werth beigelegt wird), und diese Abhängigkeit von dem x hervorgehoben werden soll.

Demnach hat man jeden irgend wie zusammengesetzten Ausdruck, der den Buchstaben x enthält, eine Funktion von x zu nennen, wenn man darauf hindeuten will, dass sein Werth sich mit dem von x zugleich ändere. Es wird ferner ein Ausdruck, der die Buchstaben x, y, z enthält, wie z. B. der Ausdruck $ax\sqrt{(y-2)}z^2$, eine Funktion von x, von y oder von z heissen, jenachdem man hervorheben will, dass sein Werth mit dem von x, oder mit dem von y, oder mit dem von z sich zugleich ändere.

Man sagt von einer Funktion von x, sie sei in Bezug auf x abhängig veränderlich, und nennt dann x den unabhängig Veränderlichen. Man sagt endlich, ein Ausdruck sei in Bezug auf x unveränderlich oder constant, wenn sein Werth mit dem Werthe von x gar nicht zusammenhängt.

§. 155. *Von der Continuität oder Stetigkeit.* 1. Ein Ausdruck x solle sich stetig (oder continuirlich) von einem reellen Werthe a bis zu einem anderen reellen Werthe b ändern, heisst: man solle sich vorstellen, dass x in ununterbrochener Grössenfolge allmälig alle reelle Werthe, die zwischen a und b gedacht werden können, durchlaufe. — Man nennt diese Aenderung ein stetiges Wachsen oder ein stetiges Abnehmen, je nachdem $b > a$ oder $b < a$ ist *).

*) Am besten vergleicht man ein solches stetiges Aendern mit der durch Bewegung eines Punktes vollbracht gedachten Erzeugung einer Linie. Es ist die Linie keine Aneinanderreihung von Punkten, weil etwas Ausgedehntes nicht aus Unausgedehntem zusammengesetzt werden kann. Ebenso ist das bei der Aenderung von x durchflossene Intervall keine Aneinanderreihung von Zahlenwerthen, da eine Lücke zwischen Zahlen, wie nahe dieselben auch einander stehen, durch Zahlen nicht vollständig ausgefüllt werden kann. Wie die Punkte etwas in die erzeugte Linie erst hinein Gedachtes sind, um die eine oder die andere Stelle derselben besonders betrachten zu können, so sind in dem durchlaufenen Zahlenintervalle die (diskreten) Zahlen etwas erst bei oder nach dem Akte des Aenderns an beliebigen Stellen hineingedachte Durchgangspunkte, die man besonders zu betrachten Veranlassung findet.

2. Stellt A eine Funktion von x, und α einen bestimmten Werth von x vor; sind ferner $\alpha+\varepsilon$ und $\alpha-\varepsilon$ die Nachbarwerthe von α, und bezeichnet man die Werthe, welche A annimmt, wenn $x=\alpha$, $=\alpha+\varepsilon$, $=\alpha-\varepsilon$ gesetzt wird, beziehungsweise durch A_α, $A_{\alpha+\varepsilon}$, $A_{\alpha-\varepsilon}$: so sagt man, es sei A „bei $x=\alpha$ continuirlich", sobald $A_{\alpha+\varepsilon}$ und $A_{\alpha-\varepsilon}$ Nachbarwerthe von A_α sind, d. h. sobald $A_{\alpha+\varepsilon}-A_\alpha$ und $A_{\alpha-\varepsilon}-A_\alpha$ unendlich klein sind.

3. Eine Funktion von x heisst „zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=b$ continuirlich" (a und b als reell gedacht), sobald sie bei allen reellen Werthen von x, die zwischen a und b sich denken lassen, continuirlich ist. Wird daher x von a bis b stetig geändert, so wird sich in diesem Falle dadurch auch die Funktion nur stetig ändern können, nach den Umständen aber entweder stets continuirlich wachsen, oder stets continuirlich abnehmen, oder abwechselnd stetig wachsen und abnehmen.

Beispiele. 1. Die Funktion $7x$ ist continuirlich zwischen den Grenzen $x=-\infty$ und $x=+\infty$. — Man sieht nämlich, dass für $x=-\infty$ auch $7x=-\infty$, für $x=+\infty$ auch $7x=+\infty$ wird; ferner dass, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, auch $7x$ fortwährend grösser wird. Wäre nun dieses Grösserwerden des $7x$ kein continuirliches Wachsen, sondern ein sprungweises Grösserwerden, so müsste irgend ein Werth m zwischen $-\infty$ und $+\infty$ existiren, welchen $7x$ anzunehmen unfähig wäre. Wie gross aber auch m sein möge, immer lässt sich aus der Gleichung $7x=m$ die Folgerung ziehen, dass $7x$ in der That den Werth m annimmt, sobald x bis auf $\frac{1}{7}m$ gewachsen ist. Obgleich also $7x$ schneller als x wächst, so wird doch von dem $7x$ ebensowenig, wie von dem x während des Wachsens irgend ein reeller Werth übergangen.

2. Ist $A=x^2-2x$, so hat man, $x=\alpha$ setzend, $A_\alpha=\alpha^2-2\alpha$, und daher

$$A_{\alpha+\varepsilon}=(\alpha+\varepsilon)^2-2(\alpha+\varepsilon)=\alpha^2-2\alpha+2(\alpha-1)\varepsilon+\varepsilon^2,$$
$$A_{\alpha-\varepsilon}=(\alpha-\varepsilon)^2-2(\alpha-\varepsilon)=\alpha^2-2\alpha-2(\alpha-1)\varepsilon+\varepsilon^2,$$

folglich

$$A_{\alpha+\varepsilon}-A_\alpha=2(\alpha-1)\varepsilon+\varepsilon^2,$$
$$A_{\alpha-\varepsilon}-A_\alpha=-2(\alpha-1)\varepsilon+\varepsilon^2.$$

Da nun für jeden reellen Werth von α, $2(\alpha-1)$ und $-2(\alpha-1)$ endlich sind, so ist nach §. 152, 1, weil ε unendlich klein ist, $2(\alpha-1)\varepsilon$ und $-2(\alpha-1)\varepsilon$, und mithin auch $A_{\alpha+\varepsilon}-A_\alpha$ und $A_{\alpha-\varepsilon}-A_\alpha$ unendlich klein, d. h. es ist A für jeden reellen Werth von x, also zwischen den Grenzen $x=-\infty$ und $x=+\infty$, continuirlich *).

§. 156. *Erweiterung des Begriffes der Continuität.* Ist die Funktion A für $x=\alpha$ imaginär und von der Form $p+qi$, so nennt man noch A bei $x=\alpha$ continuirlich, sobald $A_{\alpha+\varepsilon}-A_\alpha$ und $A_{\alpha-\varepsilon}-A_\alpha$ imaginär unendlich klein sind **).

§. 157. *Zusatz.* Es versteht sich von selbst, dass ein Ausdruck A bei $x=\alpha$ discontinuirlich ist, sobald A_α^x gar keinen Werth hat (d. h. werthlos ist).

So ist z. B. $\frac{1}{x}$ discontinuirlich bei $x=0$. Für die Nachbarwerthe von Null, d. h. für $x=\varepsilon$ und $x=-\varepsilon$, ist $\frac{1}{x}$ resp. gleich $\frac{1}{\varepsilon}$ und gleich $-\frac{1}{\varepsilon}$ also $+\infty$ und $-\infty$, so dass hier bei $x=0$ der grösst denkbare

*) Eine nähere Untersuchung zeigt, dass hier A stetig von $+\infty$ bis -2 abnimmt, wenn x von $-\infty$ bis $+1$ wächst, alsdann aber dauernd von -2 bis zu $+\infty$ wiederum wächst, wenn x weiter von $+1$ bis $+\infty$ zunimmt.

**) Will man eine Anschauung haben von den Werthen, welche eine Funktion A durchläuft, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ sich stetig ändert, so denke man, falls A immer reell bleibt, das x als Abscissenwerth, und construire über jedes x den zugehörigen Werth von A als Ordinate. Die dadurch bestimmten Punkte liegen in einer Curve, welche durch ihre Entfernung von der Abscissenaxe die verschiedenen auf einander folgenden Werthe von A andeutet. Ist dagegen A für reelle Werthe von x imaginärer Werthe fähig, so construire man eine Curve im Raume, deren Abscissen dem x entsprechen, und bestimme die zu dem jedesmaligen x gehörenden Ordinaten y und z dadurch, dass man A auf die Form $p+qi$ bringt, und für y den zum x gehörigen Werth von p, für z den zum x gehörigen Werth von q nimmt. Die Curventheile, welche zu den reellen Werthen von A gehören, werden dann, weil für sie $q=0$ ist, in der Ebene der xy liegen. Jede Unterbrechung der Continuität in A wird sich dabei als Unterbrechung jener Curve darstellen.

Sprung (vom negativ Unendlichen zum positiv Unendlichen) statt findet.

§. 158. *Vom Begriffe der Grenze.* Stellt A eine Funktion von x vor, und k einen von x unabhängigen (d. h. in Bezug auf x constanten) Ausdruck vor, dessen Werth sich von demjenigen, welchen A für ein unendlich kleines x annimmt, nur um etwas unendlich Kleines unterscheidet, so sagt man k sei die Grenze von A für ein unendlich kleines x. Wenn also ε etwas unendlich Kleines vorstellt und A_ε den Werth von A für $x = \varepsilon$ ausdrückt, so ist A_ε ein Nachbarwerth von k *).

Die gewöhnliche Bezeichnungsweise für jene Grenze ist $\lim. A$, oder wenn man ausdrücken will, dass sich dieselbe auf ein unendlich klein werdendes x bezieht, $(\lim. A)_{x=0}$.

Beispiele. 1. Ist $A = mx^2 - n$, so ist $\lim. (mx^2 - n)_{x=0} = -n$, weil die Differenz von $-n$ und von $mx^2 - n$, mx^2 ist, also mit x zugleich unendlich klein wird (s. §. 152, 1).

2. Es ist $\left(\lim. 8^{-\frac{1}{x}}\right)_{x=0} = 0$; denn es ist $8^{-\frac{1}{x}} = 1 : 8^{\frac{1}{x}}$, und hat also, da für $x = \varepsilon$, $\frac{1}{x}$ und mithin auch $8^{\frac{1}{x}}$ unendlich gross, folglich $1 : 8^{\frac{1}{x}}$ unendlich klein wird, in der That die Null zur Grenze.

Zusatz. Die Grenze eines eindeutigen Ausdruckes ist allemal eindeutig. Denn ist A eindeutig und wären k und k' zwei von einander verschiedene Werthe, welche gleich $\lim. A$ wären, so müsste, wenn $k - A_\varepsilon = m$, $k' - A_\varepsilon = m'$ gesetzt wird, der Erklärung zufolge sowohl m als m' unendlich klein sein, und man erhielte durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen $k - k' = m - m'$, d. h. man erhielte für $k - k'$, welches als Differenz endlicher Aus-

*) Gewöhnlich drückt man sich so aus: Es ist k die Grenze von A, wenn A sich für ein unendlich klein werdendes x ohne Aufhören dem Werthe von k nähert, ohne je damit zusammenzufallen, und dergestalt, dass die Differenz $k - A$ kleiner wird als jede noch so kleine gegebene Zahl.

drücke endlich ist, den unendlich kleinen Werth $m-m'$, — was offenbar ein Widerspruch wäre.

§. 159. *Lehrsatz.* Ist A bei $x=0$ continuirlich, so erhält man die Grenze von A, wenn man in A für x den Werth Null setzt, d. h. es ist $(\lim. A)_{x=0} = A_0$.

Ist nämlich A bei $x=0$ continuirlich, so ist A_ε ein Nachbarwerth von A_0, welchen seiner Werthe A_ε für den Fall einer Mehrdeutigkeit das A auch vorstellen mag; mithin ist jederzeit $A_0 - A_\varepsilon$ unendlich klein, und folglich, da A_0 endlich ist, nach dem vorigen §. und in Rücksicht auf den vorstehenden Zusatz $A_0 = (\lim. A)_{x=0}$.

Wendet man den Lehrsatz auf das erste Beispiel des vorigen §. an, so erhält man $\lim(mx^2-n) = m.0-n = -n$. Auf das zweite Beispiel ist dagegen diese Bestimmungsweise nicht anwendbar, weil $8^{-\frac{1}{x}}$ bei $x=0$ discontinuirlich ist, da $8^{-\frac{1}{0}}$ gar keinen Werth hat.

Anmerkung. Gewöhnlich behauptet man, die Grenze von $\frac{1}{x}$ sei das Unendliche, obgleich der Werth dieses Quotienten für ein unendlich kleines x sich nicht dem Unendlichen erst nähert (wie dies der Erklärung zufolge sein sollte), sondern das Unendliche schon selber ist. Gestattete man aber auch, von der Grenze des Unendlichen zu sprechen, und das Unendliche selber als solche anzusehen, so ist man durchaus noch nicht zu dem Schlusse berechtigt, den Quotienten $1:0$ für die Grenze von $1:x$ zu erklären, wenn man sich nicht, wie es unser Lehrsatz fordert, vorher versichert hat, dass $1:x$ bei $x=0$ continuirlich ist. Der Grund des noch jetzt so verbreiteten Irrthums, $1:0$ mit dem Unendlichen für identisch zu halten, ist offenbar 1) dass man von der unbegründeten Ansicht ausging, es müsse all und jeder analytische Ausdruck, und namentlich also auch $1:0$, wirklich etwas vorstellen, und 2) dass man, gleichfalls ohne weitere Begründung stillschweigend die Voraussetzung machte, es könne bei so einfachen Ausdrücken, wie der Quotient $\frac{1}{x}$ ist, keine Discontinuität eintreten, es müsse also der Werth von $1:0$ etwas sich an das Unendliche zunächst Anschliessendes sein, und da man über das Unendliche

nicht hinausgehen konnte, so glaubte man das Unendliche selber dafür nehmen zu müssen.

Dass die Continuität bei $x=0$ fehlt, hätte man schon aus dem ungeheuren Sprunge schliessen können, den $1:x$ von $-\infty$ zu $+\infty$ macht, wenn man von $x=-\varepsilon$ zu $x=+\varepsilon$ übergeht. Um diesen Sprung zu verdecken, sah man sich genöthigt, der Form $1:0$ zwei Werthe zuzuschreiben, den Werth $+\infty$ und den Werth $-\infty$. Dies führte aber zu neuen Inconsequenzen, indem man willkürlich da, wo das $-\infty$ nicht passen wollte, $1:0$ wieder eindeutig als $+\infty$ auffasste.

Da aber $1:0$ eine Quotientenform ist, auf welche keine Rechnungsregel mehr passt (s. §. 36), so konnte es nicht ausbleiben, dass die Verwechselung von $1:0$ mit dem Unendlichen, namentlich in den Anwendungen der höheren Mathematik, zu vielen falschen Resultaten und Widersprüchen führte *).

*) Es ist allerdings wahr, dass man sehr oft trotz dieser Verwechselung mittels der Gleichung $1:0=\infty$ auf richtige Resultate gekommen ist, aber nur da, wo man den Fehler dadurch wieder gut machte, dass man bei der Ausleguug des Resultats wiederum umgekehrt das Unendliche mit dem „Nicht vorhanden Sein“ vertauschte, also $1:0$, obwohl man es nicht offen aussprach, in solchen Fällen richtig auslegte.

Fand man z. B. für die Entfernung des Durchschnittspunktes zweier geraden Linien von einer dritten (etwa von der Ordinatenaxe) einen Ausdruck, der die Form $1:0$ annahm, so sagte man, die Linien schnitten sich im Unendlichen, und erläuterte dies (weil dies an sich etwas vollkommen Unverständliches ist) dahin, dass die Linien parallel seien, d. h. also, dass es gar keinen Durchschnittspunkt gäbe. Zu diesem Schlusse hätte man direkter kommen können, wenn man gesagt hätte, das werthlose Resultat $1:0$ beweise, dass ein Resultat nicht existire, und folglich auch ein Durchschnittspunkt gar nicht vorhanden sei. — Nehmen wir z. B. an, der Ausdruck für die gedachte Entfernung wäre allgemein gefasst, $\frac{1}{x-a}$ gewesen, unter a eine gegebene absolute Zahl verstanden, so erkennt man, wenn man sich x der Zahl a als Grenze ohne Ende sich nähernd vorstellt, dass (weil dann der Werth jenes Quotienten unendlich gross wird) der Durchschnittspunkt in immer weitere und weitere Fernen rückt, und die Linien sich ohne Ende dem Parallelismus nähern. Man hat es dann in der That mit einem unend-

Eben so verhält es sich mit der gewöhnlichen Behauptung, es sei $\log 0 = -\infty$. Man schloss nämlich aus der richtigen Gleichung

lich entfernten (d. h. ohne Ende weiter hinausrückenden) Durchschnittspunkte zu thun; sobald aber x mit a selbst zusammenfällt, der Quotient also in die Form $1:0$ übergeht, ist es mit dem Werthe des Quotienten, wie mit der Existenz des Durchschnittspunktes am Ende.

In der That wird man bei der Verwechselung der Form $1:0$ mit dem Unendlichen in den meisten Fällen etwas Richtiges erhalten, wenn diese Form nicht eher erscheint, als im Endresultate, und dann wie im angeführten Beispiele, das Unendliche für ein „Nichtvorhandensein" des fraglichen Dinges erklärt wird. Wo dagegen inmitten einer Rechnung die Verwechselung vorkommt, darf man sich nicht leicht eines richtigen Endresultats versehen.

Für diejenigen, welche sich schon mit analytischer Geometrie beschäftigt haben, führen wir noch folgendes Beispiel an, um das Gezwungene in den Auslegungen werthloser Endresultate zu zeigen.

Bei der Entwickelung der Gleichung für eine Gerade, welche durch zwei Punkte geht, deren Coordinaten x_1, y_1, und x_2, y_2 sind, kommt man auf die Gleichung

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Ist nun in einem besonderen Falle $x_1 = x_2$, so geht diese Gleichung für jedes von x_1 verschiedene x, bei der Vorstellung, es sei $1:0 = \infty$, über in $y = \infty . x + \infty$, d. h. in $y = \infty$. Nun weiss man aber, dass, wenn $x_1 = x_2$ ist, die Linie senkrecht auf der Abscissenaxe steht, dass daher keiner von x_1 verschiedenen Abscisse ein Punkt der Linie entspricht, und musste mithin sagen, um die Gleichung $y = \infty$ zu rechtfertigen, dass ein Punkt, dessen Ordinate unendlich ist, gar kein Punkt sei. Mit demselben Recht könnte man aber auch schliessen, dass alles Imaginäre unendlich sei; denn für wie viele Ordinaten an Stellen, wo kein Curvenpunkt sich befindet, ergibt sich nicht ein imaginäres Resultat?

Die wahre Ursache des Umstandes, dass sich im vorliegenden Beispiele y in werthloser Form ergab, war die, dass man den Fehler machte, bei der Rechnung von der gesuchten Gleichung vorauszusetzen, sie habe die Form $y = mx + n$, während diese Form doch nur auf die mit der Ordinatenaxe nicht parallelen Linien passt. In einer Gleichung nämlich, welche eine mit der Ordinatenaxe parallele Linie vorstellen soll, muss der Coefficient von y den Werth Null haben, während er in der vorausgesetzten Form den Werth 1 hat. Legt man aber statt der beschränkt gültigen Form der Liniengleichung $y = mx + n$ die allge-

$\log \varepsilon = -\infty$, dass $(\lim.\log x)_{x=0} = -\infty$ und folglich auch $\log 0 = -\infty$ sei; und hat somit wiederum ohne vorhergegangene Prüfung angenommen, es sei $\log x$ bei $x=0$ continuirlich, und das Unendliche für die Grenze des Unendlichen erklärt. Man könnte eben so gut sagen, die Null sei das unendlich Kleine selber, weil Null die Grenze des unendlich Kleinen ist, und so in die wunderlichen *Eu-*

mein gültige Form $ay+bx+c=0$ zum Grunde, und vermeidet die Divisionen durch Ausdrücke, welche der Null gleich zu werden fähig sind, so kommt man auf die vollkommen brauchbare und der Wirklichkeit entsprechende Gleichung $a=0$. — Ueberall, wo ein Resultat werthlos wird, vertragen sich entweder die der Aufgabe zum Grunde gelegten Bedingungen nicht (wie in dem ersten Beispiele), oder man hat während der Rechnung unrichtige Voraussetzungen gemacht (wie im zweiten Beispiele).

Wie selbst unsere ersten Mathematiker, in Folge jener Ansicht über den Sinn von $1:0$, durch die unbeschränkte Anwendung der Gleichung $\lim A = A_0$ auf Widersprüche geführt werden konnten, zeigt z. B. die Stelle auf pag. 2 in *Cauchy's leçons sur le calcul infinitesimal*, wo zuerst

$$\lim (1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$$

gefunden, und darauf aus der (für $x=0$ jedoch unrichtigen) Gleichung

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2 + \frac{1-x}{1.2} + \frac{(1-x)(1-2x)}{1.\ 2.\ 3} + \frac{(1-x)(1-2x)(1-3x)}{1.2.3.4} + \text{.. in inf.}$$

(welche der binomische Lehrsatz liefert) geschlossen wird, dass

$$\lim(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots \text{ in inf.},$$

d. h. einer zwischen 2 und 3 liegenden Zahl, die wir in der Folge unter der Bezeichnung e häufig gebrauchen werden, gleich sei. In der That ist $\lim (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ eine richtige Gleichung; das Irrige liegt aber darin, dass Cauchy zugleich 1^{∞} als Grenze annimmt, wie daraus hervorgeht, dass er die Form 1^{∞} nur deswegen fallen lässt, weil, wie er sich ausdrückt, diese Potenz einen unbestimmten Werth habe (d. h. unendlich vieler Werthe fähig sei). Es sind indess die Potenzen von Eins (wie wir später sehen werden) zwar unendlich vieler i m a g i n ä r e r Werthe fähig, sie können aber nie mehr als z w e i r e e l l e Werthe (nämlich die Werthe $+1$ und -1) haben, auch wenn man sich den Exponenten ohne Aufhören wachsend denkt. Es kann also nie 1^{∞}, auch nur annäherungsweise der Zahl e gleich sein.

*ler*schen Verstrickungen gerathen. Wir wissen aber überdies aus §. 86, dass log0 gar keinen Werth hat, weil die Annahme eines Werthes für diese Form den sonstigen Annahmen der Analysis widerstreitet, und es kann daher auch von einer Continuität gar nicht die Rede sein *).

§. 160. *Von den sogenannten wahren Werthen unbestimmter Ausdrücke.* Ist A eine Funktion von x, so kann man dieselbe stets so umformen, dass sie für jeden beliebig gegebenen Werth von x ihre Anwendbarkeit verliert. Man darf zu dem Ende nämlich nur bei der Umformung eine Operation anwenden, welche für jenen Werth von x unstatthaft ist.

Ist z. B. a ein Werth von x, der ausgeschlossen werden soll, so kann man A umformen in

$$(1^*)\quad \frac{A}{x-a}(x-a) \quad \text{oder} \quad (2^*)\quad \frac{A}{(x-a)^n}(x-a)^n,$$

welche Formen in der That für $x=a$ ihren Sinn verlieren, weil bei der Umformung eine Division in Anwendung gekommen, und solche nur so lange statthaft ist, als der Divisor sich von Null unterscheidet.

Die Ausdrücke (1*) und (2*) sind daher weniger allgemein als

*) Wenn man in der Geometrie, auf die Gleichungen $\tang 90^\circ = \frac{1}{0}$, $\tang 270^\circ = -\frac{1}{0}$ kommend, behauptete, es sei $\tang 90^\circ = \infty$, $\tang 270^\circ = -\infty$, statt zu behaupten, dass Winkel von 90° und 270° keine Tangenten haben (nur die Tangenten von Winkeln, die sich unendlich wenig von 90° und 270° unterscheiden, sind resp. $+\infty$ und $-\infty$), und daraus umgekehrt schloss, dass, wo man $\tang x = \frac{1}{0}$ und $\tang x = -\frac{1}{0}$ finde, resp. $x = 90^\circ$ und $x = 270^\circ$ sein müsse, während sich daraus nur schliessen liess, dass eine Tangente von x nicht existire, und dass also entweder der Winkel ein solcher sein müsse, der keine Tangente habe (d. h. ein Winkel von 90° oder 270°), oder dass ein Winkel von der geforderten Eigenschaft überhaupt nicht da sei: so kam man d e s w e g e n durch den Schluss auf keine Unrichtigkeiten, weil $\tang x$ nicht in die Form $\frac{1}{0}$ oder $-\frac{1}{0}$ übergehen kann, ohne dass zugleich $\cot x$ die Form $\frac{0}{1}$ oder 0 annimmt, mithin nothwendig $\tang x = \frac{1}{0}$ zum Schlusse berechtigt, dass $x = 90^\circ$ oder $x = 270^\circ$ ist. Wo man aber auf $\tang x = \log 0$ kommt, würde man jedesmal einen wirklichen Fehler begehen, wenn man $x = 270^\circ$ annehmen wollte.

der Ausdruck A, insofern sie in einem besonderen Falle (für $x=a$), in welchem A noch angewendet werden kann, unbrauchbar werden.

Diejenigen, welche die Form $1:0$ als etwas, das Unendliche Repräsentirendes betrachten, schreiben zunächst für jene Ausdrücke, wenn $x=a$ wird, unbedenklich $\infty.0$, und erklären dies Produkt $\infty.0$ für einen Ausdruck von unbestimmtem Werthe, d. h. für einen Ausdruck, der im Allgemeinen unendlich viele verschiedene Werthe haben kann, in jedem besonderen Falle aber einen bestimmten Werth hat — und nennen diesen bestimmten Werth dann den diesem Falle entsprechenden wahren Werth von $\infty.0$. — Mit diesem wahren Werthe ist dann natürlich im obigen Beispiele unser A gemeint.

Offenbar richtiger und weniger paradox erscheinend ist es, sich wie folgt auszudrücken.

Nimmt irgend ein Resultat in einem besonderen Falle eine werthlose Form an, so ist bei der Gewinnung desselben eine Operation vorgenommen, die unter den Bedingungen, welche die werthlose Form herbeiführen, unerlaubt war. Führt man die Rechnung so, dass jene Operation vermieden wird, so kommt man entweder auf ein unter jenen Bedingungen noch brauchbares Resultat (und dies fällt mit dem zusammen, was man den wahren Werth zu nennen pflegt), oder die gewonnenen Gleichungen zeigen einen Widerspruch unter den Annahmen, so dass unter jenen Bedingungen gar kein Resultat existirt — ein Fall, bei dem man mit den gewöhnlichen Ansichten häufig auf etwas Unrichtiges kommt.

Beispiel. Hat man für das Mass z einer gesuchten Grösse

$$(\alpha) \qquad z=\frac{x^3-ax^2+2x-2a}{ax^2+(b-a^2)x-ab},$$

gefunden, also einen Ausdruck, welcher für $x=a$ die unbrauchbare Form $0:0$ annimmt; so bemerke man, dass man vor der Division (welche für $x=a$ nicht eintreten durfte) die Gleichung

$$(\beta) \qquad [ax^2+(b-a^2)x-ab]z = x^3-ax^2+2x-2a$$

gehabt haben musste. Setzt man in dieser, nunmehr völlig unanstössigen Gleichung für $ax^2+(b-a^2)x-ab$ das gleichbedeutende Produkt $(x-a)(ax+b)$, so sieht man, dass dieselbe mit dem Faktor von z nicht dividirt werden durfte, sobald man für x auch diejenigen Werthe sollte annehmen dürfen, welche $x-a=0$ oder $ax+b=0$

machen; und man musste daher auf ein befremdliches Resultat gefasst sein, wenn man das Resultat nach der Division dennoch auf jene Fälle anwendete.

Schreibt man aber, da $x^3-ax^2+2x-2a=(x-a)(x^2+2)$ ist, die Gl. (β) so: $(x-a)(ax+b)z=(x-a)(x^2+2)$, und leitet daraus die Gleichung

$$(x-a)\ [(ax+b)z-(x^2+2)]=0$$

her, so sieht man, dass die Bedingung, welche der Werth von z erfüllen soll (nämlich diese Gleichung zu einer richtigen zu machen), erfüllt ist, wenn der zweite Faktor des vorstehenden Produkts gleich Null wird, mag $x-a=0$ sein oder nicht, und der Werth von z bestimmt sich demnach aus der Gleichung $(ax+b)z-(x^2+2)=0$, oder was dasselbe ist, aus der Gleichung

$$(\gamma)\qquad (ax+b)z=x^2+2.$$

Schliesst man nun denjenigen Werth von x aus, welcher $ax+b=0$ macht, so erhält man nach der dann erlaubten Division durch $ax+b$

$$(\delta)\qquad z=\frac{x^2+2}{ax+b},$$

mithin für $x=a$ $\qquad z=\frac{a^2+2}{a^2+b}.$

In der gewöhnlichen Sprachweise sagt man nun, indem man sich an die Gl.(α) hält, der Werth von z für $x=a$ sei $0:0$, und der wahre Werth von $0:0$ in diesem Falle $\frac{a^2+2}{a^2+b}$.

Was den ausgeschlossenen Fall betrifft, der sich auf $ax+b=0$ bezieht, so wird man vor der, dann unerlaubten, Division, sogleich in die Gl.(γ) den Werth von x, welcher $ax+b=0$ macht, d. h. den Werth $-\frac{b}{a}$ einführen, und dieselbe demnach schreiben:

$$0.z=\frac{b^2}{a^2}+2, \text{ d. h. } 0=\frac{b^2}{a^2}+2,$$

woraus ersichtlich ist, dass diese Gleichung nicht bestehen und es also keinen entsprechenden Werth für z geben kann, wenn nicht zufällig $b=\surd(-2a^2)$ ist, dass in diesem Falle aber die Gleichung jederzeit, für jeden Werth von z richtig wird. (Bei der gewöhnlichen, von uns zurückgewiesenen Auffassungsweise würde man, die Gl.(α) wiederum benutzend, auf $z=1:0=\infty$ gekommen

sein und behaupten, ein unendlich grosser Werth von z genüge der Frage!).

Aus dem vorstehenden Beispiele lässt sich folgende Regel für die Auffindung der sogenannten wahren Werthe der vermeintlich unbestimmten Ausdrücke abstrahiren:

Erscheint ein Ausdruck z unter einer Form, welche für einen besonderen Werth von x (wir wollen ihn a nennen) in $0:0$ übergeht, und rührt dies daher, dass Divisor und Dividend einen gemeinsamen Faktor haben, der für diesen Werth von x verschwindet, lässt sich also z so schreiben

$$z = \frac{mp}{np},$$

wo p ein für $x=a$ in Null übergehender Ausdruck ist: so lasse man diesen gemeinsamen Faktor aus Divisor und Dividenden fort; das übrigbleibende $\frac{m}{n}$ ist dann der sogenannte wahre Werth *).

Die Form $\infty.0$, von der vorher gesprochen wurde, lässt sich leicht auf die gegenwärtige Form zurückführen, indem sich die Ausdrücke (1*) und (2*) so schreiben lassen

$$\frac{A(x-a)}{x-a}, \quad \frac{A(x-a)^n}{(x-a)^n},$$

und dann für $x=a$ in $0:0$ übergehen.

Schliesslich möge hier noch eine allgemeine Anweisung zur Auffindung der wahren Werthe, wie man sie gewöhnlich gibt, mitgetheilt werden, um das Fehlerhafte derselben zu zeigen.

Man sagt: Findet sich, dass ein Ausdruck z für $x=a$ eine der unbestimmten Formen $0:0$, $0.\infty$ (d. h. $0.\frac{1}{0}$), $\infty:\infty$ (d. h. $\frac{1}{0}:\frac{1}{0}$), etc. annimmt, so nehme man als wahren Werth desselben die Grenze von z für ein unendlich klein werdendes $x-a$, da sich der Fall, wo $x-a$ unendlich klein ist, nur unendlich wenig von dem, wo $x=a$ ist, unterscheidet.

Man benutzt also die Gleichung $(\lim A)_{x=a}=A_a$, des §. 159, von der wir gesehen haben, dass sie nur dann etwas Richtiges liefert, wenn A bei $x=a$ continuirlich ist.

*) Mit Hülfe der Differenzialrechnung lässt sich dieser Werth $m:n$ bestimmen, ohne dass man den gemeinsamen Faktor, welcher übrigens oft schwer direkt zu finden ist, aufzusuchen nöthig hat.

Beispiel. Da $\frac{\sin x}{x}$ für $x=0$ in $0:0$ übergeht, so nimmt man jener Anweisung zufolge als „wahren Werth für $x=0$" die Grenze $\lim\frac{\sin x}{x}$ und findet dieselbe gewöhnlich so: „Da kleine Werthe von x zwischen $\sin x$ und $\tang x$ liegen, so liegt $\frac{\sin x}{x}$ für solche stets zwischen

$$\frac{\sin x}{\sin x} \text{ und } \frac{\sin x}{\tang x}$$

d. h. zwischen 1 und $\frac{\sin x}{\tang x}$ oder, wegen $\tang x = \frac{\sin x}{\cos x}$, zwischen 1 und $\cos x$, mithin die Grenze von $\frac{\sin x}{x}$ zwischen den Grenzen von 1 und von $\cos x$. Da aber $\lim\cos x = \cos 0 = 1$ ist, so kann nur $\lim\frac{\sin x}{x} = 1$ sein." Dies ist in der That der wahre Werth, aber nur, weil hier gerade $\sin x : x$ bei $x=0$ continuirlich war *).

Wie man aber auf Widersprüche geräth, wenn die Continuität nicht da ist, haben wir in dem obigen Beispiele auf pag. 231 gesehen, wo man ohne weitere Gründe, um eine Uebereinstimmung mit dem Grenzwerthe zu erhalten, die Potenz 1^∞ für eine unbestimmte Form erklären und ihr einen Werth beilegen musste, den sie nie haben kann.

*) Nach dem oben von uns angegebenen Verfahren musste man, um den wahren Werth zu finden, sehen, ob $\sin x$ und x einen gemeinsamen Faktor haben, der für $x=0$ verschwindet, oder was dasselbe ist, da dieser Faktor hier nur das x selbst sein kann, ob sich $\sin x$ so umformen lässt, dass x als Faktor erscheint. Im Späteren werden wir sehen, dass in der That

$$\sin x = x\left(1 - \frac{1}{2.3}x^2 + \frac{1}{2.3.4.5}x^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7}x^6 + \ldots\right)$$

ist, und daher, nach Fortlassung des gemeinsamen Faktors

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{2.3}x^2 + \frac{1}{2.3.4.5}x^4 - \ldots\ldots$$

mithin für $x=0$, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)_0 = 1$ sich ergibt.

Erster Abschnitt.

Von den Summenreihen im Allgemeinen.

A. Von der Convergenz der Summenreihen überhaupt und von der Convergenz der nach Potenzen fortschreitenden Reihen insbesondere.

§. 161. *Erklärung.* Jede Summe von unbegrenzt vielen Gliedern heisst eine unendliche Summen-Reihe oder schlechthin „unendliche Reihe". Hat eine solche die Form:

$$ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + dx^{\delta} + \ldots \text{ in infinitum},$$

und sind die Exponenten α, β, γ, δ, etc. so beschaffen, dass jeder derselben grösser ist als der vorhergehende, während a, b, c, d, etc. unabhängig von x sind, so sagt man, sie schreite nach steigenden Potenzen von x fort; ist jeder Exponent kleiner als der vorhergehende, so sagt man, sie schreite nach fallenden Potenzen von x fort. — Die Faktoren a, b, c, d, etc. nennt man die Coefficienten der Reihe, x den Fortschreitungsbuchstaben oder (insofern man sich die Reihe als eine Funktion von x denkt) den Veränderlichen.

Da sich jede endliche Reihe, d. h. jede Reihe von beschränkter Gliederzahl als eine unendliche betrachten lässt, in denen die entfernteren Glieder sämmtlich die Null zum Coefficienten haben, so lassen sich selbst ganz einfache Ausdrücke, wie z. B. a und bx^2, als unendliche Reihen ansehen, die nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreiten. Es sind dieselben nämlich resp. gleichgeltend mit

$$a + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3 + \ldots \text{ in inf.}, \quad 0 + 0.x + b.x^2 + 0.x^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

Kommen in den Gliedern einer Reihe Potenzen mehrerer bestimmten Buchstaben als Faktoren vor, haben also etwa die Glieder die Form $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma$, und sind dieselben so geordnet, dass in jedem Gliede die Summe der Exponenten gleich oder kleiner ist als die Summe der Exponenten im folgenden Gliede, so sagt man, die Reihe schreite nach steigenden Potenzen von x, y, z fort. Von denjenigen Gliedern, in welchen die Summe jener Exponenten gleich gross, etwa gleich m ist, sagt man, sie seien die Glieder der ebenso vielten (also hier der mten) Dimension. So sind z. B. folgendes die Glieder der 0ten, 1sten, 2ten Dimension einer solchen Reihe mit drei Fortschreitungsbuchstaben:

$$a + (a_1 x + b_1 y + c_1 z) + (a_2 x + b_2 y^2 + c_2 z^2 + d_2 xy + e_2 xz + f_2 yz).$$

§. 162. *Die geometrische Reihe.* Jede nach positiven ganzen Potenzen fortschreitende Reihe, deren Coefficienten sämmtlich einander gleich sind, heisst eine geometrische Reihe. Die einfachste, in welcher die Coefficienten gleich Eins sind, ist also die folgende

$$(1) \qquad 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \text{ in inf.}$$

Die Summe einer beliebigen Anzahl erster Glieder derselben lässt sich leicht finden. Stellt nämlich s_n die Summe ihrer ersten n Glieder vor, so hat man

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1}$$

$$s_n x = \quad x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n,$$

folglich, wenn man die letzte Gleichung von der darüber stehenden subtrahirt,

$$s_n - s_n x = 1 - x^n \text{ oder } s_n(1-x) = 1 - x^n, \text{ und mithin}$$

$$s_n = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$

In dem besonderen Falle, in welchem x reell und numerisch kleiner als Eins ist, hat x^n, und somit auch $\frac{x^n}{1-x}$ einen um so kleineren numerischen Werth, je grösser n gedacht wird, so dass, wenn man das n ohne Aufhören wachsend, die Reihe folglich allmälig unendlich werdend denkt, der Unterschied zwischen s_n und $\frac{1}{1-x}$ sich ohne Ende der Null nähert, ohne indess mit ihr jemals völlig zusammenzufallen. Es ist demnach, wofern nur x numerisch

kleiner als 1 ist, $\frac{1}{1-x}$ die Grenze des Werthes der obigen unendlichen geometrischen Reihe, oder wie man sich auch ausdrückt, die Summe dieser Reihe *).

Ist x numerisch grösser als Eins, so übersteigt der numerische Werth von $\frac{x^n}{1-x}$ mit wachsendem n nach und nach jede gegebene Grenze, der Werth der Reihe (1) wird daher alsdann unendlich gross, oder vielmehr, es hat dieselbe gar keinen Werth. Ebenso verhält es sich, wenn $x=1$ ist, weil die Reihe in diesem Falle eine Summe von unendlich vielen Einsen wird.

Für $x=-1$ endlich geht die Reihe (1) über in

$$1-1+1-1+1-1+\text{etc. in inf.},$$

und hat somit gleichfalls keinen bestimmbaren Werth.

Jede andere geometrische Reihe, in welcher die Coefficienten den beliebigen Werth a haben, erhält man, wenn man die Reihe (1) mit a multiplicirt. Daher ist denn

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots. + ax^{n-1} = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x},$$

und folglich, wenn x numerisch kleiner als Eins ist,

$$(2) \qquad \lim\,[a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots \text{in inf.}] = \frac{a}{1-x}.$$

§. 163. *Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen.*

a. *Unendliche Reihen mit reellen Gliedern.* Man nennt eine unendliche Reihe, deren Glieder reell sind, convergent, wenn die Summe einer mehr oder weniger grossen Anzahl ihrer ersten Glieder einen Werth hat, der sich durch die Hinzunahme folgender Glieder wenig mehr ändert, wie gross auch die Zahl dieser neu hinzugenommenen Glieder sei — und zwar dergestalt, dass bei einer hinlänglichen Anzahl erster Glieder die durch Aufnahme späterer Glieder hervorgebrachte Aenderung kleiner wird

*) Hiermit ist also keinesweges gesagt, dass die unendliche Reihe identisch sei mit $\frac{1}{1-x}$, denn $\frac{1}{1-x} - s_\infty$ hat nicht den Werth Null, sondern nur den unendlich kleinen Werth $\frac{x^\infty}{1-x}$.

als jede gegebene noch so kleine reelle Zahl. Den kleinsten angebbaren Werth, welchen die Summe nicht überschreiten kann, wie viel fernere Glieder man auch aufnimmt, oder den grössten angebbaren Werth, unter den sie nicht herabsinken kann, nennt man dann die Summe der unendlichen Reihe.

Sonach ist also dem vorigen §. zufolge die geometrische Reihe für jeden Werth von x, der numerisch kleiner als Eins ist, convergent *).

Nähert sich dagegen die Summe erster Glieder mit zunehmender Gliederzahl keiner bestimmten Grenze, so lässt sich von einem Werthe der unendlichen Reihe nicht sprechen, und man nennt alsdann dieselbe divergent.

Sonach ist z. B. die geometrische Reihe divergent, so oft x nicht numerisch kleiner als Eins ist.

Aus der obigen Erklärung der Convergenz ergibt sich zunächst Folgendes.

I. Soll eine Reihe convergiren, so muss das nte Glied mit zunehmendem Werthe von n sich der Grenze Null nähern (wenn auch nicht umgekehrt aus der Erfüllung dieser Bedingung nothwendig die Convergenz folgt, weil eine unendliche Menge unendlich kleiner Glieder auch einen endlichen Werth haben kann).

II. Wenn von zwei Reihen, welche von einem bestimmten nten Gliede an nur positive Glieder enthalten, die erste convergent ist, und deren Glieder von einem solchen nten Gliede an einzeln grösser sind als die entsprechenden Glieder der zweiten Reihe: so convergirt auch diese zweite Reihe.

*) Die Summe der n ersten Glieder ist nämlich $\frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}$, die Summe der $n+r$ ersten Glieder $\frac{a}{1-x} - \frac{ax^{n+r}}{1-x}$; die Summe ändert sich daher durch die Aufnahme von r neuen Gliedern um $\frac{ax^n}{1-x}(1-x^r)$, also um etwas, was um so weniger von $\frac{ax^n}{1-x}$ verschieden ist, je grösser man r nimmt, während jedenfalls n so gross gewählt werden kann, dass $\frac{ax^n}{1-x}$ numerisch kleiner als jede gegebene noch so kleine reelle Zahl k wird.

Ist nämlich der Rest der ersten Reihe, von einem der auf dem *n*ten Gliede folgenden, etwa vom $(n+r)$ten Gliede an gerechnet, in Folge der vorausgesetzten Convergenz kleiner als eine beliebige sehr kleine absolute Zahl k, so ist auch der Rest der zweiten Reihe, welcher auf das $(n+r)$te Glied folgt, weil er aus kleineren Gliedern besteht, als der entsprechende Rest der ersten Reihe, kleiner als das sehr kleine k. Und da wegen des Positiv-Seins der Glieder jeder Theil des Restes kleiner ist als der ganze Rest, so kann auch beim Hinzunehmen neuer Glieder zu den $n+r$ ersten der Summenwerth sich nur um einen Theil des sehr kleinen k ändern, so dass in der That die oben gestellte Bedingung der Convergenz von der zweiten Reihe erfüllt ist.

III. Eine unendliche Reihe, deren Glieder untermischt positiv und negativ sind, ist convergent, wenn die aus den numerischen Werthen ihrer Glieder gebildete Reihe convergirt.

Sind nämlich die Glieder der ersten Reihe a_0, a_1, a_2, a_3, etc., und ihre numerischen Werthe resp. α_0, α_1, α_2, α_3, etc., so ist, wenn die Reihe

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \text{ in inf.}$$

convergirt, vermöge der Convergenz-Erklärung von einem *n*ten Gliede ab der Rest $\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} +$ etc. kleiner als eine beliebig kleine absolute Zahl k, mithin, da offenbar $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} +$ etc. denselben oder einen kleineren numerischen Werth als $\alpha_n + \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} +$ etc. hat, auch der Rest der gegebenen Reihe, d. h. $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} +$ etc., numerisch kleiner als k, und somit der Bedingung der Convergnnz genügt.

Anmerkung. Von einer unendlichen Reihe mit reellen Gliedern, welche convergent bleiben würde, wenn man ihre Glieder mit ihren numerischen Werthen vertauscht, werden wir (weil dann die Convergenz nicht beeinträchtigt wird, wenn man die Vorzeichen der Glieder beliebig ändert) in der Folge sagen, sie convergire unabhängig von den Glieder-Zeichen. — Im Gegensatze hiezu nennen wir die convergenten Reihen, bei denen dies nicht der Fall ist, „convergent durch Zeichenwechsel".

b. *Unendliche Reihen mit imaginären Gliedern.* Sind die Glieder einer unendlichen Reihe imaginär und ist etwa das erste

Glied gleich $a_1 + b_1 i$, das zweite Glied gleich $a_2 + b_2 i$, das dritte Glied gleich $a_3 + b_3 i$, etc. (unter a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, etc. reelle Zahlen gedacht), so dass dieselbe durch

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i) + \ldots \text{ in inf.},$$

oder wenn man

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \text{ in inf.} = P, \quad b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \text{ in inf.} = Q$$

setzt, durch $P + Qi$ vorgestellt ist, so sagt man, sie sei convergent, wenn die (nur aus reellen Gliedern gebildeten) Reihen P und Q convergent sind, divergent dagegen, wenn dies nicht der Fall ist. — Im Falle der Convergenz heisst, wenn p die Summe der Reihe P, q die Summe der Reihe Q bezeichnet, $p + qi$ die Grenze oder Summe der in Rede stehenden Reihe.

Wir werden ferner von solcher convergenten Reihe mit imaginären Gliedern sagen, sie convergire unabhängig von den Glieder-Zeichen oder durch Zeichenwechsel, jenachdem die Reihen P und Q unabhängig von den Gliederzeichen oder durch Zeichenwechsel convergiren.

§. 164. *Merkmale der Convergenz unendlicher Reihen mit reellen Gliedern.*

I. Eine unendliche Reihe mit reellen Gliedern convergirt, und zwar unabhängig von den Gliederzeichen, wenn jedes Glied, durch das vorhergehende dividirt, einen Quotienten gibt, dessen numerischer Werth um einen endlichen, wenn auch noch so kleinen Werth kleiner als Eins ist.

Beweis. Die fragliche Reihe sei vorgestellt durch

$$(3) \qquad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots \text{ in inf.},$$

und α_0, α_1, α_2, α_3, ... seien die numerischen Werthe von a_0, a_1, a_2, a_3, ...; ferner bezeichne man die Reihe

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots \text{ in inf.}$$

durch s und denke unter v eine (absolute) Zahl, welche kleiner ist als Eins, aber grösser als der grösste der Quotienten

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \frac{\alpha_4}{\alpha_3}, \text{ etc.},$$

die der Voraussetzung nach sämmtlich echte Brüche sind.

Man hat alsdann allgemein

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}} < v, \text{ also } \alpha_m < \alpha_{m-1} \cdot v$$

und daher, wenn man für m nach und nach 1, 2, 3, . . . setzt: 1) $a_1 < a_0 v$; 2) $a_2 < a_1 v$, folglich (wenn man hierin für a_1 das kleinere Produkt $a_0 v$ setzt) um so mehr $a_2 < a_0 v^2$; 3) $a_3 < a_2 v$ oder (für a_2 das kleinere Produkt $a_0 v^2$ setzend) $a_3 < a_0 v^3$; 4) $a_4 < a_3 v$ oder (für a_3 das kleinere Produkt $a_0 v^3$ setzend) $a_4 < a_0 v^4$; etc. etc.

Addirt man diese Ungleichungen $a_1 < a_0 v$, $a_2 < a_0 v^2$, $a_3 < a_0 v^3$, $a_4 < a_0 v^4$, etc. zu einander und zur Gleichung $a_0 = a_0$, so ergibt sich

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \text{ in inf.} < a_0 + a_0 v + a_0 v^2 + a_0 v^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

Da nun die auf der rechten Seite dieser Formel stehende Reihe eine geometrische, und $v < 1$ ist, so ist dieselbe convergent, mithin (nach §. 163, II) auch die aus kleineren (positiven) Gliedern bestehende Reihe zur Linken, d. h. die Reihe s, und folglich ebenso (nach §. 163, III) die gegebene Reihe.

II. Eine unendliche Reihe convergirt unabhängig von den Gliederzeichen, wenn von einem bestimmten, wenn auch noch so entfernten Gliede ab, jedes Glied durch das vorhergehende dividirt, einen Quotienten gibt, dessen numerischer Werth um einen endlichen, wenn auch noch so kleinen Werth kleiner als Eins ist.

Beweis. Tritt die erwähnte Eigenschaft von dem nten Gliede an ein, und bezeichnet man die Summe der n ersten Glieder durch S, den Rest der Reihe durch R, so ist R eine Reihe, welche nach Nr. I dieses §. convergirt. Wenn nun in Folge hiervon die Summe der r ersten Glieder dieser Reihe R durch Hinzunahme folgender Glieder keinen Zuwachs gewinnen kann, welcher eine gegebene beliebig kleine Zahl k übersteigt, so heisst dies nichts anderes, als dass die Summe der $n+r$ ersten Glieder der gegebenen Reihe durch Hinzufügen folgender Glieder keine Aenderung mehr erfahren kann, welche die gegebene beliebig kleine Zahl k übertrifft; mithin ist auch die gegebene Reihe nach §. 163 convergent, und zwar unabhängig von den Gliederzeichen, weil R unabhängig von den Gliederzeichen convergirt.

Ist S' die Summe der Reihe R, so ist, da S (wie gross auch n gewesen sein mag) als Summe einer endlichen Zahl Glieder, von einem angebbaren Werthe ist, auch $S+S'$ von endlichem Werthe und die Summe der gegebenen Reihe.

III. Eine unendliche Reihe convergirt unabhängig von den Gliederzeichen, wenn von irgend einem Gliede ab, die *n*te Wurzel aus dem absoluten Werthe des $(n+1)$ten Gliedes um ein Endliches kleiner als Eins ist.

Beweis. Sind wiederum $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Glieder der gegebenen Reihe, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ deren numerische Werthe; fängt ferner die genannte Eigenschaft der Glieder mit dem *m*ten Gliede an, und ist v ein Werth, welcher kleiner als Eins ist, aber grösser als die grösste der erwähnten Wurzeln *), d. h. ist

$$\sqrt[m]{\alpha_m} < v, \ \sqrt[m+1]{\alpha_{m+1}} < v, \ \sqrt[m+2]{\alpha_{m+2}} < v, \ \sqrt[m+3]{\alpha_{m+3}} < v, \text{ etc.}$$

so hat man nach §. 52, 10

$$\alpha_m < v^m, \ \alpha_{m+1} < v^{m+1}, \ \alpha_{m+2} < v^{m+2}, \ \alpha_{m+3} < v^{m+3}, \text{ etc.,}$$

und folglich

$$\alpha_m + \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \ldots \text{ in inf.} < v^m + v^{m+1} + v^{m+2} + \ldots \text{ in inf.}$$

Da aber der Voraussetzung nach $v < 1$ ist, so ist die geometrische Reihe $v^m + v^{m+1} + v^{m+2} +$ etc. convergent, mithin auch (nach §. 163, II) die aus kleineren Gliedern bestehende Reihe $\alpha_m + \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} +$ etc., und dann nach (§. 163, III) die Reihe $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} +$ etc. Da ferner diese letzte Reihe nichts weiter ist, als der Rest der gegebenen Reihe, so ist auch die gesammte gegebene Reihe (wie wir dies in dem ähnlichen Falle in Nr. II gesehen haben) convergent und zwar, wie ersichtlich, unabhängig von den Gliederzeichen.

IV. Eine unendliche Reihe, deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, convergirt, sobald jedes Glied numerisch kleiner als das vorhergehende ist, und dabei der numerische Werth des *n*ten Gliedes mit zunehmendem Werthe von n zuletzt unter jeden angebbaren Werth herabsinkt.

Beweis. Stellt man die gegebene Reihe durch

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots \text{ in inf.}$$

vor, wo a_0, a_1, a_2, a_3, etc. von absolutem Werthe gedacht wer-

*) Unter dem v lässt sich immer ein angebbarer (d. h. endlicher) Werth denken, da angenommen ist, dass sich die grössten der obigen Wurzeln immer noch um ein Endliches von Eins unterscheiden.

den mögen, so hat man, wenn s_n die Summe der ersten $n+1$ Glieder bedeutet und n eine gerade Zahl ist,

(4) $a_0 - s_n = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)$, und

(5) $s_n - (a_0 - a_1) = (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_n$,

und wenn n ungerade ist,

(4) $a_0 - s_n = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \ldots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_n$ und

(5) $s_n - (a_0 - a_1) = (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)$.

In allen diesen vier Gleichungen sind sämmtliche Glieder der auf der rechten Seite des (=) Zeichens stehenden Reihen positiv, da der Annahme nach $a_0 > a_1$, $a_1 > a_2$, $a_2 > a_3$, etc. ist. Mithin sind auch ihre Summen, deren Werthe diesen Gleichungen zufolge resp. $a_0 - s_n$ und $s_n - (a_0 - a_1)$ sind, positiv; d. h. es ist $a_0 > s_n$ und $s_n > (a_0 - a_1)$, so dass s_n nothwendig zwischen den positiven Werthen a_0 und $a_0 - a_1$ liegen muss, und zwar wie gross auch n gewählt worden sein mag, namentlich also auch wenn man das n über alle Grenzen zunehmen lässt, d. h. wenn man unter s_n die gesammte gegebene (unendliche) Reihe begreifen will.

Hätten wir a_0, a_1, a_2, etc. negativ genommen, so würden wir ebenso auf den Schluss gekommen sein, dass die Summe jeder nach so vielen ersten Glieder der Reihe zwischen den **negativen** Werthen a_0 und $a_0 - a_1$ liegen müsse.

Wird ferner der Rest der Reihe durch R bezeichnet, so hat man

$$R = \pm (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \ldots \text{ in inf.}),$$

wo von den doppelten Zeichen das + oder das − zu nehmen ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Da nun diese Reihe R von derselben Art wie die gegebene Reihe ist, so muss auch, bei einem wie entfernten Gliede man dieselbe abbrechen mag, die resultirende Summe zwischen a_{n+1} und $a_{n+1} - a_{n+2}$ liegen. Der Unterschied, den es macht, wenn man zu den $n+1$ ersten Gliedern der gegebenen Reihe noch beliebig viele der folgenden Glieder hinzunimmt, kann folglich numerisch genommen nie grösser als a_{n+1} sein, während der Voraussetzung nach der numerische Werth von a_{n+1} mit grösser werdendem n unter jeden angebbaren Werth herabsinkt. Die gegebene Reihe ist mithin zufolge des §. 163 convergent.

Anmerkung. Besteht eine unendliche Reihe aus abwech-

selnd positiven und negativen Gliedern, deren numerische Werthe zwar abnehmen, aber statt gegen die Grenze Null, gegen eine von Null verschiedene Grenze γ convergiren, so wird der Unterschied der Summe, je nachdem man bei einem positiven oder bei einem negativen Gliede abbricht, sich um so weniger von γ unterscheiden, je mehr erste Glieder zur Summe zusammengefasst worden sind. Es kann sich also jedenfalls die Summe der Reihe durch Hinzunahme neuer Glieder um etwas Endliches ändern, so dass von einer bestimmten Summe der unendlichen Reihe und mithin auch von deren Convergenz nicht die Rede sein kann. — Solcher Art ist z. B. die Reihe

$$100-(100-\tfrac{1}{2})+(100-\tfrac{3}{4})-(100-\tfrac{4}{5})+(100-\tfrac{5}{6})-\text{etc.},$$

wo der Unterschied zwischen der Summe der n ersten und der $n+1$ ersten Glieder nie geringer als 99 wird.

V. Eine unendliche Reihe convergirt, sobald von irgend einem Gliede ab die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, und ihre numerischen Werthe zur Grenze Null convergiren.

Die Wahrheit dieses Satzes folgt ebenso aus Nr. IV, wie die Wahrheit des Satzes Nr. II aus Nr. I.

Beispiel 1. Es seien die folgenden Reihen in Bezug auf die Convergenz zu prüfen:

$$(6)\quad 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{6!}+\ldots(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{[2(n+1)]!}+\text{etc}$$

$$(7)\quad x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}+\text{etc.}$$

wo abkürzungsweise 2! für 1. 2, 3! für das Produkt 1. 2. 3, 4! für das Produkt 1. 2. 3. 4, etc., $(2n)!$ für das Produkt der ersten $2n$ ganzen Zahlen, etc. gesetzt worden ist.

Bildet man, um den Satz Nr. II zu benutzen, den Quotienten zwei auf einander folgender Glieder, und dividirt etwa bei der Reihe (6) das mit dem Faktor x^{2n+2} versehene Glied, bei der Reihe (7) das mit dem Faktor x^{2n+3} versehene Glied durch das vorhergehende, so erhält man Ausdrücke, welche resp. gleich

$$(8)\qquad -\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}\ \text{und}\ -\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

sind. Die numerischen Werthe dieser Quotienten werden aber, wenn n' die kleinste ganze Zahl ist, welche die Hälfte des nume-

rischen Werthes von x übertrifft, sicher kleiner als Eins für jeden Werth von n, der gleich oder grösser als n' ist; mithin ist die in Nr. II angegebene Bedingung der Convergenz vom n'ten Gliede ab erfüllt, und es convergiren folglich beide Reihen, und zwar für jeden reellen noch so grossen Werth von x.

Beispiel 2. Prüft man ebenso die Reihe

$$(9)\qquad a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^5}{5!} + \ldots \text{ in inf.},$$

so führt die Division des Gliedes $\frac{a^n}{n!}$ durch das vorhergehende, nämlich durch $\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$, auf $\frac{a}{n}$, mithin auf einen Ausdruck, der von dem kleinsten Werthe von n an, welcher den numerischen Werth von a übersteigt, numerisch kleiner als 1 ist, und es convergirt daher die Reihe nach Nr. II für jeden reellen Werth von a.

Beispiel 3. Untersucht man ebenso die Reihe

$$(10)\qquad x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \text{etc. in inf.},$$

so findet man für den Quotienten des nten und $(n-1)$ten Gliedes $\frac{n-1}{n}x$, also einen Werth, der numerisch nie grösser als x sein kann. Ist daher der numerische Werth von x kleiner als Eins, so ist auch die Bedingung der Convergenz, die in Nr. I angegeben worden, erfüllt, und die Reihe demnach eine convergente, so lange x zwischen -1 und $+1$ liegt.

Für $x = 1$ geht die Reihe über in

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots \text{ in inf.},$$

und convergirt dann somit nach Nr. IV.

Ist dagegen $x = -1$, so divergirt die Reihe, da alsdann der obige Quotient den Werth $\frac{n-1}{n}$ erhält, und sich daher um so weniger von Eins unterscheidet, je grösser n genommen wird, so dass der Rest der Reihe von einem hinreichend grossen Werthe von n ab, sich wenig mehr von einer geometrischen Reihe mit dem Fortschreitungsbuchstaben Eins, d. h. von einer anerkannt divergenten Reihe, unterscheidet *).

*) Noch bindender überzeugt man sich von der Divergenz dieser Reihe,

§. 165. *Zusatz.* Es divergirt eine unendliche Reihe, wenn von einem bestimmten Gliede ab, jedes Glied durch das vorhergehende dividirt einen Quotienten gibt, der numerisch grösser als Eins ist.

Tritt nämlich dieses Grösserwerden mit dem *m*ten Gliede, welches wir durch a_m bezeichnen wollen, ein, so ist doch a_m, wie klein es auch sein mag, von endlichem Werthe, und jedes folgende Glied, weil es (wegen $a_{m+1} : a_m > 1$, $a_{m+2} : a_{m+1} > 1$, $a_{m+3} : a_{m+2} > 1$, etc.) grösser als a_m ist, gleichfalls endlich. Es muss somit die Reihe nach §. 163, I divergiren.

Zu den divergirenden Reihen gehört hiernach unter andern die Reihe (10), so oft x numerisch grösser als Eins ist, weil der Quotient $\frac{n-1}{n} x$ sich um so weniger von x unterscheidet, je grösser n genommen wird, jedenfalls also von einem Werthe von n ab numerisch grösser als Eins werden muss.

§. 166. *Lehrsatz.* Jede nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe mit reellen Coefficienten,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

convergirt, wenigstens für Werthe von x, welche eine gewisse Grenze nicht überschreiten, stets, und zwar unabhängig von den Gliederzeichen, wofern nur kein Coefficient, numerisch genommen, unendlich vielmal grösser als der vorhergehende ist — oder, wofern nur die *m*te Wurzel aus dem numerischen Werthe von a_m für keinen Werth von m unendlich gross wird.

Beweis. Sind wiederum α_0, α_1, α_2, α_3 etc. die numerischen Werthe von a_0, a_1, a_2, a_3, etc., so findet nach §. 164, II Con-

wenn man bemerkt, dass die Summe folgender r Glieder derselben

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+3} + \ldots\ldots \frac{1}{2r-1}$$

grösser ist als das rfache des letzten Gliedes $\frac{1}{2r-1}$, d. h. grösser als $\frac{r}{2r-1}$, mithin grösser als $\frac{1}{2}$. Da nämlich die fragliche Reihe sich in lauter Gruppen solcher Glieder zertheilen lässt, so muss ihre Summe grösser als $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$ in inf., folglich unendlich gross sein.

vergenz statt, sobald von irgend einem Werthe von m ab, der Quotient der Glieder $a_m x^m$ und $a_{m-1} x^{m-1}$, d. h. $\frac{a_m}{a_{m-1}} x$ numerisch kleiner als Eins bleibt. Bezeichnet man nun durch u den Werth des grössten der Quotienten $\frac{a_1}{a_0}$, $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_2}$, $\frac{a_4}{a_3}$, etc., so ist $\frac{a_m}{a_{m-1}} x$ numerisch gleich oder kleiner als ux, also numerisch kleiner als 1 für jeden Werth von x, der numerisch kleiner als $\frac{1}{u}$ ist, d. h. es convergirt die obige Reihe für jedes zwischen $-\frac{1}{u}$ und $+\frac{1}{u}$ gelegene x, und zwar unabhängig von den Gliederzeichen. Ein angebbares $\frac{1}{u}$ existirt, wie man sieht, nur dann nicht, wenn u selbst nicht angebbar ist, also einer der obigen Quotienten unendlich gross wird, oder was dasselbe ist, wenn irgend ein Coefficient der Reihe unendlich vielmal grösser ist als der vorhergehende.

Was den zweiten Ausspruch des Lehrsatzes betrifft, so bemerke man, dass nach §. 164, III die Reihe convergirt, sobald von irgend einem Werthe von m ab $\sqrt[m]{(a_m x^m)}$ d. h. $x\sqrt[m]{a_m}$ numerisch kleiner als Eins ist. Wird also die grösste der Wurzeln $\sqrt{a_2}$, $\sqrt[3]{a_3}$, $\sqrt[4]{a_4}$, $\sqrt[5]{a_5}$, etc. durch u bezeichnet, so wird, numerisch genommen, $x\sqrt[m]{a_m} \overline{\overline{<}} ux$ für jeden Werth von m, und mithin die Reihe für jeden zwischen $-\frac{1}{u}$ und $+\frac{1}{u}$ liegenden Werth von x convergent. Es existirt folglich nur dann kein Intervall von Werthen von x, für welche Convergenz statt findet, wenn $\frac{1}{u}$ unendlich klein, also $\sqrt[m]{a_m}$ für irgend einen Werth von m unendlich gross wird.

Zusatz. Es sind natürlich nicht nothwendig $-\frac{1}{u}$ und $+\frac{1}{u}$ die äussersten Grenzen von x, für welche die Reihe unabhängig

von den Gliederzeichen convergirt. Da nämlich die Ausdrücke $\frac{a_m}{a_{m-1}}x$ und $x\sqrt[m]{a_m}$ behufs der Convergenz nur von einem beliebig grossen aber bestimmten Werthe von *m* an, kleiner als Eins zu sein brauchen, so hat es auf die Grösse der Grenzen von *x*, zwischen denen Convergenz stattfindet, keinen Einfluss, wenn $\frac{a_m}{a_{m-1}}$ und $\sqrt[m]{a_m}$ für beliebig hohe, aber bestimmte Werthe von *m*, noch beliebig grosse (aber natürlich endliche) Werthe haben, und es werden daher $-\frac{1}{u}$ und $+\frac{1}{u}$ nur dann die äussersten Grenzen, wenn *u* zugleich die Grenze ist, zu welcher die Werthe von $\frac{a_m}{a_{m-1}}$ oder $\sqrt[m]{a_m}$ convergiren, wenn *m* (von einem beliebig hohen Werthe angefangen) bis ins Unendliche wächst.

Eine nach positiven ganzen Potenzen von *x* fortschreitende Reihe convergirt also z. B. ausschliesslich für alle zwischen -1 und $+1$ liegende Werthe von *x* unabhängig von den Gliederzeichen nur dann, wenn $a_m : a_{m-1}$ oder $\sqrt[m]{a_m}$ von irgend einem Werthe von *m* ab, mit wachsendem *m* zur Grenze Eins convergirt.

§. 167. *Erklärung.* Modulus einer imaginären Zahl von der Form $p + qi$ nennt man den absoluten Werth der Quadratwurzel aus der (stets positiven) Zahl $p^2 + q^2$.

§. 168. *Merkmal der Convergenz unendlicher Reihen mit imaginären Gliedern.* Sind die Glieder einer Reihe: $a + bi$, $a_1 + b_1 i$, $a_2 + b_2 i$, $a_3 + b_3 i$, etc. (wo a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, etc. reell zu denken sind), so dass dieselbe gleich $P + Qi$ ist, wenn

$a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ in inf. $= P$, $\quad b + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ in inf. $= Q$

gesetzt wird, so hängt zufolge des §. 163,b ihre Convergenz von der Convergenz der Reihen *P* und *Q* ab; sie convergirt daher, und zwar unabhängig von den Gliederzeichen, nach §. 164, III, (da $\sqrt{(a_n^2)}$ und $\sqrt{(b_n^2)}$ die numerischen Werthe von a_n und b_n sind) so oft $\sqrt[n]{(\sqrt{a_n^2})}$ und $\sqrt[n]{(\sqrt{b_n^2})}$ von einem bestimmten Werthe von *n* ab, kleiner als 1 sind. Da nun $\sqrt{(a_n^2 + b_n^2)}$ weder kleiner als $\sqrt{(a_n^2)}$

noch kleiner als $\sqrt{(b_n^2)}$ sein kann, so sind die eben angegebenen Bedingungen gewiss erfüllt, so oft $\sqrt[n]{\sqrt{(a^{n2}+b_n^2)}}<1$ ist, d. h.

„es convergirt die Reihe unabhängig von den Gliederzeichen, „sobald für jeden Werth von n, der eine bestimmte, aber be„liebig hohe Zahl übersteigt, die nte Wurzel aus dem Modulus „des $(n+1)$ten Gliedes um ein Endliches kleiner als 1 bleibt,"

oder was dasselbe ist,

„sobald diese Wurzel mit wachsendem n zu einer Grenze con„vergirt, die kleiner als Eins ist."

B. Von der Gleichheit solcher unendlichen Reihen, welche nach Potenzen derselben Veränderlichen fortschreiten.

§. 169. *Lehrsatz.* In jeder nach positiven ganzen Potenzen von x fortlaufenden unendlichen Reihe mit reellen Coefficienten, von denen keiner unendlich vielmal grösser als der vorhergehende ist, kann man dem x einen (endlichen) Werth geben, durch welchen das erste Glied numerisch grösser wird als die Summe aller übrigen; und ist v ein solcher Werth von x, so gilt dies auch für jeden Werth von x, der numerisch kleiner als v ist.

Beweis. Setzt man in die Reihe (2) des §. 162 für x den Werth $\frac{1}{2}$, so erhält man

(11) $$\lim[a+\tfrac{1}{2}a+(\tfrac{1}{2})^2a+(\tfrac{1}{2})^3a+\ldots\text{in inf.}]=\frac{a}{1-\frac{1}{2}}=2a.$$

Es wird daher in einer unendlichen Reihe, in welcher jedes Glied der Hälfte des vorhergehenden gleich ist, das erste Glied gleich der Grenze der Summe aller übrigen Glieder. Für $x<\frac{1}{2}$ wird die Reihe (2) kleiner als $2a$, also das erste Glied grösser als die Summe aller folgenden. — Sind nun $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Coefficienten der gegebenen Reihe, und $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ ihre numerischen Werthe; setzt man ferner

(12) $$\alpha+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\ldots\text{in inf.}=s,$$

und bezeichnet durch v eine absolute Zahl, die kleiner ist als die Hälfte des kleinsten der Quotienten $\frac{\alpha}{\alpha_1}, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \frac{\alpha_2}{\alpha_3}, \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$, etc. und

die mithin einen allemal endlichen Werth hat (da der Voraussetzung nach kein Coefficient unendlich viel mal grösser als der vorhergehende und folglich keiner dieser Quotienten unendlich klein ist): so hat man, in so fern

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} > 2v, \text{ also } \frac{\alpha_n}{2v} > \alpha_{n+1} \text{ ist,}$$

für n nach und nach 1, 2, 3, ... setzend,

$$\alpha_1 < \frac{\alpha}{2v}, \; \alpha_2 < \frac{\alpha_1}{2v} < \frac{\alpha}{(2v)^2}, \; \alpha_3 < \frac{\alpha_2}{2v} < \frac{\alpha}{(2v)^3}, \text{ etc.}$$

und somit, wenn man diese Ungleichungen sämmtlich zur Gleichung $\alpha = \alpha$ addirt, nachdem man sie resp. mit x, x^2, x^3, x^4, etc. multiplicirt hat,

$$(13) \quad \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots \text{ in inf.} < \alpha + \frac{\alpha}{2v}x + \frac{\alpha}{(2v)^2}x^2 + \frac{\alpha}{(2v)^3}x^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

für jeden positiven Werth von x. Die Reihe zur Rechten geht aber für $x = v$ in die Reihe (11) über, und wird daher gleich 2α, wenn x den Werth v erhält, und kleiner als 2α für $x < v$; mithin ist die Reihe zur Linken, d. h. s, jedenfalls $< 2\alpha$, so oft x zwischen 0 und v liegt. Da nun die gegebene Reihe numerisch genommen höchstens gleich s, nie aber grösser als s ist, so wird auch die gegebene Reihe numerisch $< 2\alpha$, ihr erstes Glied also numerisch grösser als die Summe aller folgenden Glieder, für jeden zwischen Null und v liegenden Werth von x. Da ferner, wenn y eine absolute Zahl vorstellt, und in der gegebenen Reihe $x = -y$, in der Reihe s aber $x = y$ gesetzt wird, die gegebene Reihe noch numerisch kleiner als s bleibt, so ist deren erstes Glied auch für die zwischen 0 und $-v$ liegenden Werthe von x numerisch grösser als die Summe aller folgenden; *q. e. d.*

§. 170. *Lehrsatz.* Ist die Summe einer endlichen oder unendlichen Reihe, die nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitet, gleich Null für jeden Werth von x, der zwischen Null und einer beliebig kleinen (aber endlichen) absoluten Zahl h liegt, so ist jeder Coefficient der Reihe einzeln gleich Null.

B e w e i s. Dass die Reihe gleich Null wird, wenn jeder Coefficient den Werth Null hat, versteht sich von selbst, es kommt daher nur darauf an, nachzuweisen, dass dieselbe nicht für alle zwischen 0 und h liegende Werthe von x verschwinden kann, wenn

sie Coefficienten enthält, die von Null verschieden sind. Zu dem Ende zeigen wir zuerst, dass unter der gestellten Bedingung den Coefficienten keine von Null verschiedene reelle Werthe zukommen können, und alsdann, dass keiner derselben imaginär sein könne.

1) Sind in der Reihe

(14) $$a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \text{ in inf.}$$

sämmtliche Coefficienten reell, so gibt es, wenn a von Null verschieden ist, nach §. 169 eine absolute Zahl v, welche so beschaffen ist, dass für alle Werthe von x zwischen 0 und v, a numerisch grösser wird, als die Summe aller folgenden Glieder*). Folglich muss für jedes zwischen 0 und v liegende x, mithin auch für alle oder einen Theil der Werthe, die zwischen 0 und h liegen, der Reihenwerth positiv oder negativ werden, je nachdem a positiv oder negativ ist. Da aber zwischen $x = 0$ und $x = h$ die Reihe weder positiv noch negativ, sondern gleich Null sein soll, so kann auch a weder positiv noch negativ sein. Sollen also die Coefficienten der Reihe reell sein, ohne dass diese für die genannten Werthe von x zu verschwinden aufhört, so muss $a = 0$ sein, und demnach die Reihe sich durch

$$x(a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \ldots \text{ in inf.})$$

ersetzen lassen. Da ferner von diesem Ausdrucke vorausgesetzt wird, dass er gleich Null sei, wenn x zwischen 0 und h liegt, also namentlich auch wenn der erste Faktor desselben, x, von Null verschieden ist, so muss im vorstehenden Produkte nach §. 36, b der zweite Faktor, d. h.

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

gleich Null sein, was wiederum nach §. 169 auf den Schluss führt, dass $a_1 = 0$ sein muss, weil sonst der Werth der ganzen Reihe für alle oder einen Theil der zwischen 0 und h liegenden Werthe von x nicht gleich Null sein könnte, sondern mit a_1 zugleich positiv oder negativ werden würde. In Folge dess lässt sich die Reihe

*) Da nämlich die Reihe zwischen $x = 0$ und $x = h$ den Werth Null haben soll, so convergirt sie auch für diesen Werthintervall, und demnach ist die dem §. 169 zu Grunde gelegte Voraussetzung erfüllt, dass kein Coefficient unendlich viel mal grösser als der vorhergehende ist.

(14) nunmehr in der Form

(15) $x^2(a_2 + a_3x + a_4x^2 + \ldots \text{ in inf.})$

schreiben, aus welchem Ausdrucke man wiederum sieht, da er auch in Fällen verschwinden soll, wo der erste Faktor x^2 von Null verschieden ist, dass der zweite Faktor

$$a_2 + a_3x + a_4x^2 + \ldots \text{ in inf.}$$

gleich Null sein müsse, und da dies Verschwinden eintreten soll für alle zwischen 0 und h liegende Werthe von x, so folgt wiederum nach §. 169, dass nothwendig auch $a_2 = 0$ sein muss.

Auf diese Weise fortschliessend kommt man nach und nach auf $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$, etc., und es ist somit der erste Theil des Beweises erledigt.

Setzen wir 2) voraus, die Coefficienten der obigen Reihe seien theilweise oder sämmtlich imaginär, und denken wir $a = p + qi$, $a_1 = p_1 + q_1i$, $a_2 = p_2 + q_2i$, etc., so dass dieselbe sich $(p+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\ldots \text{in inf.}) + i(q+q_1x+q_2x^2+q_3x^3+\ldots \text{ in inf.})$ schreiben lässt, und nach §. 79, so oft sie gleich Null werden soll, auf die Gleichungen

$$p + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \ldots \text{ in inf.} = 0$$
$$q + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \ldots \text{ in inf.} = 0$$

führt. Da dieses Verschwinden für alle zwischen 0 und h liegenden Werthe von x eintreten soll, und die Coefficienten der beiden vorstehenden Reihen reell sind, so muss dem eben Bewiesenen zufolge $p = p_1 = p_2 = p_3 = \text{etc.} = 0$ und $q = q_1 = q_2 = q_3 = \text{etc.} = 0$, und folglich wiederum $a = a_1 = a_2 = a_3 = \text{etc.} = 0$ sein, *q. e. d.* *)

*) Gewöhnlich spricht man diesen Lehrsatz so aus:

„Wenn eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe für jeden Werth von x verschwindet, so ist jeder ihrer Coefficienten für sich gleich Null",

und beweist denselben, wie folgt:

„Da die vorgegebene Reihe für jedes x, also auch für $x = 0$ verschwinden soll, und dieselbe für $x = 0$ sich auf a reducirt, so muss $a = 0$ sein, und man erhält, wenn man dieses a deswegen aus der Reihe fortlässt und hierauf durch x dividirt, die Gleichung

(α) $a_1 + a_4x + a_3x^2 + a_4x^3 + \ldots = 0.$

Insofern diese Gleichung indess für jedes x, also auch für $x = 0$ bestehen soll, dieselbe sich aber für $x=0$ auf $a_1 = 0$ reducirt, so muss auch

§. 171. *Lehrsatz.* Sind zwei unendliche Reihen, die nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreiten, einander gleich für jeden Werth von x, der zwischen 0 und irgend einer bestimmten, wenn auch noch so kleinen absoluten Zahl h liegt, so sind in beiden Reihen die Coefficienten der gleichvielten Potenzen von x einander gleich.

Beweis. Sind die Reihen vorgestellt durch
$a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$ inf., und $b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+ \ldots$ in inf., so hat man, weil beide für alle zwischen 0 und h liegende Werthe von x einander gleich sein sollen, ihre Differenz also für eben diese Werthe gleich Null sein muss,
$(a-b)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+(a_3-b_3)x^3+ \ldots$ in inf. $=0$,
woraus nach §. 170 folgt, dass $a-b=0$, $a_1-b_1=0$, $a_2-b_2=0$, etc. d. h. $a=b$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, etc. ist, *q. e. d.* *)

der Coefficient a_1 den Werth Null haben. Lässt man deshalb das a_1 aus der Gl. (α) heraus und dividirt dieselbe dann durch x, so erhält man

$$a_2+a_3+x+a_4x^2+ \ldots\ldots = 0,$$

folglich muss, weil diese Gleichung für jedes x und mithin auch für $x=0$ bestehen soll, wiederum $a_2=0$ sein etc. etc.“

Die Fehlerhaftigkeit dieses Beweises liegt darin, dass man schliesst, die Gl. (α) müsse auch für $x=0$ gültig bleiben; denn es reducirt sich die gegebene Gleichung wegen $a=0$ nicht auf die Gl. (α), sondern auf

$$(\beta) \qquad a_1x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots\ldots = 0,$$

und ist somit nothwendig für $x=0$ richtig, wenn auch a_1 von Null verschieden ist. Auf den Schluss $a_1=0$ kam man nur, indem man durch etwas dividirte, was man nachher als der Null gleich voraussetzte, also indem man eine unerlaubte Operation vornahm. Die Gl. (α) braucht, wie man sieht, durchaus nicht mehr für $x=0$ richtig zu sein. Ueberdies ist bei dieser Beweisführung die Bedingung, dass die Reihe auch für Werthe von x, die von Null verschieden sind, den Werth Null haben solle, gar nicht in Anwendung gekommen, so dass der Beweis, wäre er strenge, zugleich darthun würde, dass jeder Coefficient für sich gleich Null sein müsse, wenn die Reihe bloss für $x=0$ verschwindet!

*) Auch diesen Lehrsatz pflegt man so auszusprechen: „In zwei nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitenden Reihen, die für jeden Werth von x einander gleich sind, müssen die Coefficienten der gleich-

§. 172. *Lehrsatz.* Sind zwei Reihen einander gleich, die nach positiven ganzen Potenzen von x, y, z, etc. fortschreiten, und zwar für alle Werthe von x, y, z, etc. welche zwischen Null und irgend welchen bestimmten, wenn auch noch so kleinen absoluten Werthen (etwa resp. h, k, l, etc.) liegen, so müssen auch die Coefficienten, welche mit einerlei Potenzen von x, y, z, etc. multiplicirt sind, in beiden Reihen einander gleich sein.

Beweis. Sind in den beiden Reihen nur zwei Veränderliche, x und y, vorhanden, und bezeichnet man ein beliebiges Glied der einen durch $\gamma_m x^n y^m$, das entsprechende Glied der anderen Reihe durch $\delta_m x^n y^m$, so hat man zur Begründung des Lehrsatzes für diesen Fall nur darzuthun, dass $\gamma_m = \delta_m$ sein müsse, und dies geschieht wie folgt.

Man ordne zuerst beide Reihen nach Potenzen von x, so dass sie die Form

(16) $\alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots$ in inf., $\beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots$ in inf.

annehmen, und darauf ebenso die Coefficienten $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$, (welche nur ganze Potenzen von y enthalten können) nach Potenzen von y. Es wird alsdann z. B. etwa

$$\alpha_n = \gamma + \gamma_1 y + \gamma_2 y^2 + \gamma_3 y^3 + \ldots + \gamma_m y^m + \ldots .$$
$$\beta_n = \delta + \delta_1 y + \delta_2 y^2 + \delta_3 y^3 + \ldots + \delta_m y^m + \ldots .$$

Insofern nun die Reihen (16) für jedes zwischen 0 und h liegende x einander gleich sein sollen, muss nach §. 171, $\alpha = \beta$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots$, $\alpha_n = \beta_n$, etc. sein. Da ferner die Reihen (16) auch für jeden zwischen 0 und k liegenden Werth von y gleich sein sollen, so müssen diese Gleichungen $\alpha = \beta$, $\alpha_1 = \beta_1$, etc. auch für eben diese Werthe von y gültig bleiben, so dass dann z. B. aus der Gleichung $\alpha_n = \beta_n$ nach §. 171 folgt, dass $\gamma = \delta$, $\gamma_1 = \delta_1$, $\gamma_2 = \delta_2$, etc. $\gamma_m = \delta_m$ ist, *q. e. d.*

Kommt ausser dem x und y noch ein dritter Veränderlicher z in den Reihen vor, so werden die obigen Coefficienten γ_m und δ_m als Reihen sich darstellen lassen, die nach Potenzen von z fort-

vielten Potenzen von x einander gleich sein." Der Beweis dieses Satzes, wie er in den Lehrbüchern gewöhnlich gegeben wird, ist, da er auf den unstrengen Beweis der Note des vorigen §. gestützt wird, gleichfalls nicht bindend.

schreiten, und aus ihrer Gleichheit (d. h. aus $\gamma_m = \delta_m$) folgt dann wiederum nach §. 171 die Gleichheit der Coefficienten ihrer einzelnen Glieder, d. h. derjenigen Coefficienten, welche in den gegebenen Reihen mit denselben Potenzen von x, y, z multiplicirt waren.

Auf dieselbe Weise fortfahrend, kommt man auf die Begründung des Lehrsatzes für vier und mehr Veränderliche.

§. 173. *Zusatz.* Der Lehrsatz des §. 171 lässt sich leicht auch auf Reihen ausdehnen, die nach positiv gebrochenen Potenzen fortschreiten, wofern nur die Nenner der Exponenten nicht ins Unbestimmte wachsen. Denn ist μ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner in den Exponenten, so ist jede in den Reihen vorkommende Potenz von x eine ganze Potenz von $x^{\frac{1}{\mu}}$. Die Reihen müssen demnach, da sie sich als nach ganzen Potenzen von $x^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreitend denken lassen, nach §. 171 gleiche Coefficienten haben. — Ebenso gilt der Lehrsatz noch für negative Potenzen von x, weil diese sich als ganze Potenzen von x^{-1} ansehen lassen.

C. Von der Entwickelung der Summen und Produkte unendlicher nach Potenzen fortschreitender Reihen.

§. 174. *Summirung der Reihen und Reihen-Entwickelung.* Den Ausdruck A finden, welcher die Summe der n ersten Glieder einer unendlichen Reihe um so genauer darstellt, je grösser man n annimmt, heisst: die unendliche Reihe summiren. Die Summirung setzt also voraus, dass die Reihe convergire.

Das umgekehrte Verfahren — das Verfahren, eine unendliche Reihe von gegebener Form zu finden, deren Grenze einem gegebenen Ausdrucke A gleich ist, heisst, diesen Ausdruck in eine unendliche Reihe entwickeln.

Lässt sich bei der Summation einer unendlichen Reihe, die wir F nennen, und um ein bestimmtes Bild vor Augen zu haben, als eine nach Potenzen von x fortschreitende denken wollen, die

Summe der ersten n Glieder, deren Aggregat durch F_n bezeichnet werden mag in zwei Theile $A + N_n$ zerlegen, von denen der erste Theil, A, unabhängig von der Gliederzahl n ist, der andere, N, sich mit n zugleich ändert, so ist A die Grenze von F für jeden Werth von x, für welchen N_n sich bei unendlich gross werdendem n der Grenze Null nähert, und man darf für diese Werthe von x die Gleichung $\lim F = A$ mit der Gleichung $F = A$ vertauschen. Für jeden anderen Werth von x ist noch $F = A + N_\infty$ eine keinen Widerspruch enthaltende Ausdrucksform, da F_n mit $A + N_n$ zugleich bei zunehmendem n über alle Grenzen hinauswächst, wenn $N_\infty = \infty$ ist, und F_n dieselbe Unbestimmtheit zeigt, wie $A + N_\infty$, wenn N_n mit zunehmendem n hin und her schwankende Werthe annimmt. Die Gleichung $F = A$ dagegen verliert wegen des fehlenden Gliedes N_∞, in diesen Fällen ihre Geltung.

Bekommt man umgekehrt bei der Entwickelung eines Ausdruckes A in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe eine nur zwischen bestimmten (endlichen) Grenzwerthen von x convergirende Reihe F, so lässt sich vermuthen (und die Differenzialrechnung rechtfertigt diese Vermuthung), dass F_n bei der Summirung einen Ausdruck $A + N_n$ geliefert haben würde, in welchem N_n mit wachsendem n für jene Werthe von x ausschliesslich, die Null zur Grenze hat.

§. 175. *Ueber die Entwickelung der Summen und Differenzen unendlicher nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitender Reihen in eine Reihe von derselben Form.*

Sind die gegebenen Reihen A und B, und ist $A = S_n + \alpha$, $B = s_n + \beta$, wo S_n die Summe der ersten $n + 1$ Glieder der Reihe A, s_n die Summe der ersten $n + 1$ Glieder der Reihe B bezeichnet, und mithin das niedrigste Glied der Reihenreste α und β das mit dem Faktor x^{n+1} versehene ist — so hat man

$$A \pm B = (S_n + \alpha) \pm (s_n + \beta) = (S_n \pm s_n) + (\alpha \pm \beta).$$

Ordnet man nun die Glieder von $A \pm B$ nach Potenzen von x, und bezeichnet durch Σ_n die Summe der ersten $n + 1$ Glieder dieser Entwickelung, so wird offenbar $\Sigma_n = S_n \pm s_n$. Sind ferner A und B für alle zwischen a und b liegende Werthe von x convergent, d. h. sind α und β, wenn n hinreichend gross genommen worden ist, für die Werthe von x zwischen a und b, verschwin-

dend klein, so ist natürlich auch $\alpha \pm \beta$ für diese Werthe verschwindend klein, und mithin Σ_n unmerklich wenig vom Werthe von $A \pm B$ abweichend — oder mit anderen Worten: Convergiren die Reihen A und B zwischen gewissen Grenzen, so convergirt auch die Entwickelung ihrer Summe und Differenz zwischen eben diesen Grenzen.

War die Convergenz von A und B zwischen $x = a$ und $x = b$ unabhängig von den Gliederzeichen, so ist natürlich auch die der Entwickelung von $A \pm B$ von den Gliederzeichen unabhängig.

§. 176. *Die Entwickelung des Produkts zweier unendlichen nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitenden Reihen A und B in eine Reihe, die gleichfalls nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitet, ist dem Produkte AB gleich, sobald A und B unabhängig von den Gliederzeichen convergiren — und falls A und B durch Zeichenwechsel convergiren, so oft die Entwickelung von AB convergent ist.*

I. Nachweis für den Fall, dass die Reihenglieder reell sind. Haben A, B, S_n, s_n, α, β dieselbe Bedeutung, wie im vorigen §., so hat man

(17) $$A.B = (S_n + \alpha)(s_n + \beta) = S_n s_n + S_n \beta + s_n \alpha + \alpha\beta.$$

Setzen wir dabei voraus, dass A und B zwischen $x = a$ und $x = b$ convergiren, dass also für hinreichend grosse n, α und β verschwindend klein sind, so oft x zwischen a und b liegt: so hat für diese Werthe von x, A und B, also auch $A.B$, und hiemit zugleich die gleichgeltende Summe $S_n s_n + S_n\beta + s_n\alpha + \alpha\beta$ einen endlichen Werth, und es unterscheidet sich dann der Werth von $S_n s_n$ von dem Werthe von $A.B$ nur unmerklich wenig, weil $S_n\beta$, $s_n\alpha$, $\alpha\beta$ (insofern S_n und s_n von endlichem Werthe und α und β verschwindend klein sind) nur einen verschwindend kleinen Werth haben (s. §. 152, 1).

Denken wir ferner das Produkt $A.B$ nach der Umformungsregel des §. 40 nach Potenzen von x entwickelt und die Summe der ersten $m+1$ Glieder durch Σ_m vorgestellt, so wird diese Entwickelung convergiren, sobald für hinreichend grosse Werthe von m, Σ_m sich nur unmerklich von AB oder (da für die zwischen a und b liegenden Werthe von x, $A.B$ nur unmerklich wenig von $S_n s_n$ abweicht) von $S_n s_n$ unterscheidet.

Dass nie genau $\Sigma_m = S_n s_n$ werden könne, sieht man sogleich. Wird nämlich $S_n s_n$ nach Potenzen von x geordnet, so bilden sich Glieder, deren letztes die Form kx^{2n} hat, also im Ganzen $2n+1$ Glieder. Vergleichen wir diese mit den Gliedern derjenigen Summe Σ_m, welche gleichfalls in ihrer Entwickelung bis zu x^{2n} geht, d. h. mit Σ_{2n}, so finden wir die ersten $n+1$ Glieder in beiden Entwickelungen (in $S_n s_n$ und in Σ_{2n}) identisch; die folgenden n Glieder aber in beiden Entwickelungen mit verschiedenen Coefficienten versehen. Die Entwickelung Σ_{2n} enthält sämmtliche mit x^{n+1}, x^{n+2}, . . . x^{2n} versehene Glieder, welche $A.B$ zu liefern im Stande ist; die Entwickelung von $S_n s_n$ dagegen nur einen Theil dieser Glieder, während der andere Theil noch in $S_n\beta$ und $s_n\alpha$ steckt.

Je grösser n genommen wird, desto grösser ist demnach die Zahl der Glieder, welche in Σ_{2n} und $S_n s_n$ ungleiche Coefficienten haben, und es wäre daher nicht undenkbar, dass es Fälle gäbe, in denen für keinen einzigen Werth von n, der Unterschied zwischen Σ_{2n} und $S_n s_n$ verschwindend klein wird, und daher wohl $S_n s_n$, nicht aber Σ_{2n} als Grenze des Werthes von $A.B$ dienen kann.

Es lässt sich aber zeigen, dass wenigstens für diejenigen Werthe von x, für welche A und B unabhängig von den Gliederzeichen convergiren, $\Sigma_{2n} - S_n s_n$ für wachsende Werthe von n verschwindend klein, also $AB = \Sigma_\infty$ wird, und daher dann auch die Entwickelung von $A.B$ eine convergente Reihe gibt. — Der Beweis ist folgender.

Es sei

$$A = S_n + \alpha = u + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ . \ . \ . \text{ in inf.}$$

$$B = s_n + \beta = v + v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3 + \ . \ . \ . \text{ in inf.},$$

also $S_0 = u$, $S_1 = u + u_1 x$, $S_2 = u + u_1 x + u_2 x^2$, etc.

$s_0 = v$, $s_1 = v + v_1 x$, $s_2 = v + v_1 x + v_2 x^2$, etc.

Alsdann hat man, wenn

$$S_0 v_{2n} x^{2n} + S_1 v_{2n-1} x^{2n-1} + S_2 v_{2n-2} x^{2n-2} + \dots S_{n-1} v_{n+1} x^{n+1} = U$$

$$s_0 u_{2n} x^{2n} + s_1 u_{2n-1} x^{2n-1} + s_2 u_{2n-2} x^{2n-2} + \dots s_{n-1} u_{n+1} x^{n+1} = V$$

gesetzt wird, $\Sigma_{2n} = S_n s_n + U + V$.

Sind ferner u', u_1', u_2', . . . v', v_1', v_2', . . . die numerischen Werthe resp. von u, $u_1 x$, $u_2 x^2$, ... v, $v_1 x$, $v_2 x^2$, ... und ist $S' = u' + u_1' + u_2' + \dots$ in inf., $s' = v' + v_1' + v_2' + \dots$ in inf., so stellen S' und s' unendliche Reihen vor, welche für alle Wer-

the von x zwischen $x = a$ und $x = b$ convergiren, da sie aus den Reihen A und B dadurch hervorgehen, dass in ihnen für die einzelnen Glieder ihre numerischen Werthe gesetzt werden, und A und B der Voraussetzung gemäss nach dieser Vertauschung noch convergent bleiben. Ueberdies bemerke man, dass S' grösser als u', $u' + u_1'$, $u' + u_1' + u_2'$, $u' + u_1' + u_2' + u_3'$, etc., also numerisch grösser als S_0, S_1, S_2, S_3, etc. ist, und dass daher

$$U < S' (v_{2n}x^{2n} + v_{2n-1}x^{2n-1} + v_{2n-2}x^{2n-2} + \dots v_{n+1}x^{n+1}),$$

und um so mehr (numerisch genommen)

(18) $$U < S' (v_{2n}' + v_{2n-1}' + v_{2n-2}' + \dots . v_{n+1}')$$

ist. Ebenso folgt, da s' numerisch grösser als s_0, s_1, s_2, etc. ist,

(19) $$V < s' (u_{2n}' + u_{2n-1}' + u_{2n-2}' + \dots u_{n+1}').$$

Da nun die Reihen, welche in den Ausdrücken (18) und (19) mit S' und s' multiplicirt sind, Theile vom Reste der convergenten Reihen s' und S' sind, so können sie für ein hinreichend grosses n sich nur sehr wenig von Null unterscheiden, und müssen endlich unendlich klein werden. Demnach werden nach §. 152,1 auch die gesammten Produkte in (18) und (19) wegen des endlichen Werthes der Faktoren S' und s' unendlich klein, so dass folglich $S_n s_n + U + V$, d. h. Σ_{2n}, unendlich wenig verschieden von $S_n s_n$, und somit die Entwickelung von $A.B$ eine convergente sein muss.

Man kann sich aber noch bestimmter, wie folgt, aussprechen:

Convergiren die Reihen A und B für alle Werthe von x zwischen a und b unabhängig von den Gliederzeichen, so convergirt auch die nach Potenzen von x geordnete Entwickelung von $A.B$ für dieselben Werthe von x und gleichfalls unabhängig von den Gliederzeichen.

Um sich nämlich zu überzeugen, dass die Convergenz der Entwickelung von $A.B$ unabhängig von den Gliederzeichen bestehen bleibt, bemerke man, dass wenn man in derselben alle Glieder mit ihren numerischen Werthen vertauscht, die Reihe identisch mit $S.'s'$ wird, also nach dem eben Bewiesenen zwischen $x = a$ und $x = b$ convergirt, weil S' und s' zwischen diesen Grenzen convergiren.

Beruht die Convergenz von A und B für einen Werth von x nur auf dem Zeichenwechsel der Glieder (s. 164, IV), so ist

die Entwickelung von AB nicht nothwendig für dieses x convergent.

So ist z. B. die Reihe $\frac{1}{\sqrt[4]{1}} - \frac{x}{\sqrt[4]{2}} + \frac{x_2}{\sqrt[4]{3}} - \frac{x^4}{\sqrt[4]{4}} + \ldots$ in inf. für $x = 1$ durch Zeichenwechsel noch convergent, nicht aber mehr die Entwickelung des Produkts derselben mit sich selbst, d. h. nicht mehr

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1}} - \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)x + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(2.2)}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)x^2 - \text{etc.} \ldots\text{*)}$$

Man kann indess behaupten, dass wenn A und B nur durch Zeichenwechsel convergiren, die Entwickelung von AB noch allemal dem Produkte AB gleich ist, so oft diese Entwickelung convergirt.

Ist nämlich die Entwickelung von $A.B$ convergent und n so gross gewählt, dass ihre Summe von Σ_{2n} nur um einen verschwindend kleinen Werth verschieden ist, so ist auch $\Sigma_{4n} - \Sigma_{2n}$ nur verschwindend klein. Da nun

$$S_{2n}s_{2n} = S_n s_n + U + V + (S_{2n} - S_n)(s_{2n} - s_n) = \Sigma_{2n} + (S_{2n} - S_n)(s_{2n} - s_n)$$

ist, und wegen der Convergenz von A und B, $S_{2n} - S_n$ und $s_{2n} - s_n$, also auch $(S_{2n} - S_n)(s_{2n} - s_n)$ einen verschwindend kleinen Werth hat, so kann mit zunehmendem n der Unterschied von $S_{2n}s_{2n}$ und Σ_{2n} unter jeden noch so kleinen Werth herabsinken, und folglich auch der Unterschied zwischen $S_{2n}\, s_{2n}$ und dem von Σ_{2n} nur unendlich wenig abweichenden Σ_{4n}. Die Gleichung $\Sigma_{4n} = S_{2n}\, s_{2n}$, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung $\Sigma_{2n} = S_n s_n$ wird also um so genauer erfüllt, je mehr das n ins Unbestimmte wächst, d. h. es kann sich die Entwickelung von AB nur unendlich wenig von dem Werthe des Produkts AB unterscheiden, *q. e. d.*

II. Nachweis für den Fall, dass die Reihenglieder imaginär sind. Wenn der Modulus von $p+qi$, d. h. $\sqrt{(p^2+q^2)}$, durch r vorgestellt wird, so ist offenbar

$$p + qi = r\left(\frac{p}{r} + i\,\frac{q}{r}\right),$$

*) Man vergleiche *Schlömilch*: Handbuch der mathematischen Analysis. Jena 1845. I. p. 125.

und dabei übersteigt der numerische Werth von $\frac{p}{r}$ und $\frac{q}{r}$ nie die Einheit. Man kann daher, falls die Glieder in A und B imaginär sind, $u = r(\mu + i\nu)$, $u_1 x = r_1(\mu_1 + i\nu_1)$, $u_2 x^2 = r_2(\mu_2 + i\nu_2)$, etc. und allgemein $u_m x^m = r_m(\mu_m + i\nu_m)$ setzen, wenn man unter $r, r_1, r_2, \ldots r_m$ den Modulus resp. von $u, u_1 x, u_2 x^2, \ldots u_m x^m$ versteht, und unter $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$, etc. bestimmte reelle Werthe denkt, von denen man weiss, dass sie numerisch genommen nie grösser als Eins sind.

Man hat alsdann $S_0 = r\mu + ir\nu$

$$S_1 = (r\mu + r_1\mu_1) + i(r\nu + r_1\nu_1)$$

$$S_2 = (r\mu + r_1\mu_1 + r_2\mu_2) + i(r\nu + r_1\nu_1 + r_2\nu_2), \text{ etc.}$$

so dass, wenn wir der Kürze wegen die reellen Ausdrücke $r\mu$, $r\mu + r_1\mu_1$, $r\mu + r_1\mu_1 + r_2\mu_2$, etc. durch S_0', S_1', S_2', etc. bezeichnen, sowie die reellen Ausdrücke $r\nu$, $r\nu + r_1\nu_1$, $r\nu + r_1\nu_1 + r_2\nu_2$, etc. durch S_0'', S_1'', S_2'', etc.: die Gleichungen

$$S_0 = S_0' + iS_0', \; S_1 = S_1' + iS_1', \; S_2 = S_2' + iS_2'', \text{ etc.}$$

entstehen und mithin $S_n' + iS_n''$ für ein unendlich grosses n in A übergeht.

Ebenso möge $v = \varrho(\vartheta + i\varkappa)$, $v_1 x = \varrho_1(\vartheta_1 + i\varkappa_1)$, $v_2 x^2 = \varrho_2(\vartheta_2 + i\varkappa_2)$, etc. sein, wo $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$, etc. die Moduli von $v, v_1 x_1, v_2 x^2$, etc. vorstellen, und $\vartheta, \varkappa, \vartheta_1, \varkappa_1, \vartheta_2, \varkappa_2$, etc. reell und numerisch nicht grösser als Eins sind. Bezeichnet man ferner $\varrho\vartheta$ durch s_0', $\varrho\varkappa$ durch s_0'' und setzt allgemein

$$s_m' = \varrho\vartheta + \varrho_1\vartheta_1 + \varrho_2\vartheta_2 + \ldots \varrho_m\vartheta_m, \; s_m'' = \varrho\varkappa + \varrho_1\varkappa_1 + \varrho_2\varkappa_2 + \ldots \varrho_m\varkappa_m,$$

so hat man noch

$$s_0 = s_0' + is_0'', \; s_1 = s_1' + is_1', \; s_2 = s_2' + is_2'', \text{ etc. } s_m = s_m' + is_m'',$$

und daher für ein unendlich grosses n, $s_n' + is_n'' = B$. Endlich mögen (S_m'), (S_m''), (s_m'), (s_m'') die numerischen Werthe von S_m', S_m'', s_m', s_m'' bedeuten.

Die Behauptung, dass die Entwickelung von AB dem Produkte AB gleich sei, wenn A und B unabhängig von den Gliederzeichen convergiren, d. h. wenn $(S_n') + i(S_n'')$ und $(s_n') + i(s_n'')$ für ein ins Unbestimmte wachsendes n noch convergent sind, ist offenbar begründet, sobald sich darthun lässt, dass unter dieser Voraussetzung auch hier die obigen Reihen U und V für ein hinreichend grosses n verschwindend kleine Werthe haben.

Was den Werth von U betrifft, so kann man denselben durch $U'+iU''$ vorstellen, wenn

$$U' = S_0\varrho_{2n}\vartheta_{2n} + S_1\varrho_{2n-1}\vartheta_{2n-1} + \ldots S_{n-1}\varrho_{n+1}\vartheta_{n+1},$$
$$U'' = S_0\varrho_{2n}\varkappa_{2n} + S_1\varrho_{2n-1}\varkappa_{2n-1} + \ldots S_{n-1}\varrho_{n+1}\varkappa_{n+1}$$

gedacht wird. Es wird daher U die geforderte Bedingung erfüllen, sobald zugleich U' und U'' mit wachsendem n verschwindend klein werden. Es ist aber

$$U' = (S_0'\varrho_{2n}\vartheta_{2n} + S_1'\varrho_{2n-1}\vartheta_{2n-1} + \ldots S_{n-1}'\varrho_{n+1}\vartheta_{n+1})$$
$$+ i(S_0''\varrho_{2n}\vartheta_{2n} + S_1''\varrho_{2n-1}\vartheta_{2n-1} + \ldots S_{n-1}''\varrho_{n+1}\vartheta_{n+1}) = G+iH,$$

und dabei, wenn (ϑ_{2n}), (ϑ_{2n-1}), etc., die numerischen Werthe von ϑ_{2n}, ϑ_{2n-1}, etc. bezeichnen,

$$G \lesseqgtr (S_0')\varrho_{2n}(\vartheta_{2n}) + (S_1')\varrho_{2n-1}(\vartheta_{2n-1}) + \ldots (S_{n-1}')\varrho_{n+1}(\vartheta_{n+1}),$$
$$H \lesseqgtr (S_0'')\varrho_{2n}(\vartheta_{2n}) + (S_1'')\varrho_{2n-1}(\vartheta_{2n-1}) + \ldots (S_{n-1}'')\varrho_{n+1}(\vartheta_{n+1}),$$

mithin auch, da $(S_n') > (S_0')$, (S_1'), (S_2'), etc. und $(S_n'') > (S_0'')$, (S_1''), (S_2''), etc. ist, wenn man $\varrho_{2n}(\vartheta_{2n}) + \varrho_{2n-1}(\vartheta_{2n-1}) + \ldots + \varrho_{n+1}(\vartheta_{n+1}) = K$ setzt,

$$G < (S_n')K, \quad H < (S_n'')K.$$

Folglich wird (da (S_n') und (S_n'') der Voraussetzung nach endliche Werthe behalten, wie gross man auch n nehmen mag, und K als Theil des Restes derjenigen Reihe, die aus der Reihe B hervorgeht, wenn deren Glieder durch ihre numerischen Werthe vertreten werden, bei hinlänglich grossem n unendlich klein wird) sowohl G als H, und demnach auch U' bei hinreichend grossem n unendlich klein. Ebenso ist es mit U'', so dass in der That auch U verschwindend klein sein muss.

Für V, welches sich auf A und B so bezieht, wie U auf B und A, gilt natürlich dasselbe, wie für U, und somit ist ausser Zweifel gestellt, dass auch unter den jetzt gestellten Bedingungen die Entwickelung von AB mit AB selber vertauschbar ist.

Was die Behauptung anlangt, dass das Produkt AB seiner Entwickelung gleich sei, so oft diese convergirt, sollten auch A und B nur durch Zeichenwechsel convergent sein, so erkennt man sogleich, dass der obige, sich auf Reihen mit reellen Gliedern beziehende Beweis noch hier passend bleibt, weil nach §. 152, 3 auch das Produkt zweier imaginär unendlich kleinen Ausdrücke wiederum unendlich klein ist.

Zusatz 1. Wenn γ der grösste Werth von x ist, für den die Reihe A, deren Glieder reell sein mögen, noch convergirt, so muss sich der numerische Werth von $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, den wir durch δ_n bezeichnen wollen, mit zunehmendem n der Grenze $\frac{1}{\gamma}$ nähern. Denn der Quotient aus dem nten und $(n-1)$ten Gliede der Reihe A ist $\frac{u_n}{u_{n-1}}x$; wäre also $\lim \delta_n > \frac{1}{\gamma}$, so würde der numerische Werth dieses Quotienten für $x = \gamma$ bei wachsendem n grösser als Eins werden, und daher A für $x = \gamma$ divergiren; und wäre $\lim \delta_n < \frac{1}{\gamma}$, etwa $= \frac{1}{\gamma + h}$, so würde der numerische Werth jenes Quotienten sich der Grenze $\frac{x}{\gamma + h}$ nähern, also die Reihe A gegen die Voraussetzung noch für alle Werthe von x convergiren, die zwischen γ und $\gamma + k$ liegen, wenn unter k ein beliebiger zwischen 0 und h liegender endlicher Werth gedacht wird.

Weil aber demnach die Grenze des numerischen Werthes von $\frac{u_n}{u_{n-1}}x$, gleich $\frac{x}{\gamma}$ ist, so convergirt die Reihe A für alle Werthe von x, die numerisch kleiner als γ sind, und zwar unabhängig von den Gliederzeichen; soll also dieselbe noch für $x = \gamma$ convergiren, so kann dies nur durch Zeichenwechsel geschehen. Wir schliessen hieraus, dass eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe, wenn sie überhaupt für irgend welche Werthe von x convergirt, bloss für einen Werth γ von x oder höchstens für zwei Werthe von x (von denen der zweite $-\gamma$ sein würde, wenn der erste γ ist) lediglich durch Zeichenwechsel convergiren kann, und dass dieselbe dann unabhängig von den Gliederzeichen convergirt für jeden Werth von x, der numerisch kleiner als γ ist.

Hieraus geht nun hervor, dass wenn resp. γ und γ' die äussersten Werthe von x sind, für welche die Reihen A und B convergiren — unbedingt das Produkt AB seiner Entwickelung gleich

sein wird für jeden Werth von x, der numerisch kleiner als γ oder γ' ist, je nachdem $\gamma < \gamma'$ oder $\gamma > \gamma'$ ist; sowie in Folge des §. 166, dass diese Gleichheit allemal für einen bestimmten Intervall von Werthen von x stattfinden wird, so oft in keiner der Reihen A und B ein Coefficient unendlich viel mal grösser als der vorhergehende ist.

Zusatz 2. Dass das Produkt zweier unendlichen, unabhängig von den Vorzeichen convergirenden Reihen, welche **nicht** nach Potenzen eines x fortlaufen, in derselben Weise umgeformt werden darf, wie wenn dieselben nach Potenzen eines Veränderlichen fortschritten, d. h. dass man das Produkt

$$(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ in inf.})\ (v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots \text{ in inf.})$$

durch die Reihe

$$k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

(wo allgemein

$$k_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \ldots u_n v_0$$

ist) ersetzen darf, folgt aus dem obigen Beweise, wenn man ihn unter der Voraussetzung, dass $x = 1$ sei, führt

§. 177. *Von der Anwendbarkeit der Methode der unbestimmten Coefficienten.*

Bei der Lösung der Aufgabe, einen Ausdruck A, der den Buchstaben x in sich enthält, in eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe umzuformen, bedient man sich häufig der **Methode der unbestimmten Coefficienten.**

Diese Methode besteht darin, dass man die gesuchte Reihe — wir wollen dieselbe durch M bezeichnen — mit vorläufig unbestimmt gelassenen Coefficienten hinstellt, und die Eigenschaften des Ausdrucks A benutzt, um eine Gleichung zwischen zwei Reihen zu gewinnen, in deren Coefficienten die Coefficienten der gesuchten Reihe M mit enthalten sind. Die Gleichheit der Reihen führt dann nach §. 171 auf eine Reihe von Gleichungen zwischen ihren Coefficienten, welche zur Bestimmung der unbestimmt gelassenen Coefficienten von M dienen.

Es ist aber zu beachten, dass hierbei die Richtigkeit des Resultats nur dann als verbürgt wird angesehen werden können, wenn man vorher weiss, dass A wirklich sich nach Potenzen von x

entwickeln lasse, weil im entgegengesetzten Falle das Verfahren auf einer unrichtigen Voraussetzung beruhen würde.

Wir legen der näheren Erörterung ein Beispiel zum Grunde.

Ist $(2+x-3x^4):(1+2x-x^2)$ nach Potenzen von x zu entwickeln, so setzt man vorläufig

$$\frac{2+x-3x^4}{1+2x-x^2} = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \text{ in inf.},$$

und leitet hieraus, indem man beiderseits mit dem Divisor $1+2x-x^2$ multiplicirt, die Gleichung

$$2+x-3x^4 = (1+2x-x^2)(a+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\ldots \text{ in inf.})$$

her. Wenn man alsdann die Multiplikation zur Rechten ausführt und nach Potenzen von x ordnet, so erhält man eine Gleichung zwischen zwei Reihen, nämlich:

$$2+x-3x^4 = a+(a_1+2a)x+(a_2+2a_1-a)x^2+(a_3+2a_2-a_1)x^3$$
$$+(a_4+2a_3-a_2)x^4+(a_5+2a_4-a_3)x^5+ \text{ etc.}$$

Da sich nun $2+x-3x^4$ auch als unendliche Reihe ansehen lässt, in welcher die Coefficienten von x^2, x^3, x^5, x^6, x^7, etc. den Werth Null haben, so fordert der §. 171, wenn diese Gleichung bestehen soll, dass die Coefficienten der Reihe auf der rechten Seite den correspondirenden Coefficienten der auf der linken Seite der Gleichung stehenden Reihe gleich seien, also dass die Gleichungen

$a=2$, $a_1+2a=1$, $a_2+2a_1-a=0$, $a_3+2a_2-a_1=0$,
$a_4+2a_3-a_2=-3$, $a_5+2a_4-a_3=0$, $a_6+2a_5-a_4=0$, etc.,

erfüllt werden. Da diese Gleichungen in ebenso grosser Anzahl vorhanden sind, als man Coefficienten zu bestimmen hat, so führt ihre Auflösung eine vollständige Lösung der Aufgabe herbei.

Man findet so aus der zweiten Gleichung

$$a_1=1-2a=1-4=-3,$$

aus der dritten Gleichung

$$a_2=a-2a_1=2+6=8,$$

aus der vierten Gleichung

$$a_3=a_1-2a_2=-3-16=-19,$$

aus der fünften Gleichung

$$a_4=a_2-2a_3-3=8+38-3=43,$$

aus der sechsten Gleichung

$$a_5=a_3-2a_4=-86-19=-105,$$

aus der siebenten Gleichung

$$a_6 = a_4 - 2a_5 = 43 + 210 = 253\,,$$

aus der achten Gleichung

$$a_7 = a_5 - 2a_6 = -105 - 506 = -611\,,$$

etc., so dass sich ergibt:

$$\frac{2+x-3x^4}{1+2x-x^2} = 2 - 3x + 8x^2 - 19x^3 + 43x^4 - 105x^5 + 253x^6 - 611x^7 + \text{ etc.}$$

Diese Gleichung darf indess nur dann als sicher richtig angenommen werden, wenn man vorauszusetzen berechtigt ist, dass der gegebene Quotient die Form einer Reihe anzunehmen fähig ist, und mithin für a, a_1, a_2, etc. in der That Werthe existiren. Letzteres wird nun wirklich der Fall sein, wenn das Produkt der gefundenen Reihe mit dem Divisor $1+2x-x^2$, oder (was nunmehr hier dasselbe ist) die nach Potenzen von x geordnete Entwikkelung dieses Produkts, den Dividenden $2+x-3x^4$ zur Grenze hat. Nach §. 176 findet dies in der That zwischen den Grenzen $x=\alpha$ und $x=\beta$ statt, sobald innerhalb eben dieses Intervalles die beiden Faktoren $1+2x-x^2$ und $2-3x+8x^2-$ etc., unabhängig von den Vorzeichen convergiren. Die Reihe $1+2x-x^2$ ist aber als endliche Reihe für eine unbedingt convergente anzusehen, und es wird daher die gefundene Reihe zwischen denselben Grenzwerthen von x, für die sie unabhängig von den Vorzeichen convergirt, als Werth des gegebenen Quotienten angesehen werden dürfen. Liesse sich demnach der Quotient nicht nach positiven ganzen Potenzen von x entwickeln, so müsste sich dies entweder dadurch kund geben, dass die gefundene Reihe sich unter keinen Umständen als convergent zeigt, oder dadurch dass man bei der Bestimmung der Coefficienten auf Widersprüche kommt, also z. B. für a, a_1, a_2, etc. werthlose Formen erhält *).

*) Wäre z. B. der Nenner des Quotienten $2x-x^2$ statt $1+2x-x^2$ gewesen (in welchem Falle eine Entwickelung nach positiven ganzen Potenzen nicht existirt), so würde man durch das obige Verfahren zunächst auf $2=0$, also auf eine Ungereimtheit kommen. Und hätte man als Nenner den Ausdruck $m+px+qx^2$ gehabt, so würde man sowohl für a als für die übrigen Coefficienten Ausdrücke erhalten, welche für $m=0$ in $1:0$ übergehen, und hieraus erkennen, dass die geforderte Entwickelung unmöglich wird, so oft m den Werth Null hat.

Der gegebene Quotient verliert alle Bedeutung für diejenigen beiden Werthe von x, für welche der Divisor $1+2x-x^2$ gleich Null wird; man kann daher im Voraus schliessen, wenn γ den numerisch kleinsten dieser beiden Werthe vorstellt, dass die Convergenzgrenzen nicht numerisch grösser als γ sein können. In der That wird, wenn x sich unendlich wenig von γ unterscheidet, der Werth des Quotienten unendlich gross, die gefundene Reihe also, wenn sie dem Quotienten bis zu $x=\gamma$ hin noch gleich sein soll, sicher eine divergente; wäre aber die Reihe noch für $x=k$ convergent, k numerisch grösser als γ gedacht, so müsste sie nach dem Früheren auch für jeden zwischen 0 und k liegenden Werth, und mithin für $x=\gamma$ convergiren, was, wie wir so eben gesehen haben, nicht der Fall ist.

Zweiter Abschnitt.

Von einigen besonderen nach Potenzen fortschreitenden Reihen.

A. Die binomische und polynomische Reihe.

§. 178. *Erklärung der Faktoriellen und Binomial-Coefficienten.*

1. Ein mehrgliedriges Produkt, in welchem die Differenz zwischen jedem Faktor und dem nächst vorhergehenden einerlei Werth hat, nennt man eine Faktorielle oder eine Fakultät. Beginnt das Produkt mit dem Gliede a, und stellt d die Differenz je zwei auf einander folgender Faktoren und m die Anzahl der Faktoren vor, d. h., ist die Faktorielle gleich

$$a(a+d)(a+2d)(a+3d)\,\ldots\,(a+[m-1]d),$$

so bezeichnet man dieselbe durch $a^{m|d}$ oder durch $[a,d]^m$, und nennt a die Basis, d die Differenz, und m den Exponenten der Faktorielle. Die Ausdrücke a und d können beliebig, reell oder imaginär, sein, während m natürlich nur eine absolute ganze Zahl vorstellen darf *). — Wie man sieht, geht für $d=0$ die vorstehende Faktorielle in die ganze Potenz a^m über.

Der Gleichförmigkeit wegen denkt man sich unter $a^{2|d}$ oder $[a,d]^2$ (auf welches Zeichen streng genommen die obige Erklärung nicht passt, weil bei zwei Faktoren von einer Gleichheit der Fak-

*) Man hat zwar, dem Zeichen $[a,d]^m$ für negative und gebrochene Zahlenwerthe von m einen geeigneten Sinn unterlegend, auch Faktoriellen mit negativen und gebrochenen Exponenten in die Analysis eingeführt; doch lassen wir dies unberührt, weil für das Folgende nur die oben definirten besonderen Faktoriellen von Interesse sind.

torendifferenzen nicht gesprochen werden kann) das Produkt $a(a+d)$; so wie unter $a^{1|d}$ oder $[a,d]^1$ die Basis a.

Die Faktorielle $1^{m|1}$ oder $[1,1]^m$, welche das Produkt der ersten m ganzen Zahlen vorstellt, bezeichnet man ihres häufigen Vorkommens wegen zuweilen durch das einfachere Zeichen $m!$, und diese Bezeichnung werden auch wir in der Folge beibehalten. Demnach wird also z. B. $1!$ mit der Eins selbst zusammenfallen.

2. Der Quotient der Faktoriellen $[n,-1]^m$ und $[1,1]^m$, d. h. der Quotient

$$21)\qquad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-[m-1])}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\;\ldots\;m}$$

wird der mte Binomial-Coefficient von n genannt. Wir werden denselben durch ${}^m n$ bezeichnen und n dessen Grundzahl, m dessen Zeiger nennen.

Hiernach ist also z. B. ${}^1 n = n$; ferner ist, wenn n eine absolute ganze Zahl vorstellt, ${}^n n = 1$ (weil für $m=n$ in ${}^m n$ Zähler und Nenner einander gleich werden), und ${}^m n = 0$, so oft n eine (absolute) ganze Zahl und dabei kleiner als m ist (weil in diesem Falle der Zähler von ${}^m n$ den Faktor $n-n$ in sich aufnimmt).

§. 179. *Eigenschaften der Binomial-Coefficienten.*

1. Sind α, β, n ganze Zahlen und ist $n=\alpha+\beta$, so ist auch

$${}^\alpha n = {}^\alpha(\alpha+\beta) = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!},$$

wie man sich sogleich überzeugen kann, wenn man in der Gleichung

$${}_\alpha(\alpha+\beta) = \frac{(\beta+\alpha)(\beta+\alpha-1)(\beta+\alpha-2)\ldots\ldots(\beta+2)(\beta+1)}{\alpha!}$$

Zähler und Nenner des Quotienten zur Rechten des Gleichheits-Zeichens mit $\beta!$ multiplicirt.

2. Das Produkt aus einem Binomial-Coefficienten ${}^m n$ und der Differenz zwischen seiner Grundzahl und seinem Zeiger ist gleich dem Produkte aus dem folgenden Binomial-Coefficienten und dessen Zeiger $m+1$, d. h. es ist ${}^m n(n-m) = (m+1).\,{}^{m+1}n$.

Es ist nämlich zufolge der Erklärung

$${}^{m+1}n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-[m-1])(n-m)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;\ldots\;.\;m\;.\;(m+1)},$$

welcher Quotient von dem oben für ${}^m n$ angegebenen sich nur da-

durch unterscheidet, dass er im Zähler noch den Faktor $n-m$, im Nenner den Faktor $m+1$ mehr hat, so dass in der That

$$^{m+1}n = {}^m n \frac{n-m}{m+1}$$

ist, und folglich auch

$$(22) \qquad {}^m n(n-m) = (m+1).\, {}^{m+1}n.$$

3. Es ist

$$(23) \qquad {}^m(n+r) = {}^m n + {}^{m-1}n.{}^1r + {}^{m-2}n.{}^2r + {}^{m-3}n.{}^3r + \ldots\ldots {}^{m-s+1}n.{}^{s-1}r$$
$$+ {}^{m-s}n.{}^s r + \ldots + {}^1n.{}^{m-1}r + {}^m r.$$

Beweis. Dass diese Gleichung richtig ist für $m=1$ und $m=2$, erkennt man sogleich. Für $m=1$ geht nämlich dieselbe über in ${}^1(n+r) = {}^1n + {}^1r$, während nach dem vorigen §. ${}^1(n+r) = n+r$, ${}^1n = n$, ${}^1r = r$ ist. Für $m=2$ geht die Gleichung über in ${}^2(n+r)$ $= {}^2n + {}^1n.{}^1r + {}^2r$, oder wenn man die vollständigen Quotienten setzt, in

$$\frac{(n+r)(n+r-1)}{1\;.\;2} = \frac{n(n-1)}{1\;.\;2} + nr + \frac{(r-1)}{1\;.\;2},$$

d. h. in $\dfrac{(n+r)(n+r-1)}{1\;.\;2} = \dfrac{n(n-1)+2nr+r(r-1)}{1\;.\;2}$,

während man nur die Multiplikationen in den Zählern dieser beiden Quotienten auszuführen braucht, um sich von der Gleichheit derselben zu überzeugen.

Lässt sich nun nachweisen, dass, wenn die Gl. (23) für irgend einen Werth von m richtig ist, sie auch für den nächstfolgenden (für den $(m+1)$ten Binomial-Coefficienten) richtig sein muss, so ist ihre Richtigkeit für jeden Werth von m bewiesen; denn, da sie so eben für $m=2$ als richtig erkannt worden ist, so folgt dann die Richtigkeit für $m=3$, daraus die Richtigkeit für $m=4$, etc.

Wir nehmen daher an, die Gleichung sei richtig für irgend einen Werth α von m, d. h. wir setzen voraus

$$(24) \qquad {}^\alpha(n+r) = {}^\alpha n + {}^{\alpha-1}n.{}^1r + {}^{\alpha-2}n.{}^2r + \ldots {}^{\alpha-s+1}n.{}^s r + \ldots {}^1n.{}^{\alpha-1}r + {}^\alpha r,$$

und bilden hieraus nach Nr. 2 den Binomialcoefficienten ${}^{\alpha+1}(n+r)$, indem wir ${}^\alpha(n+r)$ mit der Differenz zwischen Grundzahl und Zeiger, d. h. mit $n+r-\alpha$, multipliciren, und nachgehend durch den neuen Zeiger $\alpha+1$ dividiren, um alsdann zu untersuchen, ob das Resultat in der That mit dem aus Gl. (23) für ${}^{\alpha+1}(n+r)$ sich ergebenden Ausdrucke einerlei Werth habe.

Bemerken wir zu dem Ende, dass $n+r-\alpha$ identisch ist mit folgenden Ausdrücken: $(n-\alpha)+r$, $(n-\alpha+1)+(r-1)$, $(n-\alpha+2)+(r-2)$, ... $(n-\alpha+[s-1])+(r-[s-1])$, $(n-\alpha+s)+(r-s)$, ... $(n-1)+(r-[\alpha-1])$, $n+(r-\alpha)$, und dass man daher, statt jedes Glied der Reihe (24) mit $(n+r-\alpha)$ zu multipliciren, das 1ste Glied derselben mit dem 1sten der eben angeführten Ausdrücke, das 2te Glied mit dem 2ten, das 3te Glied mit dem 3ten, etc. das letzte Glied mit dem letzten dieser Ausdrücke multipliciren darf. Dies ausgeführt, gibt mit Rücksicht auf Gl. (22),

$$ {}^{\alpha}n[(n-\alpha)+r] = {}^{\alpha}n(n-\alpha) + {}^{\alpha}n.r = (\alpha+1).{}^{\alpha+1}n + {}^{\alpha}n.{}^{1}r \;{}^{*)} $$

$$ {}^{\alpha-1}n.{}^{1}r[(n-[\alpha-1])+(r-1)] = {}^{\alpha-1}n(n-[\alpha-1]).{}^{1}r + {}^{\alpha-1}n.r(r-1) = \alpha.{}^{\alpha}n.{}^{1}r + 2.{}^{\alpha-1}n.{}^{2}r \;{}^{**)} $$

$$ {}^{\alpha-2}n.{}^{2}r[(n-[\alpha-2])+(r-2)] = {}^{\alpha-2}n(n-[\alpha-2]).{}^{2}r + {}^{\alpha-2}n.{}^{2}r(r-2) = (\alpha-1).{}^{\alpha-1}n.{}^{2}r + 3.{}^{\alpha-2}n.{}^{3}r $$

. .

$$ {}^{\alpha-s+1}n.{}^{s-1}r[(n-[\alpha-s+1])+(r-s+1)] = {}^{\alpha-s+1}n(n-[\alpha-s+1]).{}^{s-1}r $$
$$ + {}^{\alpha-s+1}n.{}^{s-1}r(r-[s-1]) = (\alpha-s+2).{}^{\alpha-s+2}n.{}^{s-1}r + s.{}^{\alpha-s+1}n.{}^{s}r $$

$$ {}^{\alpha-s}n.{}^{s}r[(n-\alpha+s)+(r-s)] = {}^{\alpha-s}n.(n-[\alpha-s]).{}^{s}r + {}^{\alpha-s}n.{}^{s}r(r-s) = (\alpha-s+1).{}^{\alpha-s+1}n.{}^{s}r + (s+1).{}^{\alpha-s}n.{}^{s+1}r $$

. .

$$ {}^{1}n.{}^{\alpha-1}r[(n-1)+(r-\alpha+1)] = {}^{1}n(n-1).{}^{\alpha-1}r + {}^{1}n.{}^{\alpha-1}r(r-[\alpha-1]) = 2.{}^{2}n.{}^{\alpha-1}r + \alpha.{}^{1}n.{}^{\alpha}r $$

$$ {}^{\alpha}r[n+(r-\alpha)] = n.{}^{\alpha}r + {}^{\alpha}r(r-\alpha) = {}^{1}n.{}^{\alpha}r + (\alpha+1).{}^{\alpha+1}r $$

*) Es ist nämlich ${}^{\alpha}n.(n-\alpha)$ als Produkt des Binomial-Coefficienten ${}^{\alpha}n$ mit der Differenz $n-\alpha$ zwischen Basis und Zeiger nach Nr. 2 gleich dem folgenden Binomial-Coefficienten ${}^{\alpha+1}n$ multiplicirt mit dem neuen Index $\alpha+1$.

**) Es ist nämlich ${}^{\alpha-1}n.(n-\alpha)$ als Produkt des Binomial-Coefficienten ${}^{\alpha-1}n$ mit der Differenz $n-(\alpha-1)$ zwischen Basis und Index nach Nr. 2 gleich dem folgenden Binomial-Coefficienten ${}^{\alpha}n$, multiplicirt mit dem neuen Index α, und aus demselben Grunde ${}^{1}r(r-1)=2.{}^{2}r$.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass die Summe der auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehenden Ausdrücke, durch $\alpha+1$ dividirt, dem der Gl. (23) entnommenen Werthe von ${}^{\alpha+1}(n+r)$ gleichkommt.

Man sieht aber sogleich, dass von den zwei Gliedern eines jeden der vorstehenden zu addirenden Ausdrücke das letzte jedesmal mit dem ersten Gliede des folgenden Ausdrucks sich in ein Produkt zusammenfassen lässt, in welchem der eine Faktor $\alpha+1$ ist. So gibt z. B. das zweite Glied des Ausdrucks in der ersten Zeile und das erste Glied des in der zweiten Zeile stehenden Ausdrucks $(\alpha+1).{}^{\alpha}n.{}^{1}r$; das zweite Glied aus der zweiten und das erste Glied aus der dritten Zeile $(\alpha+1).{}^{\alpha-1}n.{}^{2}r$; das zweite Glied aus der dritten und das erste aus der vierten Zeile $(\alpha+1).{}^{\alpha-2}n.{}^{3}r$; etc. Demnach gibt die Addition sämmtlicher Ausdrücke nach vollzogener Division durch den allen Gliedern gemeinsamen Faktor $\alpha+1$,

$$ {}^{\alpha+1}n + {}^{\alpha}n.{}^{1}r + {}^{\alpha-1}n.{}^{2}r + \ldots {}^{\alpha-s+1}n.{}^{s}r + \ldots {}^{1}n.{}^{\alpha}r + {}^{\alpha+1}r, $$

welche Reihe, wie man sieht, in der That mit dem aus (23) gezogenen Werthe von ${}^{\alpha+1}(n+r)$ übereinstimmt.

§. 180. *Lehrsatz.* Die Reihe

$$ 1 + {}^{1}nx + {}^{2}nx^2 + {}^{3}nx^3 + \ldots \text{ in inf.}, $$

welche man die binomische Reihe nennt, convergirt für reelle Werthe von n unabhängig von den Gliederzeichen, so oft x numerisch kleiner als Eins ist; sie divergirt, wofern sie sich nicht auf eine endliche Reihe reducirt, so oft x numerisch grösser als Eins ist.

Beweis. Dividirt man das $(m+1)$te Glied der vorstehenden Reihe, nämlich ${}^{m}n.x^{m}$, durch das vorhergehende ${}^{m-1}n.x^{m-1}$, so erhält man, da nach Gl. (22)

$$ {}^{m}n = \frac{{}^{m-1}n(n-m+1)}{m} $$

ist,

$$ \frac{{}^{m}nx^{m}}{{}^{m-1}nx^{m-1}} = \frac{n-m+1}{m}\,x = -x\left(1-\frac{n+1}{m}\right). $$

Soll daher die Reihe unabhängig von den Gliederzeichen convergiren, so muss dem §. 164, II zufolge dieser Ausdruck für irgend einen Werth von m, so wie dann für jeden Werth von m, der grösser als dieser ist, um ein Endliches numerisch kleiner als

Eins sein. Da aber $\frac{n+1}{m}$, mag n positiv oder negativ sein, mit wachsendem m ohne Ende der Grenze Null, also $1-\frac{n+1}{m}$ der Grenze Eins, und folglich $x\left(1-\frac{n+1}{m}\right)$ der Grenze x sich nähert, so convergirt in der That die Reihe, für jeden Werth von x, der (um ein Endliches) numerisch kleiner als Eins ist *); sie divergirt (nach §. 165), so oft x numerisch grösser als Eins ist.

Zusatz. Die binomische Reihe divergirt, wofern sie sich nicht auf eine endliche Reihe reducirt, 1) für $x=-1$ stets, und 2) für $x=+1$, so oft $n<-1$ ist.

Da nämlich der numerische Werth von $x\left(1-\frac{n+1}{m}\right)$ für $x=\pm 1$ sich mit wachsendem m der Grenze Eins nähert, so ist eine Convergenz in den hier vorliegenden Fällen nur durch Zeichenwechsel möglich. Andrerseits bemerke man, dass, welchen reellen Werth auch n haben möge, $n-m$ wenigstens von einem gewissen Werthe von m ab negativ wird, und folglich wegen

$$^{m+1}n = {}^{m}n\frac{n-m}{m+1}$$

^{m+1}n positiv oder negativ wird, je nachdem ^{m}n negativ oder positiv ist, d. h. dass wenigstens von einem bestimmten Gliede ab die Binomial-Coefficienten regelmässig das Zeichen wechseln, und

*) Ist $n+1$ positiv, also $n>-1$, und bezeichnet m_1 die kleinste ganze Zahl, welche grösser als $n+1$ ist, so wird $1-\frac{n+1}{m}$ von $m=m_1$ ab kleiner als Eins, also auch der numerische Werth von $x\left(1-\frac{n+1}{m}\right)$ kleiner als der von x, und mithin mit dem numerischen Werth von x zugleich um ein Endliches geringer als Eins. Und ist $n+1<-1$, etwa $=-k$, und der numerische Werth von x einem beliebigen echten Bruch $\frac{\mu}{\mu+\nu}$ gleich (wo μ und ν ganze Zahlen vorstellen), so wird der numerische Werth von $x\left(1-\frac{n+1}{m}\right)$ gleich $\frac{\mu}{\mu+\nu}\left(1+\frac{k}{m}\right)=\frac{\mu m+\mu k}{\mu m+\nu m}$, mithin von dem kleinsten Werthe von m an, welcher $\nu m>\mu k$ macht, um ein Endliches kleiner als Eins.

daher dann die Glieder der binomischen Reihe, wenn $x = -1$ ist, ihr Zeichen nicht mehr ändern. Es ist demnach für $x = -1$ Convergenz unmöglich.

Ist ferner $n < -1$, also $n+1$ negativ, so wird $1 - \frac{n+1}{m}$ stets grösser als Eins sein, und es müssen folglich die numerischen Werthe der Binomial-Coefficienten mit m zugleich wachsen, so dass die binomische Reihe für $x = +1$ trotz des Zeichenwechsels wegen des Zunehmens der numerischen Werthe ihrer Glieder eine divergente sein wird.

Ob die binomische Reihe für $x = +1$ und $n > -1$, in welchem Falle die Glieder abnehmen und das Zeichen wechseln, convergiren werde, behalten wir uns vor, später zu untersuchen.

Anmerkung. Ist n eine absolute ganze Zahl, so werden nach §. 178 alle Binomial-Coefficienten vom nten an der Null gleich; die binomische Reihe wird daher dann eine endliche und ihr letztes Glied ${}^n n x^n$, wegen ${}^n n = 1$, gleich x^n.

Ist dagegen n keine absolute ganze Zahl, so kann keiner der Faktoren des Zählers von ${}^m n$, und mithin auch ${}^m n$ selbst, für keinen Werth von m der Null gleich werden. Die binomische Reihe bleibt daher alsdann stets eine unendliche.

§. 181. *Lehrsatz.* Bezeichnet man die binomische Reihe des §. 180 durch f_n, ferner durch f_r und f_{n+r} diejenigen Reihen, welche aus f_n hervorgehen, wenn resp. r und $n+r$ statt n gesetzt wird, so ist

$$(1) \qquad f_n \cdot f_r = f_{n+r},$$

so oft f_n, f_r und f_{n+r} gleichzeitig convergiren, mögen n, r und x reell oder imaginär sein. — Dieser Fall tritt unter andern ein, wenn f_n und f_r unabhängig von den Gliederzeichen convergiren (also für reelle Werthe von n, r und x, sobald $x^2 < 1$ ist).

Beweis. Man erhält für das Produkt $f_n \cdot f_r$, wenn man die Multiplikation ausführt und die Glieder nach Potenzen von x ordnet,

$$1 + ({}^1n + {}^1r)x + ({}^2n + {}^1n.{}^1r + {}^2r)x^2 + \ldots ({}^mn + {}^{m-1}n.{}^1r + {}^{m-2}n.{}^2r + \ldots {}^1n.{}^{m-1}r + {}^mr)x^m + \ldots \text{ in inf.},$$

oder, mit Rücksicht auf die Gl. (23) des §. 179,

$$1 + {}^1(n+r)x + {}^2(n+r)x^2 + \ldots . {}^m(n+r)x^m + \ldots \text{ in inf.}$$

Dies ist aber nichts anderes als die Reihe f_{n+r}, mithin ist f_{n+r}

die Entwickelung des Produkts $f_n f_r$, und folglich nach §. 176 unter den im Lehrsatze gestellten Bedingungen in der That dem dukte $f_n \cdot f_r$ gleich.

§. 182. *Lehrsatz.* Für jeden positiven ganzen Zahlenwerth von $\mathfrak{m}$ ist

$$\text{(II)} \qquad f_{mn} = (f_n)^m,$$

so oft f_n, f_{2n}, f_{3n}, ... f_{mn} convergiren; insbesondere aber schon, wenn f_n unabhängig von den Gliederzeichen convergirt, bei reellen Werthen von n und x also stets, wenn $x^2 < 1$ ist.

Beweis. Setzt man in (I) für r nach und nach n, $2n$, $3n$, $4n$, ... $(m-1)n$, so erhält man unter den angegebenen Bedingungen: $f_n f_n = f_{2n}$, $f_n \cdot f_{2n} = f_{3n}$, $f_n \cdot f_{3n} = f_{4n}$, $f_n \cdot f_{4n} = f_{5n}$, ... $f_n \cdot f_{(m-1)n} = f_{mn}$. — Multiplicirt man nun alle diese Gleichungen mit einander, so erhält man $(f_n)^m = f_{mn}$, also die Gleichung des Lehrsatzes.

§. 183. *Lehrsatz.* Wenn f_n und f_{-n} convergiren, so ist

$$\text{(III)} \qquad f_n \cdot f_{-n} = 1,$$

mögen n und x reell oder imaginär sein.

Denn setzt man in die Gl. (I) $-n$ statt r, so verwandelt sich dieselbe in $f_n \cdot f_{-n} = f_0$, und diese Gleichung ist eine richtige (da f_n und f_{-n} als convergent vorausgesetzt sind), sobald auch f_0 con- convergirt. Dies ist aber in der That der Fall, weil (wegen ${}^10 = {}^20 = {}^30 = {}^40 = \ldots = 0$) die Reihe f_0, d. h. die Reihe $1 + {}^10.x + {}^00.x^2 + {}^30.x^3 + \ldots$, den bestimmten endlichen Werth Eins hat. Wird aber in der Gleichung $f_n \cdot f_{-n} = f_0$ für die Reihe f_0 ihr Werth 1 gesetzt, so hat man die Gleichung des Lehrsatzes.

§. 184. *Lehrsatz.* Für jeden positiven ganzen Zahlenwerth von $\mathfrak{m}$ ist $\qquad f_m = (1+x)^m$.

Beweis. Die Gl. (II) ist unbedingt richtig, wenn n und $\mathfrak{m}$ absolute ganze Zahlen vorstellen, weil dann f_n und f_{mn} als endliche Reihen (siehe die Anmerkung zu §. 180) zu den convergenten Reihen gezählt werden dürfen. Denkt man demnach $\mathfrak{m}$ als absolute ganze Zahl und setzt $n = 1$, so erhält man $f_m = (f_1)^m$, folglich da $f_1 = 1 + {}^1x + {}^21.x^2 + {}^31.x^3 + \ldots$, d. h. (wegen ${}^11 = 1$, ${}^21 = {}^31 = {}^41 = \ldots = 0$) $f_1 = 1 + x$ ist, $f_m = (1+x)^m$.

§. 185. *Lehrsatz.* Ist $\mathfrak{m}$ eine positive ganze Zahl, so ist noch

$$f_{-m} = (1+x)^{-m},$$

so oft f_{-m} convergent ist, namentlich also bei reellem x, so oft $x^2 < 1$ ist.

Beweis. Die Gl. (III) des §. 183 ist eine richtige, wenn man für n die positive ganze Zahl m setzt, weil alsdann f_m als endliche Reihe, und f_{-m} nach der Voraussetzung convergirt. Es führt dieselbe aber in diesem Falle, wenn man für f_m sogleich die nach §. 184 gleichgeltende Potenz $(1+x)^m$ schreibt, auf $(1+x)^m f_{-m} = 1$, und man hat daher in der That

$$f_{-m} = \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m}.$$

§. 186. *Lehrsatz.* Ist p eine beliebige reelle gebrochene Zahl, etwa gleich $\frac{r}{s}$, wo r eine positive oder negative ganze Zahl, s eine positive ganze Zahl bedeuten soll, so ist für jedes x, welches numerisch kleiner als 1 ist, f_p einem bestimmten Werthe der Wurzel $\sqrt[s]{(1+x)^r}$ gleich.

Beweis. Setzt man in der Gl. (II) $n = p$ und $m = s$, so erhält man, insofern alsdann $mn = sp = s\frac{r}{s} = r$ wird, $f_r = (f_p)^s$. Da nun nach §. 184 und resp. 185, $f_r = (1+x)^r$ ist, so geht diese Gleichung über in $(1+x)^r = (f_p)^s$,
und es ist mithin, da hiernach f_p einen Werth hat, der mit s potenzirt $(1+x)^r$ gibt, $((\sqrt[s]{(1+x)^r}))$ aber alle Werthe vorstellt, welche diese Eigenschaft haben, nothwendig f_p unter den Werthen von $((\sqrt[s]{(1+x)^r}))$ mit begriffen.

§. 187. *Lehrsatz.* Es ist für jeden beliebig reellen gebrochenen Zahlenwerth von p, so oft x numerisch kleiner als Eins ist,

$$f_p = (1+x)^p,$$

wofern unter $(1+x)^p$ der Werth verstanden wird, welcher nach §. 81 mit dem Namen der eindeutigen reellen pten Potenz von $1+x$ zu belegen ist.

Beweis. Man setze wiederum $p = r:s$ (r und s in der Bedeutung des vorigen §. genommen), und bemerke, dass, weil x numerisch kleiner als Eins gedacht werden soll, $1+x$, und folglich auch $(1+x)^r$ positiv, ist. Es hat daher nach §. 73—76 die Wurzel $((\sqrt[s]{(1+x)^r}))$ allemal einen einzigen absoluten Werth, und dieser Werth ist es, welchen man sich nach §. 81 unter der ein-

deutigen reellen Potenz $(1+x)^p$ zu denken hat. Da nun nach §. 186 f_p einem Werthe von $((\sqrt[s]{(1+x)^r}))$ gleich ist, und diese Wurzel nur einen absoluten Werth hat, so muss f_p diesem einen Werth, d. h. der reellen eindeutigen Potenz $(1+x)^p$ gleich sein, sobald sich findet, dass die Reihe f_p allemal positiv ist. Dass aber diese Reihe in der That immer einen positiven Werth hat, ergibt sich wie folgt.

Es lässt sich p stets auf die Form $q+\mathfrak{e}$ bringen, wo q eine positive oder negative ganze Zahl oder Null, und $\mathfrak{e}$ ein positiver oder negativer echter Bruch ist, und alsdann nach §. 181 Gl. (1) f_p durch das Produkt $f_q . f_\mathfrak{e}$ ersetzen. In diesem Produkte ist der erste Faktor f_q jederzeit positiv, weil $f_q = (1+x)^q$ und die Potenz $(1+x)^q$ positiv ist, mag q positiv, negativ oder Null sein; es muss daher auch f_p positiv sein, sobald $f_\mathfrak{e}$ positiv ist.

Dass aber $f_\mathfrak{e}$ positiv ist, erkennt man leicht durch folgende Betrachtung.

Die Reihe $f_\mathfrak{e}$ lässt sich in der Form

$$f_\mathfrak{e} = 1 + {}^1\mathfrak{e}x\left(1 - \frac{1-\mathfrak{e}}{2}x\right) + {}^3\mathfrak{e}x^3\left(1 - \frac{3-\mathfrak{e}}{4}x\right) + {}^5\mathfrak{e}x^5\left(1 - \frac{5-\mathfrak{e}}{6}x\right) + \text{etc.} \ldots$$

schreiben, und alsdann das q so nehmen, dass jedes Glied dieser Reihe positiv wird. Ist nämlich x positiv, so wähle man q so, dass $\mathfrak{e}$ positiv wird. Man nehme also bei positivem p für q die grösste ganze Zahl, welche kleiner als p ist, wenn p unecht gebrochen, und $q=0$, wenn p echt gebrochen ist; bei negativem p, für q die numerisch kleinste negative ganze Zahl, welche numerisch grösser als p ist. Insofern dann $1-\mathfrak{e}$, $3-\mathfrak{e}$, $5-\mathfrak{e}$ etc. positiv und resp. kleiner als 1, 3, 5, etc. sind, werden $\frac{1-\mathfrak{e}}{2}$, $\frac{3-\mathfrak{e}}{4}$, $\frac{5-\mathfrak{e}}{6}$, etc. resp. kleiner als $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, etc., also positive echte Brüche. Da nun auch x einen positiven echten Bruch vorstellt, so sind auch die Produkte $\frac{1-\mathfrak{e}}{2}x$, $\frac{3-\mathfrak{e}}{4}x$, $\frac{5-\mathfrak{e}}{6}x$, etc. kleiner als Eins, und demnach die eingeklammerten Faktoren in den Gliedern der vorstehenden Reihe positiv. Da ferner $\mathfrak{e}-1$, $\mathfrak{e}-2$, $\mathfrak{e}-3$, $\mathfrak{e}-4$, etc. negativ sind, so haben die Zähler der Binomialcoefficienten ${}^1\mathfrak{e}$, ${}^3\mathfrak{e}$, ${}^5\mathfrak{e}$, etc. sämmtlich eine gerade Anzahl negativer

Faktoren, und es sind demzufolge ${}^1\mathfrak{e}$, ${}^3\mathfrak{e}$, ${}^5\mathfrak{e}$, etc. und folglich auch ${}^1\mathfrak{e}x$, ${}^3\mathfrak{e}x^3$, ${}^5\mathfrak{e}x^5$, etc. positiv. Somit sind sämmtliche Glieder der Reihe $f_\mathfrak{e}$, und daher auch $f_\mathfrak{e}$ selbst, positiv.

Ist dagegen x negativ, so wähle man q so, dass $\mathfrak{e}$ ein negativer echter Bruch wird. Alsdann sind die eingeklammerten Faktoren in den Gliedern der obigen Reihe wiederum positiv, weil $\frac{1-\mathfrak{e}}{2}x$, $\frac{3-\mathfrak{e}}{4}x$, $\frac{5-\mathfrak{e}}{6}x$, etc. wegen des negativen x negativ sind. Ferner haben ${}^1\mathfrak{e}$, ${}^3\mathfrak{e}$, ${}^5\mathfrak{e}$, etc. negative Werthe, weil die Zähler dieser Binomial-Coefficienten aus einer ungeraden Anzahl negativer Faktoren bestehen, und die Potenzen x, x^3, x^5, . . . sind als ungerade Potenzen negativer Zahlen gleichfalls negativ; mithin haben die Produkte ${}^1\mathfrak{e}x$, ${}^3\mathfrak{e}x^3$, ${}^5\mathfrak{e}x^5$, etc. sämmtlich positive Werthe, und die Reihe $f_\mathfrak{e}$ besteht sonach wiederum aus lauter positiven Gliedern. Es ist also auch für negative Werthe von x, $f_\mathfrak{e}$ selber, und daher gleichzeitig die Reihe $f_\mathfrak{p}$ positiv.

§. 188. ***Binomischer Lehrsatz.*** Es ist für positive ganze Zahlenwerthe von n unbedingt, für negative und für gebrochene Werthe von n aber, so oft b numerisch kleiner als a ist,

$$\text{(IV)} \qquad (a+b)^n = a^n + {}^1n a^{n-1}b + {}^2n a^{n-2}b^2 + {}^3n a^{n-3}b^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

Beweis. Da

$$a+b = a\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

und mithin

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

ist, überdies aber, wenn man sich in dem f der vorigen §§. statt des x den Quotienten $\frac{b}{a}$ denkt,

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = f_n$$

gesetzt werden darf, und zwar unbedingt für ganze positive Zahlenwerthe von n, für andere reelle Werthe von n unter der Bedingung, dass x numerisch kleiner als Eins, d. h. hier, a numerisch grösser als b ist: so hat man unter diesen Voraussetzungen

$$(a+b)^n = a^n f_n = a^n\left(1 + {}^1n\frac{b}{a} + {}^2n\left(\frac{b}{a}\right)^2 + {}^3n\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \ldots \text{ in inf.}\right),$$

und hieraus ergibt sich die Gleichung des Lehrsatzes, sobald man die Multiplikation der Reihe mit a^n ausführt.

Zusatz. Die Gleichung des Lehrsatzes lässt sich auch so schreiben

$$(a+b)^n = \Sigma[{}^{\mathfrak{b}}n . a^{n-\mathfrak{b}} b^{\mathfrak{b}}],$$

wenn man mit dem Zeichen Σ die Bildung einer Summe andeutet, deren Glieder aus dem in der Parenthese enthaltenen Ausdrucke dadurch hervorgehen, dass man für $\mathfrak{b}$ nach und nach Null und alle positive ganze Zahlen setzt — wobei aber, um die Uebereinstimmung vollständig zu machen ${}^{0}n$ als gleichbedeutend mit der Einheit angesehen werden muss.

Ist überdies n eine ganze Zahl, und bezeichnet man $n-\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}$, so lässt sich jener Gleichung, insofern nach §. 179, 1

$${}^{\mathfrak{b}}n = \frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} = \frac{n!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!}$$

ist, auch die Form

$$(a+b)^n = \Sigma[n!\,\frac{a^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\,\frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}]_{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n)}$$

geben, wo die angefügte Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n$ anzeigen soll, dass, während für $\mathfrak{a}$ nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3 gesetzt werden, gleichzeitig für $\mathfrak{b}$ nur diejenigen (positiven ganzen) Zahlen zu nehmen sind, welche $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n$ machen. Da $n!$ ein allen Gliedern der Summe gemeinsamer Faktor ist, so lässt er sich auch aus dem Summenzeichen heraus setzen, und man erhält

$$\text{(IV}a\text{)} \qquad (a+b)^n = n!\,\Sigma[\frac{a^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\,\frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}]_{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n)}.$$

§. 189. *Der polynomische Lehrsatz.* Eben so wie der binomische Lehrsatz für die Potenz eines Binoms $a+b$ eine Reihe liefert, die nach Potenzen der Summanden a und b fortschreitet, so liefert der polynomische Lehrsatz für die Potenz eines Polynoms $a+b+c+d+$ etc. eine Reihe, die nach Potenzen von a, b, c, d, etc. fortläuft.

Man gewinnt diese Reihe durch wiederholte Anwendung des binomischen Lehrsatzes.

Für dreigliedrige Summen macht sich die Ausführung, wie folgt.

Da $$(a+b+c)^n = [a+(b+c)]^n$$

ist, so erhält man nach §. 188, das dortige b mit $b+c$ vertauschend,

$$(a+b+c)^n = a^n + {}^1n a^{n-1}(b+c) + {}^2n a^{n-2}(b+c)^2 + \ldots \text{ in inf.},$$

oder abgekürzt

$$(a+b+c)^n = \Sigma[{}^{\mathfrak{d}}n . a^{n-\mathfrak{d}}(b+c)^{\mathfrak{d}}],$$

wo für $\mathfrak{d}$ nach und nach Null und alle absolute ganze Zahlen zu setzen sind. Ueberdies hat man, weil bei der hiesigen Beschaffenheit des $\mathfrak{d}$ die Gl. (IVa) anwendbar ist,

$$(b+c)^{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d}!\ \Sigma\left(\frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\ \frac{c^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!}\right)_{(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{d})},$$

mithin, wegen ${}^{\mathfrak{d}}n.\mathfrak{d}! = [n,-1]^{\mathfrak{d}}$,

$$(a+b+c)^n = \Sigma\left[[n,-1]^{\mathfrak{d}}\ a^{n-\mathfrak{d}}\ \Sigma\left(\frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\ \frac{c^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!}\right)\right],$$

wo für $\mathfrak{d}$ nach und nach 0, 1, 2, 3, . . . gesetzt werden muss, und, während dem $\mathfrak{d}$ einer dieser Werthe gegeben ist, nach und nach für $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ alle Werthe zu nehmen sind, welche $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{d}$ machen. Da aber $\mathfrak{d}$ und mithin $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ aller Werthe 0, 1, 2, 3, . . . fähig ist, so kommt zuletzt jeder Werth von $\mathfrak{b}$ mit jedem Werthe von $\mathfrak{c}$ in Verbindung, und man kann daher die Gleichung auch so schreiben

$$(a+b+c)^n = \Sigma\left[[n,-1]^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\ a^{n-(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})}\ \frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\ \frac{c^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!}\right],$$

wenn man bemerkt, dass nach und nach für $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ Null und alle positive ganze Zahlenwerthe gesetzt werden müssen.

Wollte man nun z. B. nur diejenigen Glieder kennen, welche a^{n-4} zum Faktor haben, so hätte man $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=4$ zu setzen, also für $\mathfrak{b}$ nach und nach 0, 1, 2, 3, 4 und gleichzeitig für $\mathfrak{c}$ resp. 4, 3, 2, 1, 0, so dass man erhielte:

$$[n,-1]^4\ a^{n-4}\left(\frac{b^4}{4!} + \frac{b^3c}{3!} + \frac{b^2c^2}{2!2!} + \frac{bc^3}{3!} + \frac{c^4}{4!}\right), \text{ d. h.}$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4}\left(\tfrac{1}{24}b^4 + \tfrac{1}{6}b^3c + \tfrac{1}{4}b^2c^2 + \tfrac{1}{6}bc^3 + \tfrac{1}{24}c^4\right).$$

Ist n eine positive ganze Zahl, so hat man, sogleich die Gl. (IVa) benutzend:

$$(a+[b+c])^n = n!\ \Sigma\left(\frac{a^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\ \frac{(b+c)^{\mathfrak{d}}}{\mathfrak{d}!}\right)_{(\mathfrak{a}+\mathfrak{d}=n)}$$

oder wegen $(b+c)^{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d}!\ \Sigma\left(\frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\ \frac{c^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!}\right)$,

(IVb)
$$(a+b+c)^n = n!\ \Sigma\left(\frac{a^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\ \frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\ \frac{c^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!}\right)_{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=n)}$$

Ganz allgemein würde man für ein Polynom bekommen:

$$(a+b+c+d+\ldots)^n = \Sigma\left([n,-1]^{\mathfrak{i}}\, a^{n-\mathfrak{i}}\, \frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\, \frac{c^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!}\, \frac{d^{\mathfrak{d}}}{\mathfrak{d}!} \cdot \ldots\right),$$

wo bei der Bildung der Glieder im Summenzeichen für $\mathfrak{i}$ nach und nach 0, 1, 2, 3, . . gesetzt werden muss, und so oft $\mathfrak{i}$ einen dieser Werthe erhalten hat, für $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, . . . nach und nach Null und alle ganze Zahlen zu setzen sind, welche $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\ldots=\mathfrak{i}$ machen.

Für den Fall, dass n eine positive ganze Zahl ist, lässt sich die Gleichung dann wiederum so schreiben:

$$(a+b+c+d+\ldots)^n = n!\,\Sigma\left(\frac{a^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\, \frac{b^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\, \frac{c^{\mathfrak{c}}}{\mathfrak{c}!}\, \frac{d^{\mathfrak{d}}}{\mathfrak{d}!} \cdot \ldots\right)_{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\ldots=n)}$$

B. Die Exponential-Reihe.

§. 190. *Lehrsatz und Erklärung.* Bezeichnet man die Reihe

$$1+\frac{a}{1!}\,x+\frac{a^2}{2!}\,x^2+\frac{a^3}{3!}\,x^3+\frac{a^4}{4!}\,x^4+\ldots \text{ in inf.}$$

durch F_x, und diejenigen Reihen, welche aus F_x hervorgehen, wenn man x mit y und mit $x+y$ vertauscht, resp. durch F_y und F_{x+y}, so ist

(V) $$F_x \,.\, F_y = F_{x+y},$$

so oft F_x und F_y unabhängig von den Gliederzeichen convergiren.

Man bedient sich des Namens „Exponentialreihe" für die Reihen von der vorstehenden Form, weil sie, wie sich weiter unten zeigen wird, den Werth einer Potenz haben, deren Exponent dem Fortschreitungsbuchstaben entspricht.

Beweis des Lehrsatzes. Führt man die im Produkte $F_x \,.\, F_y$ angedeutete Multiplication aus, so erhält man nach §. 176, da vorausgesetzt werden soll, dass F_x und F_y unabhängig von den Gliederzeichen convergiren,

$$F_x \,.\, F_y = 1 + (ax+ay) + \left(\frac{a^2}{2!}x^2 + a^2xy + \frac{a^2}{2!}y^2\right) + \ldots$$

$$+\left(\frac{a^n}{n!}x^n + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{a}{1!}\,x^{n-1}y + \frac{a^{n-2}}{(n-2)!}\,\frac{a^2}{2!}x^{n-2}y^2 + \ldots \frac{a^2}{2!}\,\frac{a^{n-2}}{(n-2)!}x^2y^{n-2}\right.$$

$$\left.+\frac{a}{1!}\,\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\,xy^{n-1} + \frac{a^n}{n!}\,y^n\right) + \ldots \text{ in inf.}$$

Die Glieder der *n*ten Dimension haben hierin, wie man sieht, den Faktor a^n gemein, und lassen sich daher zu folgendem Produkte vereinigen,

$$a^n\left(\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\frac{y}{1!}+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\frac{y^2}{2!}+\ldots\frac{x^2}{2!}\frac{y^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{x}{1!}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}+y^n\right),$$

während die Vergleichung mit der Gl. (IV*a*) zeigt, dass dieser Ausdruck den Werth

$$\frac{a^n(x+y)^n}{n!}$$

hat, so dass die Entwickelung von $F_x \,.\, F_y$ auch durch

$$1+\frac{a}{1!}(x+y)+\frac{a^2}{2!}(x+y)^2+\ldots\frac{a^n}{n!}(x+y)^n+\ldots \text{ in inf.},$$

d. h. durch F_{x+y} dargestellt werden kann, und folglich in der That die Behauptung, dass $F_x \,.\, F_y = F_{x+y}$ sei, gerechtfertigt ist.

§. 191. *Lehrsatz.* Ist m eine positive ganze Zahl, und F_x die Reihe des §. 190, so ist

(VI) $$F_{mx} = (F_x)^m,$$

so oft F_x, F_{2x}, F_{3x}, F_{4x}, ... $F_{(m-1)x}$ unabhängig von den Gliederzeichen convergiren.

B e w e i s. Setzt man in Gl. (V) für y nach und nach x, $2x$, $3x$, ... $(m-1)x$ (was wegen der vorausgesetzten Convergenz der Reihen F_x, F_{2x}, F_{3x}, ... $F_{(m-1)x}$ auf richtige Gleichungen führt), so erhält man $F_x \,.\, F_x = F_{2x}$, $F_x \,.\, F_{2x} = F_{3x}$, $F_x \,.\, F_{3x} = F_{4x}$, ... $F_x \,.\, F_{(m-1)x} = F_{mx}$, folglich, wenn man diese Gleichungen sämmtlich mit einander multiplicirt, und im Resultate die, den beiden Seiten der entstehenden Gleichung gemeinschaftlichen Faktoren fortlässt, $(F_x)^m = F_{mx}$.

§. 192. *Lehrsatz.* Es ist für jeden reellen wie imaginären Werth von x

(VII) $$F_x \,.\, F_{-x} = 1,$$

so oft F_x und F_{-x} unabhängig von den Gliederzeichen convergiren.

Denn setzt man in Gl. (V) $-x$ statt y, so erhält man $F_x \,.\, F_{-x} = F_{x-x} = F_0$, während, wie man augenblicklich sieht, $F_0 = 1$ ist.

§. 193. *Zusatz.* Bezeichnet man die Reihe

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \text{ in inf.}$$

durch φ_x, so ist, weil dieselbe in F_x übergeht, sobald man x mit ax vertauscht

(VIII) $$F_x = \varphi_{ax},$$

und da umgekehrt φ_x nichts weiter ist, als die Reihe F_x für den Fall, dass a den Werth 1 hat, so erhält man aus den Gleichungen (V—VII), wenn man in ihnen $a=1$ setzt, die Gleichungen

(25) $\varphi_x\,\varphi_y = \varphi_{x+y}$, (26) $\varphi_{mx} = (\varphi_x)^m$, (27) $\varphi_x\,\varphi_{-x} = 1$.

§. 194. *Lehrsatz.* Versteht man unter cos z und sin z (ausgesprochen: cosinus z und sinus z) folgende Reihen

(IX) $$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \ldots \text{ in inf.}$$

(X) $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \ldots \text{ in inf.}$$

so ist, wenn i einen Werth der $\sqrt{(-1)}$ vorstellt, und z reell ist,

(XI) $$\varphi_{zi} = \cos z + i \sin z \text{ *)}.$$

Beweis. Substituirt man in der Reihe φ_x des §. 193 für x das Produkt zi und trennt dabei die Glieder mit geraden Exponenten von denen mit ungeraden Exponenten, so erhält man, wenn man aus den letzteren den ihnen gemeinsamen Faktor i absondert,

$$\varphi_{zi} = 1 + \frac{z^2}{2!}\,i^2 + \frac{z^4}{4!}\,i^4 + \frac{z^6}{6!}\,i^6 + \frac{z^8}{8!}\,i^8 + \ldots \text{ in inf.}$$
$$+ i\left(z + \frac{z^3}{3!}\,i^2 + \frac{z^5}{5!}\,i^4 + \frac{z^7}{7!}\,i^6 + \frac{z^9}{9!}\,i^8 + \ldots \text{ in inf.}\right).$$

Da aber $i^2 = [\sqrt{(-1)}]^2 = -1$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = +1$ und folglich $i^{4n} = (i^4)^n = (+1)^n = +1$, $i^{4n+2} = i^{4n} i^2 = (+1)(-1) = -1$ ist, d. h. da die doppelt-geraden Potenzen von i den Werth $+1$, die einfach-geraden den Werth -1 haben, so sieht man sogleich, dass die erste Reihe der vorstehenden Gleichung mit der Reihe (IX), die zweite mit der Reihe (X) zusammenfällt, und also in der That $\varphi_{zi} = \cos z + i \sin z$ ist.

*) Bei den Zeichen cos z und sin z hat man hier nicht an die in der Geometrie vorkommenden Cosinus und Sinus zu denken; vielmehr sind dies hier bloss Abkürzungszeichen für die Reihen (IX) und (X). Zwar finden gewisse Beziehungen zwischen ihnen und den geometrischen Cosinus und Sinus statt, aber diese Beziehungen haben mit den folgenden Untersuchungen nichts zu thun.

§. 195. *Lehrsatz.* Die Reihe F_x des §. 190 convergirt für jeden reellen, wie imaginären Werth von a und x unabhängig von den Gliederzeichen.

Beweis. Dass die Reihe F_x unabhängig von den Gliederzeichen convergirt, wenn a und x reell sind, haben wir im 2ten Beispiele des §. 164 schon gefunden; denn sobald a und x reell sind, ist auch ax reell, und die Reihe F_x fällt dann bis auf das erste Glied mit der Reihe des §. 164 zusammen, wenn man das dortige reelle a mit dem hiesigen reellen ax vertauscht. — Sind aber a und x beliebig, und ist etwa $a = \alpha + \beta i$, $x = \gamma + \delta i$ (α, β, γ, δ reell gedacht), so wird $ax = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i$, oder wenn man die reellen Ausdrücke $\alpha\gamma - \beta\delta$ und $\alpha\delta + \beta\gamma$ resp. mit p und q bezeichnet, $ax = p + qi$, und daher nach der Gl. (VIII) des §. 193, $F_x = \varphi_{ax} = \varphi_{p+qi}$, während nach Gl. (V) $\varphi_{p+qi} = \varphi_p \cdot \varphi_{qi}$ ist, sobald φ_p und φ_{qi} unabhängig von den Gliederzeichen convergiren. Dass dies aber mit φ_p stets der Fall ist, haben wir so eben erkannt, und dass es mit φ_{qi} der Fall ist, folgt daraus, dass nach §. 194 $\varphi_{qi} = \cos q + i \sin q$ ist, und die Reihen $\cos q$ und $\sin q$ (s. §. 164 Beispiel 1) für jedes reelle q unabhängig von den Gliederzeichen convergiren. Da nun, weil φ_p und φ_{qi} convergiren, $\varphi_p \cdot \varphi_{qi}$ für jedes reelle p und q einen bestimmten endlichen (reellen oder imaginären) Werth hat, so ist dies auch mit der diesem Produkte gleichen Reihe φ_{p+qi} der Fall, d. h. es convergirt das mit φ_{p+qi} identische F_x, welche reelle oder imaginäre Werthe auch a und x haben mögen, und zwar unabhängig von den Gliederzeichen.

Folgerung. Aus der unbedingten Convergenz der Reihe F_x geht zugleich die unbedingte Richtigkeit der Gll. (V — VII) und somit der Gll. (25 — 27) hervor. (Siehe §. 190, 191, 192, 193).

§. 196. *Lehrsatz.* Die Reihe F_x des §. 190 hat für jeden reellen Werth von a und x einen positiven Werth.

Beweis. Sind a und x reell, so ist ax entweder positiv, negativ oder Null. Ist aber ax positiv, so besteht die Reihe F_x, oder was dasselbe ist, die Reihe φ_{ax} aus lauter positiven Gliedern, und muss demnach selber positiv sein; ist ax negativ und etwa $= -n$, so ist zufolge der Gl. (VII) $F_x = \varphi_{-n} = \frac{1}{\varphi_n}$, folglich die

Reihe wiederum positiv, weil φ_n positiv ist; für $ax = 0$ endlich wird $F_x = 1$ und hat also gleichfalls einen positiven Werth.

§. 197. *Erklärungen.* 1. Die Reihe φ_1, d. h. die Reihe

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots \text{ in inf.},$$

deren Werth 2,7182818... ist, pflegt man allgemein durch e zu bezeichnen.

2. Die Logarithmen, deren Basis dieses e ist, nennt man natürliche, auch hyperbolische oder Nepersche Logarithmen.

3. Den reellen natürlichen Logarithmen eines Ausdrucks A (den Ausdruck „reeller Logarithmus" in dem Sinne des §. 88 gefasst) werden wir fortan durch lA bezeichnen. — Dem citirten §. zufolge hat demnach lA nur einen Sinn, wenn A positiv ist. Dies vorausgesetzt hat aber, wie wir in der Arithmetik gesehen haben, dies Zeichen stets einen, aber auch nicht mehr als einen (reellen) Werth.

§. 198. *Lehrsatz.* Ist A eine absolute Zahl und x reell, so wird A^x der Reihe F_x gleich, wenn in derselben $a = lA$ gesetzt wird, d. h. es ist

(XII) $$\varphi_{(lA.x)} = 1 + lA\frac{x}{1!} + (lA)^2\frac{x^2}{2!} + (lA)^3\frac{x^3}{3!} + (lA)^4\frac{x^4}{4!} + \ldots \text{ in inf.} = A^x,$$

— wofern, falls x eine gebrochene Zahl ist, A^x die eindeutige reelle Potenz (s. §. 81) vorstellt.

Beweis. Setzt man in der Gl. (VI) $x = 1$, so erhält man $F_m = (F_1)^m$, wo jedoch unter m eine positive ganze Zahl gedacht werden muss, weil die Gl. (VI) nur unter dieser Voraussetzung entwickelt worden ist.

Bezeichnet man daher die mit φ_a identische Reihe F_1, d. h. die Reihe

$$1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \ldots,$$

durch A, so hat man

(28) $$F_m = (\varphi_a)^m = A^m,$$

Da ferner nach Gleichung (VII) $F_{-m} = \frac{1}{F_m}$ ist, so hat man auch für jeden positiven ganzen Zahlenwerth von m, weil dann $F_m = A^m$ ist,

(29) $$F_{-\mathfrak{m}} = \frac{1}{A^{\mathfrak{m}}} = A^{-\mathfrak{m}}.$$

Ist ferner p eine positive oder negative gebrochene Zahl, etwa $= \frac{r}{s}$, wo s eine positive ganze Zahl und r eine positive oder negative ganze Zahl vorstellen soll, so erhält man aus Gl. (VI), $x = p$ und $\mathfrak{m} = s$ setzend, insofern alsdann $\mathfrak{m}x = sp = s\frac{r}{s} = r$ wird,

$$F_r = (F_p)^s,$$

und es ist daher F_p ein Werth der Wurzel $((\sqrt[s]{F_r}))$, oder da nach Gl. (28) und (29) $F_r = A^r$ ist, ein Werth der Wurzel $((\sqrt[s]{(A^r)}))$. Nehmen wir dabei a als reell an, so wird nach §. 196, A und folglich auch A^r positiv, so dass $((\sqrt[s]{(A^r)}))$ unter seinen Werthen einen (aber auch nicht mehr als einen) absoluten Werth hat. Es kann daher die Reihe F_p, weil sie dann nach §. 196 positiv ist, keinen anderen, als eben diesen absoluten Werth vorstellen. Andrerseits haben wir aber im §. 81 den absoluten Werth von $((\sqrt[s]{(A^r)}))$ durch $A^{\frac{r}{s}}$ bezeichnet, mithin ist

(30) $$F_p = A^p,$$

wenn man unter A^p die dort definirte reelle eindeutige pte Potenz von A versteht.

Setzt man in der letzten Gleichung $a = 1$, so dass F_p in φ_p, und A, d. h. φ_a, in φ_1 übergeht, so reducirt sich dieselbe, indem man für φ_1 die oben eingeführte Bezeichnung e benutzt, auf $\varphi_p = e^p$, und man hat daher, wenn man in dieser Gleichung das reelle p durch das reelle a ersetzt, $\varphi_a = e^a$, während φ_a die Reihe ist, die wir vorher mit A benannten. Die Gl. (30) lässt sich daher auch so schreiben:

(31) $$F_p = (e^a)^p.$$

Die Gll. (28), (29), (30) zeigen, dass für jeden reellen Werth von x, $A^x = F_x$ ist, wofern nur das im F_x vorkommende a reell ist und der Gleichung $A = \varphi_a$ genügt. Dass es aber stets ein solches reelles a gibt, welchen absoluten Werth das A haben möge, erkennt man aus der vorher gefundenen Gleichung $\varphi_a = e^a$, d. h. aus $A = e^a$. Denn es existirt nach §. 88, 89, 91 stets ein

(einziger) reeller Werth für a, welcher e^a einer beliebigen positiven Zahl A gleich macht, nämlich derjenige Werth, der dort durch $\log_e a$ bezeichnet worden ist, und für den wir in §. 197 das Zeichen lA eingeführt haben. — Es ist also in der That für jedes positive A, $F_x = \varphi_{xlA} = A^x$, was zu beweisen war.

§. 199. *Erklärung der eindeutigen imaginären Potenz mit absolutem Dignanden und Erörterung ihrer Gesetze.* Die Reihe der Gl. (XII), nämlich die Reihe φ_{xlA}, welche, wie wir so eben erkannt haben, für jeden reellen Werth von x den Werth von A^x hat, behält noch einen Werth, wenn x imaginär ist (also A^x keinen Werth mehr hat), weil sie auch für imaginäre Werthe von x convergirt. Wollen wir nun den Werth der Reihe auch für imaginäre Werthe von x durch A^x bezeichnen, und mit diesem potenzförmigen Zeichen dann noch so umgehen können, wie mit den allgemeinen eindeutigen Potenzen (und resp. den Potenzen des Kap. VII), so müssen wir noch zeigen, dass die Werthe jener Reihe φ_{xlA} auch für jedes imaginäre x diejenigen Eigenschaften der allgemeinen eindeutigen Potenzen haben, aus denen die Potenzregeln abgeleitet worden sind, d. h. wir müssen 1) ihre Eindeutigkeit nachweisen, und 2) dass für sie noch die Gll. (VIII, X, XI, XII) des Kap. VI gültig bleiben.

Die Eindeutigkeit der Reihe folgt aber daraus, dass alle Glieder derselben eindeutig sind; und dass den genannten Gleichungen nicht widersprochen wird, lässt sich gleichfalls leicht erkennen.

Denn, was die Gleichung (X) des Kap. VI betrifft, so ist dies keine andere als die Gleichung (V) des §. 190, welche, wenn man für die Reihen-Zeichen die potenzförmigen Zeichen setzt, in $A^x A^y = A^{x+y}$ übergeht.

Ferner erhält man aus der Gl. (25) des §. 193, x und y resp. durch xlA und xlB ersetzend,

$$\varphi_{xlA} \cdot \varphi_{xlB} = \varphi_{xlA+xlB} = \varphi_{x(lA+lB)},$$

oder da nach §. 90 $lA+lB=l(AB)$ ist,

$$\varphi_{xlA} \cdot \varphi_{xlB} = \varphi_{xl(AB)};$$

oder, für die Reihenzeichen die Potenzzeichen setzend,

$$A^x \cdot B^x = (AB)^x,$$

welche Gleichung mit der (XI) des Kapitel VI zusammenfällt.

Die Gleichung (XII) des Kapitel VI anlangend bemerke man, dass

$l(A^x) = x l A$ ist, so oft A^x positiv (also so oft x reell) ist, weil nur unter dieser Bedingung, wie oben in §. 197, 3 bemerkt worden ist, das Zeichen $l(A^x)$ einen Sinn hat. Alsdann ist aber auch

$$\varphi_{y.l(Ax)} = \varphi_{y.xlA},$$

oder, für die Reihenzeichen die Potenzzeichen schreibend,

$$(A^x)^y = A^{xy},$$

welche Gleichung mit der Gleichung (XII) des Kap. VI zusammenfällt. Diese Grundgleichung bleibt mithin für reelle Werthe von x richtig, mag y reell oder imaginär sein. Ist aber x und y gleichzeitig imaginär, so kann nach der Gültigkeit dieser Gleichung nicht mehr gefragt werden, weil dann $(A^x)^y$ eine imaginäre Potenz einer imaginären Potenz ist, während es sich hier nur um imaginäre Potenzen positiver Zahlen handelt.

Aus demselben Grunde kann hier von einer Gültigkeit der Gleichung (VIII) des Kap. VI keine Rede sein.

Wir sehen hieraus, dass in der That die Potenzregeln auch auf Potenzformen anwendbar sind, in denen der Dignand positiv, der Exponent aber imaginär ist, wenn man dieselben nur als gleichgeltend mit der Exponentialreihe des vorigen §. ansieht, d. h. es lässt sich die Gleichung (XII) des vorigen §. als gültig aufnehmen für jedes positive A, mag das x reell oder imaginär von der Form $p+qi$ sein.

§. 200. *Zusatz und Erklärung.* Hat A den besonderen Werth e, so geht die Gl. (XII) des §. 198, wegen $le = 1$ über in

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ in inf.} = \varphi_x$$

und die Gleichung (XI) des §. 45 in

(XIII) $$e^{zi} = \cos z + i \sin z.$$

Die eindeutigen Potenzen von e, wie sie ihrem Werthe nach durch die erste dieser Gleichungen sowohl für reelle als für imaginäre Werthe von x gegeben sind, und welche dem vorigen §. zufolge den gewöhnlichen Potenzregeln gehorchen, nennt man natürliche Potenzen.

C. Die logarithmische Reihe.

§. 201. *Lehrsatz und Erklärung.* Es ist für jeden Werth von z, der numerisch kleiner als Eins ist,

$$\text{(XIV)}\qquad l(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots \text{ in inf.}$$

Demzufolge nennt man die vorstehende Reihe gemeinhin die logarithmische Reihe.

Beweis des Lehrsatzes. Wenn man von den beiden Seiten der Gl. (XII) des §. 198 die Einheit subtrahirt und hierauf durch x dividirt, so erhält man

$$\frac{A^x-1}{x} = lA + (lA)^2\frac{x}{2!} + (lA)^3\frac{x^2}{3!} + (lA)^4\frac{x^3}{4!} + \ldots \text{ in inf.},$$

und wenn man alsdann $x=0$ setzt,

$$\text{(32)}\qquad \left(\frac{A^x-1}{x}\right)_{x=0} = lA,$$

wo das angehängte $x=0$ bedeuten soll, dass nach Ausführung der Division $x=0$ zu setzen ist *).

Man bemerke nun, dass A mit der Summe $1+(A-1)$ gleichgeltend ist, und dass der binomische Lehrsatz für jedes reelle x

$$[1+(A-1)]^x = 1 + {}^1x(A-1) + {}^2x(A-1)^2 + {}^3x(A-1)^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

liefert, so oft diese Reihe convergirt, also namentlich jedesmal wenn $A-1$ numerisch kleiner als Eins ist. Man hat daher unter dieser Voraussetzung

$$A^x - 1 = [1+(A-1)]^x - 1 = {}^1x(A-1) + {}^2x(A-1)^2 + {}^3x(A-1)^3 + \text{ etc.}$$

Setzt man ferner in dieser Gleichung für ${}^1x$, ${}^2x$, ${}^3x$, etc. die vollständigen Werthe: x, $\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}$, $\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$, etc., und dividirt dann durch x, so ergibt sich

$$\text{(33)}\qquad \frac{A^x-1}{x} = (A-1) + \frac{x-1}{1\,.\,2}(A-1)^2 + \frac{(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(A-1)^3 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}(A-1)^4 + \ldots \text{ in inf.}$$

Der Zähler des Coefficienten von $(A-1)^n$ in dieser Reihe, nämlich

*) Wollte man vor der Ausführung der Division $x=0$ setzen, so würde der Ausdruck die unpassende Form $0:0$ annehmen.

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\ldots(x-[n-1]),$$

lässt sich aber auch so schreiben:

$$(-1)(1-x).(-1(2-x).(-1)(3-x).(-1)(4-x)\;.\;.\;.\;.\;(-1).(n-1-x)$$

oder so: $(-1)^{n-1}(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)\ldots.(n-1-x)$, und geht daher für $x=0$ in $(-1)^{n-1}.1.2.3.4\ldots(n-1)$, d. h. in $(-1)^{n-1}(n-1)!$ über, so dass der ganze Coefficient von $(A-1)^n$ gleich $\frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)\,!}{n!}$, d. h. gleich $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ wird, sobald x in Null übergeht.

Es verwandelt sich folglich die Gl. (33) für $x=0$ in

$$\left(\frac{A^x-1}{x}\right)_{x=0}=(A-1)-\tfrac{1}{2}(A-1)^2+\tfrac{1}{3}(A-1)^3-\tfrac{1}{4}(A-1)^4+\ldots\text{ in inf.}$$

Verbindet man diese Gleichung mit der Gl. (32), so findet man, wenn man A mit $1+z$, und dem entsprechend $A-1$ mit z vertauscht, die Gleichung des Lehrsatzes. Es gilt dieselbe folglich, so oft die hier benutzte binomische Reihe convergirt, namentlich also sicher, wenn $A-1$, d. h. z, numerisch kleiner als Eins ist.

Anmerkung. Erweist sich die binomische Reihe noch als convergent, wenn $A-1=1$ und dabei $x>-1$ ist (vrgl. den Zusatz zu §. 180), so wird auch, da hier dem x der Werth Null beigelegt worden ist und $0>-1$ ist, die Gl. (XIV) noch für $z=1$ ihre Gültigkeit behalten.

In der That sind auch die Fälle, in denen $z^2<1$ und $z=1$ ist, die einzigen, in denen nach §. 164 (Beisp. 3) die logarithmische Reihe convergirt.

D. Die Sinus-Reihe und die Cosinus-Reihe.

§. 202. *Erklärungen.* Der Ausdruck, nach dessen Potenzen die den Cosinus- und den Sinus vorstellenden Reihen des §. 194 fortschreiten, nennt man den Bogen *) resp. des Sinus und des Cosinus.

*) Was den Ursprung des seltsamen Namens „Bogen" für einen arithmetischen Zahlenausdruck betrifft, so bemerken wir, dass in der That, wenn $\sin z = x$ ist, und wenn man unter x die Länge des aus der Elementar-Geometrie bekannten Sinusperpendikels, bezogen auf den Radius als Längeneinheit, versteht, z der Länge des zugehörigen Kreisbogens

Ist $\sin z = x$, d. h. ist z der Bogen des Sinus x, so bezeichnet man das z durch $\operatorname{arc}(\sin = x)$, $\operatorname{arc}\sin x$ oder $\sin^{-1}x$. Ebenso bezeichnet man, wenn $\cos z = x$ ist, den Ausdruck z durch $\operatorname{arc}(\cos = x)$ oder durch $\operatorname{arc}\cos x$ oder durch $\cos^{-1}x$.

Den Quotienten $\frac{\sin z}{\cos z}$ pflegt man durch $\operatorname{tang} z$, den Quotienten $\frac{\cos z}{\sin z}$ durch $\cot z$, den Quotienten $\frac{1}{\sin z}$ durch $\operatorname{cosec} z$, den Quotienten $\frac{1}{\cos z}$ durch $\sec z$ zu bezeichnen; und wenn $\operatorname{tang} z = x$ $\cot z = x$, etc. ist, so drückt man wiederum das z resp. durch $\operatorname{arctg} x$ oder $\operatorname{tg}^{-1}x$, durch $\operatorname{arccot} x$ oder $\cot^{-1}x$, etc. aus.

Wir werden uns vorzugsweise der Formen $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\operatorname{tg}^{-1}x$, $\cot^{-1}x$, etc. bedienen, weil diese der sonstigen mathematischen Bezeichnungsweise am meisten entspricht.

Die Sinus, Cosinus und die aus ihnen zusammengesetzten Tangenten, Cotangenten, Secanten, Cosecanten fasst man unter dem Namen der Kreisfunktionen zusammen.

§. 203. *Herleitung des Werthes der Sinus- und der Cosinus-Reihe aus den Werthen natürlicher Potenzen.* Wenn man in der Gleichung (XIII), d. h. in der Gleichung

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z$$

gleich ist (eine Eigenheit, deren Beweis nicht hierher gehört), und dass man den Namen Bogen, um keine neue Benennung einzuführen, beibehalten hat, wenn man unter $\sin z$ nicht mehr ein Längenmass, sondern wie hier, eine unendliche Reihe versteht. Diese Verallgemeinerung des Namens „Bogen" hat also etwa eben so viel auf sich, wie die in früheren Zeiten gebräuchliche Verallgemeinerung des Namens „Rechteck" im Sinne von „Produkt" und wie die noch jetzt gebräuchliche Benennung „Quadrat" für „zweite Potenz". Eben so wie zufälliger Weise ein Produkt, wenn die Faktoren absolute Zahlen sind, der Inhaltsausdruck eines Rechtecks sein kann, ohne dass man überall Veranlassung hat, wirklich an ein solches zu denken, eben so kann ein Sinus, dessen Werth reell und zwischen gewissen Grenzen eingeschlossen ist, ein Linienmass vorstellen, ohne dass man Veranlassung hat, wirklich überall an eine Linie dabei zu denken. Ist aber gar der Sinus imaginär, so hört alle Beziehung zu einem wirklichen Bogen auf. — Aehnliches gilt für die Cosinus.

für i den anderen Werth der $((\sqrt{(-1)}))$, nämlich $-i$, setzt, so erhält man $e^{-zi} = \cos z - i \sin z$.
Addirt man diese beiden Gleichungen, so ergibt sich $e^{zi} + e^{-zi} = 2 \cos z$, und es ist daher

$$\text{(XIV)} \qquad \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$$

Subtrahirt man jene beiden Gleichungen von einander, so ergibt sich $e^{zi} - e^{-zi} = 2i \sin z$, und man hat mithin

$$\text{(XV)} \qquad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$$

§. 204. *Hauptbeziehungen zwischen den Sinus- und Cosinus-reihen.* Die wichtigsten Beziehungen zwischen den Sinus- und Cosinus-Reihen drücken sich in folgenden Gleichungen aus:

$$\text{(XVI)} \qquad \sin z^2 + \cos z^2 = 1$$

$$\text{(XVII)} \begin{cases} 1, \ \sin(z+h) = \sin z \cos h + \cos z \sin h \\ 2, \ \sin(z-h) = \sin z \cos h - \cos z \sin h \\ 3, \ \cos(z+h) = \cos z \cos h - \sin z \sin h \\ 4, \ \cos(z-h) = \cos z \cos h + \sin z \sin h. \end{cases}$$

Beweis für die Gl. (XVI). Zufolge der Gll. (XIV) und (XV) ist

$$\sin z^2 = \left(\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}\right)^2 = \frac{(e^{zi})^2 - 2e^{zi}e^{-zi} + (e^{-zi})^2}{-4} = -\frac{e^{2zi} - 2 + e^{-2zi}}{4},$$

$$\cos z^2 = \left(\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{zi})^2 + 2e^{zi}e^{-zi} + (e^{-zi})^2}{4} = \frac{e^{2zi} + 2 + e^{-2zi}}{4},$$

mithin $\sin z^2 + \cos z^2 = \frac{4}{4} = 1$.

Beweis für die Gll. (XVII, 1 und 2). Nach §. 203 hat man

$$\sin z \cos h = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \cdot \frac{e^{hi} + e^{-hi}}{2} = \frac{e^{(z+h)i} - e^{-(z+h)i} + e^{(z-h)i} - e^{-(z-h)i}}{4i}$$

$$\cos z \sin h = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \cdot \frac{e^{hi} - e^{-hi}}{2i} = \frac{e^{(z+h)i} - e^{-(z+h)i} - e^{(z-h)i} + e^{-(z-h)i}}{4i},$$

mithin, wenn man diese Gleichungen addirt und subtrahirt, resp.

$$\sin z \cos h + \cos z \sin h = \frac{e^{(z+h)i} - e^{-(z+h)i}}{2i} = \sin(z+h)$$

$$\sin z \cos h - \cos z \sin h = \frac{e^{(z-h)i} - e^{-(z-h)i}}{2i} = \sin(z-h).$$

Beweis für die Gll. (XVII, 3 und 4). Unter Anwendung der Gleichungen des §. 203 findet man

$$\cos z \cos h = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \cdot \frac{e^{hi} + e^{-hi}}{2} = \frac{e^{(z+h)i} + e^{-(z+h)i} + e^{(z-hi)} + e^{-(z-h)i}}{4}$$

$$\sin z \;\; \sin h = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \cdot \frac{e^{hi} - e^{-hi}}{2i} = \frac{e^{(z+h)i} + e^{-(z+h)i} - e^{(z-h)i} - e^{-(z-h)i}}{-4},$$

folglich, wenn man diese Gleichungen addirt und subtrahirt, resp.

$$\cos z \;\; \cos h + \sin z \;\; \sin h = \frac{e^{(z-h)i} + e^{-(z-h)i}}{2} = \cos(z-h)$$

$$\cos z \;\; \cos h - \sin z \;\; \sin h = \frac{e^{(z+h)i} + e^{-(z+h)i}}{2} = \cos(z+h)$$

§. 205. *Zusatz.* Aus den Gll. (XIV) und (XV) ergeben sich ohne Weiteres, wenn man für z nach einander 0 und $-z$ setzt, die folgenden Gleichungen:

$$\sin 0 = 0, \; \cos 0 = 1, \; \sin - z = - \sin z, \; \cos - z = \cos z.$$

§. 206. *Von der Continuität der Sinus- und Cosinus-Reihen.* Wenn z und $z+\mathfrak{e}$ zwei Nachbarwerthe vorstellen, also $\mathfrak{e}$ unendlich klein ist, so müssen zufolge der Erklärung in §. 155 die Sinus und Cosinus dieser Werthe, nämlich $\sin z$ und $\sin(z+\mathfrak{e})$, so wie $\cos z$ und $\cos(z+\mathfrak{e})$ Nachbarwerthe von einander sein, wenn die Sinus und Cosinus continuirliche Funktionen sein sollen. Es ist aber $\sin(z+\mathfrak{e})$ nur dann ein Nachbarwerth von $\sin z$, und $\cos(z+\mathfrak{e})$ ein Nachbarwerth von $\cos z$, wenn $\sin(z+\mathfrak{e}) - \sin z$ und $\cos(z+\mathfrak{e}) - \cos z$ unendlich klein sind. Um zu erkennen, ob dies in der That der Fall sei, suchen wir die Werthe dieser Differenzen auf.

Setzt man in die Gl. (XVII, 1) $\mathfrak{e}$ für h, und für $\sin \mathfrak{e}$ und $\cos \mathfrak{e}$ die Reihen aus §. 194, so erhält man

$$\sin(z+\mathfrak{e}) = \sin z \,(1 - \frac{\mathfrak{e}^2}{2!} + \frac{\mathfrak{e}^4}{4!} - \ldots] + \cos z \,[\mathfrak{e} - \frac{\mathfrak{e}^3}{3!} + \frac{\mathfrak{e}^5}{5!} - \ldots],$$

oder, die Glieder nach Potenzen von $\mathfrak{e}$ ordnend,

$$\sin(z+\mathfrak{e}) = \sin z + \cos z . \mathfrak{e} - \frac{\sin z}{2!}\mathfrak{e}^2 - \frac{\cos z}{3!}\mathfrak{e}^3 + \ldots,$$

mithin

$$(34) \qquad \sin(z+\mathfrak{e}) - \sin z = \cos z . \mathfrak{e} - \frac{\sin z}{2!}\mathfrak{e}^2 - \frac{\cos z}{3!}\mathfrak{e}^3 + \ldots\ldots$$

Insofern nun, wenn z reell ist, auch die Reihen $\sin z$ und $\cos z$ reell sind, weil dieselben dann aus lauter reellen Gliedern bestehen, so sind sämmtliche Coefficienten der vorstehenden Reihe reell, und es lässt sich daher der Lehrsatz §. 169 hier anwenden, welcher behauptet, dass in convergirenden Reihen mit reellen Coefficienten, die nach steigenden Potenzen von $\mathfrak{e}$ fortschreiten, für alle Werthe von $\mathfrak{e}$, die zwischen Null und einem grösseren oder

kleineren endlichen Werthe v liegen, das erste Glied numerisch grösser wird als die Summe aller folgenden Glieder. Hier ist aber das ε unendlich klein, mithin gewiss zwischen Null und jenem endlichen v liegend; folglich unter allen Umständen das erste Glied $\cos z.\varepsilon$ grösser als die Summe der übrigen Reihe. Da aber $\cos z.\varepsilon$ mit ε zugleich nach §. 152, I unendlich klein ist, so muss auch die ganze Reihe, und demnach die Differenz $\sin(z+\varepsilon)-\sin z$ von unendlich kleinem Werthe sein.

Es ist also $\sin z$ continuirlich und zwar bei jedem reellen Werthe von z.

Ebenso ist es mit $\cos z$. Denn setzt man in die Gl. (XVII, 3) ε für h, und dann für $\cos\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$ die Reihen aus §. 194, so findet man $\cos(z+\varepsilon)=\cos z(1-\frac{\varepsilon^2}{2!}+\frac{\varepsilon^4}{4!}-\ldots)-\sin z(\varepsilon-\frac{\varepsilon^3}{3!}+\frac{\varepsilon^5}{5!}-\ldots)$,

d. h. $\cos(z+\varepsilon)=\cos z-\sin z.\varepsilon-\frac{\cos z}{2!}\varepsilon^2+\frac{\sin z}{3!}\varepsilon^3+\ldots$, und daher

$$(35)\quad \cos(z+\varepsilon)-\cos z=-\sin z.\varepsilon-\frac{\cos z}{2!}\varepsilon^2+\frac{\sin z}{3!}\varepsilon^3+\ldots,$$

woraus auf gleiche Weise folgt, dass $\cos(z+\varepsilon)-\cos z$ für jeden Werth von z unendlich klein sein muss, weil das erste Glied $-\sin z.\varepsilon$, welches die Summe der übrigen Glieder an numerischem Werthe übertrifft, unendlich klein ist.

§. 207. *Merkmale des Wachsens und Abnehmens der Sinus- und Cosinuswerthe während des stetigen Zunehmens der Bogenwerthe.* Dass die Sinus und Cosinus reeller Bogen reell sind, weil dann die Reihen aus lauter reellen Gliedern bestehen, ist schon bemerkt worden. Es wird also, wenn z von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig wächst, $\sin z$ und $\cos z$ nach dem vorigen §. eine zusammenhängende Reihe stetig auf einander folgender reeller Werthe durchlaufen. Ob aber bei diesem Durchlaufen die Werthe fortwährend wachsen, oder fortwährend abnehmen, oder abwechselnd zu- und abnehmen, bleibt noch zu untersuchen.

Ist z_1 ein besonderer Werth von z, und $z_1+\varepsilon$ der folgende Nachbarwerth, so wächst natürlich der Werth von $\sin z$ beim Durchgange durch z_1, sobald $\sin(z_1+\varepsilon)>\sin z_1$ ist, also wenn $\sin(z_1+\varepsilon)-\sin z_1$ positiv ist; es nimmt dagegen derselbe ab, wenn $\sin(z_1+\varepsilon)-\sin z_1$ negativ ist. Es ist aber nach §. 206 Gl. (34) diese Dif-

ferenz positiv oder negativ, je nachdem das erste Glied der dortigen Reihe, nämlich $\cos z.\varepsilon$ positiv oder negativ ist, weil dies Glied numerisch grösser als die Summe aller folgenden ist, und mithin der Werth der ganzen Reihen mit diesem Gliede zugleich positiv oder negativ werden muss. Da wir nun das ε als positiv gedacht haben, so ist $\cos z_1.\varepsilon$ positiv oder negativ, jenachdem $\cos z_1$ positiv oder negativ ist; es wächst daher $\sin z$ bei $z=z_1$, wenn $\cos z_1$ positiv ist, und es nimmt der Werth von $\sin z_1$ bei $z=z_1$ ab, wenn $\cos z_1$ negativ ist.

Der Werth der Differenz $\cos(z_1+\varepsilon)-\cos z_1$, wie ihn die Gl. (35) liefert, zeigt ebenso, dass dieselbe positiv oder negativ sein wird, je nachdem das erste Glied $-\sin z_2.\varepsilon$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem $\sin z_1$ negativ oder positiv ist. Es wachsen also die Cosinus bei $z=z_1$, wenn $\sin z_1$ negativ ist, es nehmen dieselben ab, wenn $\sin z_1$ positiv ist.

§. 208. *Lehrsatz.* Für jeden Werth von z, der zwischen 0 und $\sqrt{2}$ liegt, ist $\cos z$ positiv; zwischen $\sqrt{2}$ und 2 liegt aber mindestens ein Werth von z, für den der Cosinus gleich Null wird.

Beweis. Schreibt man die Cosinusreihe, wie folgt:

$$\cos z = \left[1-\frac{z^2}{2!}\right] + \frac{z^4}{4!}\left[1-\frac{z^2}{5.6}\right] + \frac{z^8}{8!}\left[1-\frac{z^2}{9.10}\right] + \ldots \text{ in inf.},$$

und bemerkt, dass für $z^2 \overline{\overline{<}} 2$ die Quotienten $\frac{z^2}{5.6}$, $\frac{z^2}{9.10}$, $\frac{z}{13.14}$, etc. sämmtlich kleiner als Eins, also das zweite Glied und alle folgende Glieder dieser Reihe positiv werden, während das erste Glied Null oder positiv wird, je nachdem $z^2=2$ oder $z^2<2$ ist: so erkennt man, dass in der That $\cos z$ positiv bleiben muss für jeden zwischen 0 und $\sqrt{2}$ liegenden Werth von z.

Schreibt man ferner die Cosinusreihe, wie folgt:

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}\left[1-\frac{z^2}{3.4}\right] - \frac{z^6}{6!}\left[1-\frac{z^2}{7.8}\right] - \frac{z^{10}}{10!}\left[1-\frac{z^2}{11.12}\right] - \ldots \text{ in inf.},$$

und bemerkt, dass für $z^2=4$ die Summe der beiden ersten Glieder den Werth $-\frac{1}{3}$ annimmt, und jedes der folgenden Glieder (weil $\frac{z^2}{7.8}$, $\frac{z^2}{11.12}$, $\frac{z^2}{15.16}$, etc. kleiner als Eins werden) negativ wird: so erkennt man, dass $\cos z$ für $z^2=4$ und folglich für $z=2$ einen negativen Werth haben muss. Da aber nach §. 206 die Cosinus

sich nur stetig ändern, wenn z sich stetig ändert, so kann, wenn z continuirlich von $\sqrt{2}$ bis 2 wächst, der Werth von $\cos z$ von dem zu $z=\sqrt{2}$ gehörenden positiven Werthe nicht zu dem zu $z=2$ gehörenden negativen Werthe übergehen, ohne alle Zwischenwerthe zu durchlaufen, also namentlich auch nicht, ohne durch den Zwischenwerth Null hindurchgegangen zu sein. Es existirt sonach mindestens ein Werth von z zwischen $\sqrt{2}$ und 2, für den $\cos z = 0$ wird.

Das Doppelte dieses Werthes, oder wenn mehre vorhanden sein sollten, das Doppelte des kleinsten derselben (welches demnach eine zwischen $\sqrt{8}$ und 4 liegende Zahl sein wird) wollen wir durch π bezeichnen *).

Es ist hiernach $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$, und für alle zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegenden Werthe von z ist der Cosinus positiv.

§. 209. *Sinus- und Cosinus-Werthe für die zwischen* 0 *und* $\frac{1}{2}\pi$ *liegenden Bogen.*

Da die Cosinus zwischen $z = 0$ und $z = \frac{1}{2}\pi$ positiv sind, so wachsen nach §. 207 die Werthe von $\sin z$ ununterbrochen, wenn z von 0 bis zu $\frac{1}{2}\pi$ wächst, und zwar sind diese Werthe sämmtlich positiv, weil der erste, und deshalb kleinste derselben, nämlich $\sin 0$ nach §. 205 den Werth Null hat. Aus der Gl. (XVI) folgt überdies $(\sin \frac{1}{2}\pi)^2 + (\cos \frac{1}{2}\pi)^2 = 1$, oder da $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ ist, $(\sin \frac{1}{2}\pi)^2 = 1$, d. h. (da überdies $\sin \frac{1}{2}\pi$ nur positiv sein darf) $\sin \frac{1}{2}\pi = +1$.

Wächst sonach z von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so nimmt der Sinus ununterbrochen von 0 bis 1 zu, und der Cosinus nimmt nach §. 207 dabei (weil der zugehörige Sinus stets positiv ist) fortwährend ab, und zwar (da $\cos 0 = 1$ und $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ ist) von 1 bis 0.

Es gibt demzufolge keinen positiven echten Bruch, der nicht einem Sinus und einem Cosinus eines zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegenden Bogen gleich wäre; aber es gibt auch nicht mehr als einen Bogen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, dessen Sinus, und nicht mehr als einen Bogen innerhalb dieser Grenzen, dessen Cosinus einem gegebenen echten Bruche gleich wäre, da beim Wachsen der Sinus von

*) Durch näherungsweise Berechnung findet man $\pi = 3{,}1415926\ldots$, also die bekannte Kreiszahl.

0 bis 1, und beim Abnehmen des Cosinus von 1 bis 0 jeder echte Bruch nur einmal berührt wird.

§. 210. *Sinus- und Cosinuswerthe für die zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegenden Bogen.* Aus den Gll. (XVII, 1 und 3) folgt, wenn man $z=\frac{1}{2}\pi$, und dann für $\sin\frac{1}{2}\pi$ und $\cos\frac{1}{2}\pi$ ihre Werthe 1 und 0 substituirt,

(36) $\sin(\frac{1}{2}\pi+h) = \cos h$ (37) $\cos(\frac{1}{2}\pi+h) = -\sin h.$

Denkt man hierin für h nach und nach alle Werthe zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so nimmt $\frac{1}{2}\pi+h$ nach und nach alle Werthe von $\frac{1}{2}\pi$ bis π an. Da nun, wenn h von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wächst, $\cos h$ nach §. 209 ununterbrochen von 1 bis 0 abnimmt und nach Gl. (36) $\sin(\frac{1}{2}\pi+h)$ dieselben Werthe wie $\cos h$ hat, so nehmen auch die Sinus von 1 bis 0 stetig ab, wenn die Bogen von $\frac{1}{2}\pi$ bis π stetig wachsen.

Da ferner, wenn h von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ zunimmt, nach §. 209 $-\sin h$ von 0 bis -1 ununterbrochen abnimmt, so nehmen zufolge der Gl. (37) auch die Werthe des Cosinus von 0 bis -1 fortwährend ab, wenn der Bogen von $\frac{1}{2}\pi$ bis π wächst.

Für $h = \frac{1}{2}\pi$ liefern insbesondere die Gll. (36) und (37)

$$\sin\pi = \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0, \quad \cos\pi = -\sin\tfrac{1}{2}\pi = -1.$$

§. 211. *Sinus- und Cosinuswerthe für die zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$ liegenden Bogen.* Aus den Gll. (XVII, 1 und 3) folgt, wenn man $z=\pi$, und dann für $\sin\pi$ und $\cos\pi$ ihre Werthe 0 und -1 setzt,

(38) $\sin(\pi+h) = -\sin h$ (39) $\cos(\pi+h) = -\cos h.$

Denkt man hierin für h nach und nach alle Werthe zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so nimmt $\pi+h$ nach und nach alle Werthe von π bis $\frac{3}{2}\pi$ an. Da nun, wenn h von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, nach §. 209 $-\sin h$ von 0 bis -1 abnimmt, so nehmen zufolge der Gl. (38) auch die Werthe von $\sin z$ von 0 bis -1 ab, sobald z von π bis $\frac{3}{2}\pi$ wächst. Und da, wenn h von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wächst, $-\cos h$ nach §. 209 von -1 bis 0 zunimmt, so wachsen auch die Werthe von $\cos z$, von -1 bis 0, sobald z von π bis auf $\frac{3}{2}\pi$ wächst.

Für $h = \frac{1}{2}\pi$ liefern insbesondere die Gll. (38) und (39)

$$\sin\tfrac{3}{2}\pi = -\sin\tfrac{1}{2}\pi = -1, \quad \cos\tfrac{3}{2}\pi = -\cos\tfrac{1}{2}\pi = 0.$$

§. 212. *Sinus und Cosinuswerthe für die zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π liegenden Bogen.* Aus den Gll. (XVII, 1 und 3) folgt, wenn man $z=\frac{3}{2}\pi$ und für $\sin\frac{3}{2}\pi$ und $\cos\frac{3}{2}\pi$ ihre Werthe -1 und 0 setzt,

(40) $\sin(\frac{3}{2}\pi + h) = -\cos h$ (41) $\cos(\frac{3}{2}\pi + h) = \sin h.$

Hieraus ergibt sich durch ein gleiches Räsonnement, wie das in den vorigen beiden §§. angewendete, dass $\sin z$ von -1 bis 0 abnimmt, und $\cos z$ von Null bis 1 zunimmt, sobald z von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π wächst, während die Gll. (40) u. (41) für $h = \frac{1}{2}\pi$ insbesondere auf

$$\sin 2\pi = 0 \text{ und } \cos 2\pi = 1$$

führen.

§. 213. *Von den zwischen 0 und 2π liegenden Bogen, welche einem gegebenen Sinus- und Cosinuswerthe angehören.* 1. Ist x eine beliebig gegebene positive echtgebrochene Zahl, so existirt, wie schon in §. 209 bemerkt wurde, allemal ein zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegender Werth von z welcher $\sin z = x$ macht. Wir wollen diesen Werth von z mit z' bezeichnen. Da ferner nach §. 210 $\sin z$ wiederum alle echt gebrochene Zahlenwerthe von 1 bis zu Null herab durchläuft, wenn z von $\frac{1}{2}\pi$ bis π wächst, so existirt zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π ein zweiter Werth von z, für den der Sinus jenem x gleich wird. Dieser zweite Werth möge z'' heissen. — Zwischen π und 2π gibt es dagegen keinen Werth von z, dessen Sinus gleich x ist, weil nach §. 211 und 212 alle Sinus in diesem Intervalle negativ sind. Folglich sind z' und z'' die einzigen zwischen 0 und 2π liegenden Werthe von z, welche den Sinus jenem positiven x gleich machen.

Setzt man nun in Gl. (XVII,2) $z = \pi$ und $h = z'$, so findet man, für $\sin\pi$ und $\cos\pi$ sogleich ihre Werthe 0 und -1 einführend,

(42) $$\sin(\pi - z') = \sin z',$$

mithin ist, da $\pi - z'$ zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegt, und $\sin z'$ den Werth x hat, dieses $\pi - z'$ jener durch z'' bezeichnete zweite Werth, für den $\sin z = x$ wird.

2. Ist y eine beliebig gegebene positive echtgebrochene Zahl, so existirt nach §. 209 allemal ein zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegender Werth $z_{,}$, dessen Cosinus genau dem y gleich ist. Da ferner $\cos z$ nach §. 212 nach einander alle Werthe von 0 bis 1 und darunter namentlich also auch den Werth y annimmt, wenn z von $\frac{3}{2}\pi$ bis 2π wächst: so gibt es einen zweiten Werth $z_{,,}$, zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π liegend, welcher $\cos z_{,,} = y$ macht. Da endlich zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ die Cosinus negativ sind, so sind $z_{,}$ und $z_{,,}$ die einzigen Werthe zwischen 0 und 2π, deren Cosinus den Werth y

hat. — Setzt man in der Gl. (XVII, 4) $z = 2\pi$ und $h = z_{,}$, so findet man, für $\sin 2\pi$ und $\cos 2\pi$ sogleich ihre Werthe 0 und 1 einführend,

(43) $$\cos(2\pi - z_{,}) = \cos z_{,},$$

mithin ist, da $2\pi - z_{,}$ zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π liegt, dieses $2\pi - z_{,}$ jener durch $z_{,,}$ bezeichnete Werth.

3. Ist x eine beliebig gegebene negative echtgebrochene Zahl, so lässt sich auf dieselbe Weise, wie es in Nr. 1 und Nr. 2 geschehen, nachweisen, dass jedesmal zwei zwischen 0 und 2π liegende Bogen, aber auch nicht mehr als zwei, existiren, deren Sinus jenem x gleich ist, und dass der eine derselben zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$, der andere zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π liegt. Ebenso findet man, dass zwischen 0 und 2π gleichfalls zwei Werthe existiren, deren Cosinus einer beliebig gegebenen negativen echtgebrochenen Zahl y gleich ist, und von denen der eine zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π, der andere zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$ liegt.

4. Es sei r eine beliebig gegebene positive oder negative echtgebrochene Zahl, und s eine zweite positive oder negative echtgebrochene Zahl, welche mit r durch die Gleichung $r^2 + s^2 = 1$ zusammenhängt, so dass, wenn r den Werth des Sinus eines Bogens v vorstellt, s zufolge der Gl. (XVI) den Werth von $\cos v$ vorstellen kann. Dies vorausgesetzt liegt allemal zwischen 0 und 2π ein Bogen z', aber auch nur ein einziger, dessen Sinus r und dessen Cosinus s ist.

Mag nämlich r positiv oder negativ sein, immer gibt es nach Nr. 1 oder Nr. 3 zwei zwischen 0 und 2π liegende Bogen, welche r zum Sinus haben, von denen aber nur der eine zugleich den Werth s zum Cosinus haben kann. Denn ist r positiv, so liegt der eine jener zwei Bogen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, der andere zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π, während die beiden Bogen, deren Cosinus gleich s ist, resp. zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π liegen, wenn s positiv ist, dagegen zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π und zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$, wenn s negativ ist. Bei positivem s kann es also nur der zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegende, bei negativem s nur der zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegende Bogen sein, dessen Sinus gleich r, und dessen Cosinus gleich s ist. Und ist r negativ, so liegt von den beiden Bogen, deren Sinus r ist, der eine zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$, der andere zwischen

$\frac{3}{2}\pi$ und 2π, so dass bei positivem s nur der zweite, (der zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π liegende), bei negativem s nur der erste (der zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$ liegende) die geforderte Eigenschaft hat.

§. 214. *Sinus- und Cosinuswerthe für die Bogen, welche grösser als 2π sind.* Setzt man in die Gll. (XVII, 1 und 3) 2π für z, und dann für $\sin 2\pi$ und $\cos 2\pi$ ihre Werthe 0 und 1, so findet sich

(44) $\sin(2\pi+h) = \sin h$ (45) $\cos(2\pi+h) = \cos h.$

Es ändert sich also weder der Werth des Sinus noch der des Cosinus, wenn man den Bogen um 2π vermehrt; mithin auch nicht, wenn man den Bogen wiederholt hinter einander um 2π, d. h. um 4π, 6π, 8π, etc., $2n\pi$ (unter n eine ganze Zahl verstanden) vergrössert, d. h. es ist noch

(46) $\sin(2n\pi+h) = \sin h$ (47) $\cos(2n\pi+h) = \cos h,$

für jeden positiven ganzen Zahlenwerth von n.

Man kennt demnach die Sinus und Cosinus jeder positiven Zahl z, wenn man die Sinus und Cosinus aller zwischen 0 und 2π liegenden Zahlen kennt.

Ist nämlich n die grösste ganze Zahl, welche in $\frac{z}{2\pi}$ enthalten ist, und k der Ueberschuss von z über das nfache von 2π, so hat man $z = 2n\pi + k$; mithin wird nach (46) und (47) $\sin z = \sin(2n\pi+k) = \sin k$ und $\cos z = \cos(2n\pi+k) = \cos k$, wo $k < 2\pi$ ist.

Nimmt man in den Gll. (46) und (47) $h = 0$, so erhält man insbesondere $\sin 2n\pi = 0$, $\cos 2n\pi = 1$.

§. 215. *Sinus- und Cosinuswerthe für die Bogen, die kleiner als Null sind.* Insofern nach §. 205 $\sin(-2n\pi) = -\sin 2n\pi$, und $\cos-(2n\pi) = \cos 2n\pi$, also für jeden positiven ganzen Zahlenwerth von n, $\sin(-2n\pi) = 0$, $\cos(-2n\pi) = 1$ ist, so erhält man aus den Gll. (XVII, 1 und 3), $z = -2n\pi$ setzend, sobald n eine positive ganze Zahl vorstellt,

(48) $\sin(-2n\pi+h) = \sin h$ (49) $\cos(-2n\pi+h) = \cos h.$

Da nun, wenn h jeglichen Werth zwischen 0 und 2π repräsentirt, $-2n\pi+h$ jede negative ganze wie gebrochene Zahl vorzustellen fähig ist, so sind mit den Sinus und Cosinus der zwischen 0 und 2π liegenden Zahlen zugleich die Werthe der Sinus und Cosinus aller negativen Zahlen gegeben.

§. 216. *Lehrsatz.* Sind r und s irgend welche reelle Wer-

the, die der Gleichung $r^2+s^2=1$ genügen, so gibt es eine unendliche Menge reeller Werthe von z, welche die Gleichungen $\sin z=r$ und $\cos z=s$ befriedigen, und stellt γ einen dieser Werthe vor, so erhält man die übrigen aus der Formel $2\nu\pi+\gamma$, wenn man für ν nach einander alle reelle ganze Zahlen setzt.

B e w e i s. Gibt es einen reellen Werth für z, welcher $\sin z=r$ macht, so ist nach Gl. (XVI) $\cos z=\surd(1-r^2)$ oder $=-\surd(1-r^2)$; es stellt daher alsdann, da wegen $r^2+s^2=1$, entweder $s=\surd(1-r^2)$ oder $=-\surd(1-r^2)$ ist, s einen der Werthe von $\cos z$ vor, so dass in der That die Gleichungen $\sin z=r$ und $\cos z=s$ dann neben einander bestehen können. Da aber wegen $r^2+s^2=1$, und weil r und s reell vorausgesetzt sind, weder r^2 noch s^2 grösser als 1 sein kann, mithin der numerische Werth von r und s die Einheit nicht übersteigt, so existirt nach §. 213, 4 stets ein zwischen 0 und 2π liegender Werth, aber auch nicht mehr als ein einziger, welcher für z gesetzt, die Gleichungen $\sin z=r$ und $\cos z=s$ befriedigt. Nennen wir diesen Werth v, ist also $\sin v=r$, $\cos v=s$, so ist, weil man in Folge der Gll. (46–49), $\sin(\pm 2n\pi+v)=\sin v$ und $\cos(\pm 2n\pi+v)=\cos v$ hat, auch $\sin(\pm 2n\pi+v)=r$ und $\cos(\pm 2n\pi+v)=s$, d. h. es ist, wenn ν jede positive und negative ganze Zahl und die Null vorstellt, $\sin(2\nu\pi+v)=r$, $\cos(2\nu\pi+v)=s$. Folglich sind $2\nu\pi+v$ sämmtlich Ausdrücke, welche für z gesetzt, den Gleichungen $\sin z=r$, $\cos z=s$ genügen.

Diese Ausdrücke sind aber die einzigen reellen Werthe, welche durch das z vorgestellt werden können. Denn könnte z noch einen anderen reellen Werth u haben, so liesse sich doch allemal, wenn nicht u zwischen 0 und 2π liegt (also u mit v zusammenfällt), eine reelle ganze Zahl m so finden, dass $u-2m\pi$ positiv und kleiner als 2π wird. Setzt man dann $u-2m\pi=w$, also $u=2m\pi+w$, so würde zufolge der Gll. (46–49) $\sin u=\sin(2m\pi+w)=\sin w$, $\cos u=\cos(2m\pi+w)=\cos w$ und mithin (wegen $\sin u=r=\sin v$ und $\cos u=s=\cos v$) $\sin w=\sin v$ und $\cos w=\cos v$ sein müssen. Hieraus würde aber, weil v und w zwischen 0 und 2π liegen, nach §. 213, 4, $v=w$ und folglich $u=2m\pi+v$ folgen, d. h. dass, gegen die Voraussetzung, der Werth u schon in der Formel $2\nu\pi+v$ enthalten wäre. Es begreift somit die Formel $2\nu\pi+v$ s ä m m t l i c h e reelle Werthe von z in sich.

Es stelle nun γ einen dieser Werthe von z vor, d. h. es werde $\gamma = 2\nu\pi + v$, wenn man dem ν einen bestimmten seiner Werthe, etwa den Werth ν_1 beilegt. Ferner bemerke man, dass $\nu + \nu_1$ nicht mehr und nicht weniger vorstellen kann als ν, nämlich die Null und alle reelle ganze Zahlen, so dass für $2\nu\pi + v$ auch $2(\nu + \nu_1)\pi + v$, d. h. $2\nu\pi + 2\nu_1\pi + v$ geschrieben werden darf. Dieser Ausdruck ist aber wegen $\gamma = 2\nu_1\pi + v$ wiederum gleichbedeutend mit $2\nu\pi + \gamma$, mithin lassen sich die sämmtlichen reellen Werthe von z auch durch $2\nu\pi + \gamma$ bezeichnen, *q. e. d.*

§. 217. *Sinus- und Cosinuswerthe für imaginäre Bogen von der Form* $p + qi$. Die Gll. (XVII, 1 und 3) liefern für $z = p$ und $h = qi$,

$$\sin(p + qi) = \sin p \cos(qi) + \cos p \sin(qi)$$
$$\cos(p + qi) = \cos p \cos(qi) - \sin p \sin(qi),$$

während in Folge der Gll. (IX) und (X)

$$\sin(qi) = i\left(q + \frac{q^3}{3!} + \frac{q^5}{5!} + \ldots \text{ in inf.}\right)$$

$$\cos(qi) = 1 + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^4}{4!} + \ldots \text{ in inf.}$$

ist, so dass, wenn man den reellen Faktor im Werthe von $\sin(qi)$ durch γ, die reelle Reihe, welche dem $\cos(qi)$ gleich ist, durch δ bezeichnet, die obigen Gleichungen übergehen in

$$\sin(p + qi) = \delta \sin p + i.\gamma \cos p$$
$$\cos(p + qi) = \delta \cos p - i.\gamma \sin p.$$

Hiernach lassen sich leicht die Fälle auffinden, in denen die Sinus und Cosinus imaginärer Bogen reell werden. Es kann nämlich $\sin(p + qi)$ nur reell werden, wenn das Glied $i.\gamma \cos p$ heraus fällt, also wenn $\gamma = 0$ oder $\cos p = 0$ ist. Aus $\gamma = 0$ würde aber auch $q = 0$ folgen*), und man hätte es also nicht mehr mit einem

*) Wäre nämlich q von Null verschieden, so könnte es nur positiv oder negativ sein; aber die durch γ bezeichnete Reihe enthält für positive Werthe von q nur positive, für negative Werthe von q nur negative Glieder, so dass nothwendig γ positiv (also von 0 verschieden) wird, wenn q positiv ist, und negativ (also gleichfalls von Null verschieden), wenn q negativ ist. Es darf daher q weder positiv noch negativ sein, wenn $\gamma = 0$ werden soll.

imaginären Bogen zu thun; mithin ist $\sin(p+qi)$ nur reell, wenn $\cos p = 0$ ist. Da aber $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ die einzigen zwischen 0 und 2π liegenden Werthe sind, welche $\cos p = 0$ machen, so sind alle reelle Werthe von p, welche hierher gehören, nach §. 216 enthalten in $2\nu\pi + \frac{1}{2}\pi$ und $2\nu\pi + \frac{3}{2}\pi$, und es ist daher nur $\sin[(2\nu+\frac{1}{2})\pi + qi]$ reell, aber für jeden reellen Werth von q und für jeden reellen ganzen Zahlenwerth von ν. — Eben so wird $\cos(p+qi)$, wie man sieht, nur reell, wenn $\sin p = 0$ ist (weil für $\gamma = 0$, $p+qi$ reell wird), d. h. da die zwischen 0 und 2π liegenden Werthe von p, welche $\sin p = 0$ machen, nur 0 und π sind, und die Ausdrücke $2\nu\pi + 0$ und $2\nu\pi + \pi$ alle positive und negative Vielfache von π in sich begreifen, — so oft $p = \nu\pi$ ist. Von einem imaginären Bogen kann daher nur entweder der Sinus oder nur der Cosinus reell werden. Diese reellen Werthe sind dann resp. $\sin(p+qi) = \pm\delta$ und $\cos(p+qi) = \pm\delta$, mithin stets numerisch grösser als 1.

Zusatz. Daraus, dass die Sinus und Cosinus imaginärer Bogen nie reelle Werthe haben können, die numerisch gleich oder kleiner als Eins sind, geht noch hervor, dass die Gleichungen des §. 216 ($\sin z = r$ und $\cos z = s$) durch keine imaginäre Werthe von z befriedigt werden können, dass also $2\nu\pi + \gamma$ nicht bloss die einzigen reellen Werthe, sondern überhaupt die einzigen Werthe von z sind, die jenen Gleichungen genügen.

Dritter Abschnitt.

Von den mehrdeutigen Potenzen und Logarithmen.

A. Vom Modulus und Argumente reeller und imaginärer Ausdrücke.

§. 218. *Lehrsatz.* Wenn $r'(\cos v' + i \sin v') = r''(\cos v'' + i \sin v'')$ ist, dabei aber r' und r'' absolute Zahlen, und v' und v'' reelle Ausdrücke vorstellen sollen: so ist nothwendig $r' = r''$, und v' v'' sind entweder einander gleich oder unterscheiden sich nur um eine gerade Anzahl π.

Beweis. Nach §. 79 kann die Gleichung des Lehrsatzes nur bestehen, wenn

(50) $\quad r' \cos v' = r'' \cos v''$ und $r' \sin v' = r'' \sin v''$

ist; mithin muss auch

$$r'^2 \cos v'^2 = r''^2 \cos v''^2, \quad r'^2 \sin v'^2 = r''^2 \sin v''^2$$

sein. Addirt man nun diese beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$r'^2 (\cos v'^2 + \sin v'^2) = r''^2 (\cos v''^2 + \sin v''^2),$$

und folglich, da nach §. 204 Gl. (XVI),

$$\cos v'^2 + \sin v'^2 = 1 \text{ und } \cos v''^2 + \sin v''^2 = 1 \text{ ist,}$$

$$r'^2 = r''^2.$$

Diese Gleichung führt aber, da r' und r'' absolute Werthe haben sollen, auf $r' = r''$, mithin ist der erste Theil des Lehrsatzes erwiesen.

In Folge der Gleichung $r' = r''$ reduciren sich ferner die Gll. (50) auf $\cos v' = \cos v''$, $\sin v' = \sin v''$, was wiederum (zufolge des §. 216) nicht möglich ist, wenn nicht entweder $v' = v''$ ist, oder doch v' sich von v'' nur um eine gerade Anzahl π unterscheidet

— mithin ist auch die zweite Behauptung des Lehrsatzes begründet.

§. 219. *Lehrsatz.* Zwei natürliche Potenzen e^x und e^y sind nur dann einander gleich, wenn ihre Exponenten x und y einander gleich oder um ein Vielfaches von $2\pi i$ von einander verschieden sind.

Beweis. Es sei $x = \alpha + \beta i$, $y = \gamma + \delta i$ (unter α, β, γ, δ reelle Zahlen verstanden) also in Folge der Gl. (XIII)

$$e^x = e^{\alpha+\beta i} = e^\alpha e^{\beta i} = e^\alpha (\cos\beta + i \sin\beta)$$
$$e^y = e^{\gamma+\delta i} = e^\gamma e^{\delta i} = e^\gamma (\cos\delta + i \sin\delta).$$

Soll nun $e^x = e^y$, d. h.

$$e^\alpha (\cos\beta + i \sin\beta) = e^\gamma (\cos\delta + i \sin\delta)$$

sein, so muss, da e^α und e^γ für jeden reellen Werth von α und γ absolute Zahlen vorstellen, nach dem vorhergehenden §. 1) $e^\alpha = e^\gamma$, folglich $\alpha = \gamma$ sein, und 2) wenn nicht $\beta = \delta$ ist, der Unterschied zwischen β und δ eine gerade Anzahl π betragen, so dass in der That der Unterschied zwischen x und y entweder Null oder ein Vielfaches von $2\pi i$ wird.

Demnach haben also z. B. die Potenzen $e^{2u\pi i}$ und $e^{2v\pi i}$ bei reellem u und v nur dann gleichen Werth, wenn $u-v$ einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder der Null gleich ist.

§. 220. *Zusatz.* Es ist jederzeit

$$(\cos v + i \sin v)(\cos v' + i \sin v') = \cos(v+v') + i \sin(v+v'),$$

da diese Gleichung nur eine andere Form der identischen Gleichung $e^{vi} \cdot e^{v'i} = e^{(v+v')i}$ ist.

§. 221. *Vom Modulus und Argument reeller und imaginärer Ausdrücke.* Die Formel $p+qi$, in welcher wir p und q als beliebig reell denken, und welche sowohl alles Reelle (insofern q auch den reellen Werth Null vorstellen kann), als auch alles bisher vorgekommene Imaginäre in sich fasst, kann man offenbar auch in Form des Produkts

$$r\left(\frac{p}{r} + i\,\frac{q}{r}\right)$$

schreiben und dabei unter r jeden beliebigen imaginären oder reellen, von Null verschiedenen Werth sich denken. Nimmt man r reell, und zwar gleich einem der beiden Werthe von

($(\sqrt{(p^2+q^2)})$), so dass mithin weder p noch q numerisch grösser als r, also weder $\frac{p}{r}$ noch $\frac{q}{r}$ numerisch grösser als Eins sein kann, so sind diese Quotienten (s. §. 213) fähig, Sinus oder Cosinus vorzustellen, und zwar kann man alsdann (da die Summe der Quadrate beider Quotienten

$$\frac{p^2}{r^2}+\frac{q^2}{r^2}=\frac{p^2+q^2}{r^2}=\frac{p^2+q^2}{p^2+q^2}=1$$

ist), wenn man $p:r=\cos v$ setzt, $q:r=\sin v$ setzen.

Es ist daher allemal, wenn man v den kleinsten positiven (zwischen 0 und 2π liegenden) Werth nennt, dessen Cosinus gleich $p:r$, und dessen Sinus gleich $q:r$ ist, nach §. 216

$$p+qi=r\,[\cos(2n\pi+v)+i\,\sin(2n\pi+v)],$$

wo n die Null oder jedweden reellen ganzen Zahlenwerth vorstellen darf, und für r sowohl der Werth $\sqrt{(p^2+q^2)}$, als der Werth $-\sqrt{(p^2+q^2)}$ gewählt werden kann.

Da wir in der Folge uns dieser Produktform häufig für die Summe $p+qi$ bedienen werden, so wählen wir für r ein für allemal den absoluten Werth $\sqrt{(p^2+q^2)}$, also das, was wir in §. 167 den Modulus von $p+qi$ genannt haben, und für n den Werth Null. Die reelle Zahl v nennen wir alsdann das Argument von $p+qi$.

Aus §. 218 folgt überdies, dass man einen Ausdruck auf nicht mehr als eine Art in die Form $r(\cos v+i\,\sin v)$ bringen kann, wenn man vom r verlangt, es solle positiv sein und vom v, es solle zwischen 0 und 2π liegen. Modulus und Argument eindeutiger Ausdrücke sind demnach stets eindeutig, und es ist daher nicht bloss, wenn r den Modulus und φ das Argument eines Ausdrucks a bezeichnet,

$$a=re^{\varphi i},$$

sondern es ist auch umgekehrt r der Modulus, und φ das Argument von a, so oft $a=re^{\varphi i}$ und r positiv ist, und dabei φ zwischen 0 und 2π liegt.

Ist $p+qi$ reell, also $q=0$, so wird der Modulus $r=+\sqrt{(p^2)}$ mithin gleich $+p$ oder gleich $-p$, je nachdem p positiv oder negativ ist, d. h. es ist der Modulus positiver und negativer Zahlen dem numerischen Werthe derselben gleich.

— Die Gleichungen, welche das Argument bestimmen, sind alsdann

$$\cos v = \frac{p}{+\sqrt{p^2}}, \quad \sin v = \frac{0}{+\sqrt{p^2}} = 0.$$

Für ein positives p wird demnach $\cos v = +1$, für ein negatives p $\cos v = -1$. Da nun der zwischen 0 und 2π liegende Bogen, dessen Cosinus den Werth 1 und dessen Sinus den Werth 0 hat, gleich 0 ist, und derjenige, dessen Cosinus den Werth -1 und dessen Sinus den Werth Null hat, $= \pi$ ist: so haben alle positive Zahlen das Argument 0, alle negative Zahlen das Argument π.

Ist endlich $p + qi = 0$, also $p = 0$ und $q = 0$, so wird $r = 0$, und $\cos v = \sin v = 0:0$. Der Modulus von Null ist also $= 0$, und das Argument alldeutig. Da aber überhaupt für $r = 0$ die Zurückführung von $p + qi$ auf die obige Produktform unstatthaft ist, so spricht man bei der Null besser gar nicht von Modulus und Argument.

Zusatz. Der Modulus eines Produkts ist gleich dem Produkte der Moduli der Faktoren, und das Argument eines Produkts entweder gleich der Summe der Argumente der Faktoren, oder um 2π kleiner als diese Summe.

Ist nämlich r und φ Modulus und Argument eines Ausdrucks A, und r' und φ' Modulus und Argument eines zweiten Ausdrucks B, also $A = re^{\varphi i}$ und $B = r'e^{\varphi' i}$, so ist $AB = rr'e^{(\varphi+\varphi')i}$, mithin rr' in der That der Modulus von AB. Nennt man nun ferner ψ das Argument von AB, so hat man noch $AB = rr'e^{\psi i}$, und es muss daher $e^{(\varphi+\varphi')i} = e^{\psi i}$ sein, was nach §. 219 nur möglich ist, wenn $(\varphi + \varphi') - \psi$ der Null oder einer geraden Anzahl π gleich ist. Da aber sowohl ψ als φ und φ' zwischen 0 und 2π liegen, so muss $\varphi + \varphi'$ und mithin auch $(\varphi + \varphi') - \psi$ kleiner als 4π sein, und es kann folglich $(\varphi + \varphi') - \psi$ nur entweder den Werth Null oder den Werth 2π haben — *q. e. d.*

B. Von den mehrdeutigen Logarithmen mit absoluter Basis.

§. 222. *Von den mehrdeutigen natürlichen Logarithmen.* Zufolge der im achten Kapitel der *Arithmetik* gegebenen Erklärung verstehen wir unter dem allgemeinen zur Basis a gehörenden Lo-

garithmen von A ein Zeichen z, welches die Bestimmung hat, die Gleichung $a^z = A$ zu verificiren, oder wenn wir die Reihe e als Basis denken — ein Zeichen z, welches die Bestimmung hat, die Gleichung $e^z = A$ zu befriedigen, und wir haben dort die aus dieser Erklärung fliessenden Logarithmen-Gesetze für den Fall einer Eindeutigkeit desselben entwickelt. So lange wir uns nun, wie es im sechsten Kapitel geschehen ist, darauf beschränken, die Potenzen nur durch gegenseitige Beziehungen zu einander zu charakterisiren, und uns mithin enthalten, für das allgemeine Potenzzeichen e^z noch besondere allgemeine Umwandlungen in andere, nach schon bekannten Gesetzen sich richtende Zeichen- und Zahlenverbindungen zu gestatten (oder, was dasselbe ist, der Potenz e^z im Sinne des §. 12 einen W e r t h beizulegen) — kann auch die Gleichung $e^z = A$ nicht weiter analysirt werden, und mithin auf keine allgemeine Umformung für das Zeichen $\log A$ führen, d. h. es können für $\log A$ keine allgemeine Werthe namhaft gemacht werden, und namentlich kann daher von einer durch den Logarithmenbegriff b e d i n g t e n Ein- oder Mehrdeutigkeit nicht die Rede sein. Daher denn der Einfachheit wegen g r u n d s ä t z l i c h die Eindeutigkeit angenommen werden durfte. Als wir aber im siebenten Kapitel für das einfache Potenzzeichen unter der Bedingung, dass der Exponent eine ganze Zahl sei, noch eine Umformbarkeit in ein Produkt hinzufügten, und die Aufrechthaltung der Potenzgesetze dann zur Aufnahme besonderer Umformungen der negativen und gebrochenen Potenzen (in Quotienten und Wurzeln) nöthigte, konnte die Einführung dieser Umformungen in die Gleichung $e^z = A$ für e^z auf Bestimmung von Logarithmenw e r t h e n führen. Jene nähere Bestimmung über Potenzwerthe bezog sich indess nur auf Potenzen mit r e e l l e m Exponenten, und es konnte daher auch nur von r e e l l e n Logarithmenwerthen gesprochen werden. Nehmen wir inzwischen auf die in §. 199 eingeführte Bestimmung der Potenzen von e Rücksicht, welche sich auch auf den Fall ausdehnt, dass der Exponent die Form $p + qi$ hat, so können wir nunmehr auch von Logarithmen sprechen, welche der Form $p + qi$ fähig sind, und namentlich auf die Frage eingehen, ob $e^z = A$ bei gegebenem A für m e h r e r e der Form $p + qi$ fähige Werthe von z richtig werden könne, d. h. ob die auf die Basis e bezogenen Lo-

garithmen von der Form $p+qi$ mehrdeutig sein können. In letzterem Falle (d. h. wenn sich die Logarithmen als mehrdeutig herausstellen) muss alsdann untersucht werden, in wie weit die im achten Kapitel für eindeutige Logarithmen entwickelten Regeln noch auf sie anwendbar bleiben.

Man bemerke jedoch, dass man bei der Frage nach der Mehrdeutigkeit der Logarithmen und nach deren Gesetzen nur solche Logarithmen berücksichtigen kann, in denen der Logarithmand eben diese Form $p+qi$ hat. Denn der Werth von e^z, wie er im §. 199 hingestellt worden ist, lässt sich jederzeit auf diese Form bringen. Setzt man daher $e^z=P+Qi$, so wird man auf $z=\log(P+Qi)$, also immer auf einen Logarithmanden von der angeführten Form geleitet.

Die Frage, ob ein Logarithmus, wenn der Logarithmand diese Form in der That hat, auch Werthe haben könne, die sich n i c h t unter die Form $p+qi$ bringen lassen, kann zur Zeit deshalb nicht beantwortet werden, weil die Möglichkeit, etwas darüber auszusagen, voraussetzt, dass man schon etwas über den Werth von e^z bestimmt habe, wenn z n i c h t der Form $p+qi$ fähig ist.

Wir setzen sonach $A=p+qi$ und $z=\alpha+\beta i$, und fragen, welche reelle Werthe man dem α und β beilegen müsse, damit, wenn p und q beliebig reell gegeben sind, $e^z=A$, d. h.

$$e^{\alpha+\beta i}=p+qi$$

werde. Diese Gleichung lässt sich aber (wegen $e^{\alpha+\beta i}=e^\alpha e^{\beta i}$ und $e^{\beta i}=\cos\beta+i\sin\beta$) umformen in

$$e^\alpha(\cos\beta+i\sin\beta)=p+qi,$$

und kann daher zufolge des §. 79 weil e^α, $\cos\beta$, $\sin\beta$ reell sind, so oft α und β reelle Werthe haben, nicht erfüllt werden, wenn nicht

$$(51)\qquad p=e^\alpha\cos\beta,\quad q=e^\alpha\sin\beta$$

ist. Die Frage reducirt sich mithin darauf, ob reelle Werthe von α und β existiren, welche für jedes gegebene reelle p und q die beiden Gll. (51) befriedigen, und welches im Bejahungsfalle diese Werthe sind.

Um die Antwort hierauf zu erhalten, haben wir nur diese beiden Gleichungen nach α und β aufzulösen. — Zu dem Ende leiten wir aus ihnen, indem wir dieselben quadriren und alsdann zu einander addiren, die Gleichung

$$p^2+q^2=(e^\alpha)^2(\cos\beta^2+\sin\beta^2)=(e^\alpha)^2$$

her, und hieraus wiederum, insofern α reell sein soll und folglich e^α nicht anders als positiv sein kann,

$$e^\alpha=+\surd(p^2+q^2).$$

Diese Gleichung führt aber auf

$$\alpha=\mathrm{l}\ \surd(p^2+q^2);$$

mithin würde für das α der reelle natürliche Logarithmus des Modulus von $p+qi$ genommen werden müssen.

Da dieser Logarithmus eindeutig ist und allemal einen Werth hat, so oft p^2+q^2 positiv ist, d. h. so oft p und q nicht gleichzeitig der Null gleich sind, so wird den Anforderungen nur durch einen Werth von α genügt, aber allemal genügt, so oft der Logarithmand $p+qi$ von Null verschieden ist.

Setzen wir jetzt in der Gll. (51) für e^α den gefundenen Werth $\surd(p^2+q^2)$, so finden wir $\cos\beta=\frac{p}{\surd(p^2+q^2)}$, $\sin\beta=\frac{q}{\surd(p^2+q^2)}$, und diesen Gleichungen kann in der That jederzeit durch reelle Werthe von β genügt werden, und zwar durch unendlich viele, von denen der kleinste positive Werth nach §. 221 das Argument von $p+qi$ ist. Bezeichnen wir dieses Argument durch φ, so sind die übrigen Werthe von β nach §. 216 durch die Gl. $\beta=2n\pi+\varphi$ bestimmt, wo n die Null und jede reelle ganze Zahl vorstellt.

Nennt man also r den Modulus von $p+qi$, so hat man

(XVIII) $$\log(p+qi)=\mathrm{l}r+(2n\pi+\varphi)i.$$

Der einzige Fall, in welchem der Logarithmus keinen Werth hat, ist sonach der, wo $\mathrm{l}r$ keinen Sinn hat, d. h. wo r und folglich $p+qi$ gleich Null ist. In jedem anderen Falle hat sowohl $\mathrm{l}r$ als φ einen völlig bestimmten Sinn, und daher $\log(p+qi)$ völlig bestimmte, wenn auch unendlich viele Werthe.

Den zu $n=0$ gehörenden Werth des Logarithmen, also den Werth $\mathrm{l}r+\varphi i$ nennen wir mit Cauchy dessen Hauptwerth (*valeur principale*).

In Zukunft werden wir, wie es auch in diesem §. schon geschehen ist, bei der Bezeichnung der Logarithmen nicht mehr die Basis dem Zeichen log anfügen, so oft dieselbe gleich e ist. Ferner werden wir die zur Basis e gehörenden und durch die Gl. (XVIII) bestimmten Logarithmen der Erklärung in §. 197 gemäss

schlechthin natürliche Logarithmen nennend, den besonderen Namen reelle natürliche Logarithmen für die früheren eindeutigen beibehalten.

§. 223. *Von den Logarithmenwerthen einiger besonderen Ausdrücke.* Ist der Logarithmand reell und positiv, etwa gleich a, so hat man $q=0$, $p=a$ und folglich nach §. 221, $r=a$ und $\varphi=0$, so dass man erhält

(52) $$\log a = \mathrm{l}a + 2n\pi i.$$

Ist dagegen der Logarithmand negativ und etwa gleich $-a$, so hat man $q=0$, $p=-a$, also (nach §. 221) $r=a$ und $\varphi=\pi$, und mithin

$$\log(-a) = \mathrm{l}a + (2n+1)\pi i.$$

Ist ferner der Logarithmand imaginär, aber $p=0$, so wird $r=+\sqrt{(q^2)}$, also dem numerischen Werth von q gleich, und daher, wenn wir q positiv und gleich b denken,

$$\cos\beta = \frac{p}{r} = \frac{0}{b} = 0\,,\ \sin\beta = \frac{q}{r} = \frac{b}{b} = 1\,,$$

mithin $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und

$$\log(bi) = \mathrm{l}b + (2n+\tfrac{1}{2})\pi i;$$

ist endlich $p=0$ und q negativ, etwa gleich $-b$, so wird $r=b$,

$$\cos\beta = \frac{p}{r} = \frac{0}{b} = 0\,,\ \sin\beta = \frac{q}{r} = \frac{-b}{b} = -1\,,$$

und folglich $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ und

$$\log(-bi) = \mathrm{l}b + (2n+\tfrac{3}{2})\pi i.$$

§. 224. *Zusatz.* Zufolge der Gl. (52) ist $\log 1 = 2n\pi i$. Da nun, wenn n_1 die Null oder eine beliebige aber bestimmte positive oder negative ganze Zahl vorstellt, n aber die Null und jede reelle ganze Zahl bedeutet, der Ausdruck $2n\pi$ nicht mehr und nicht weniger Werthe als $2n\pi+2n_1\pi$ hat, so lässt sich die Gl. (XVIII) auch so schreiben:

$$\log(p+qi) = \mathrm{l}r + (2n_1\pi+\varphi)i + 2n\pi i = \mathrm{l}r + (2n_1\pi+\varphi)i + \log 1.$$

Es bezeichnet aber, weil n_1 beliebig aber bestimmt ist, $\mathrm{l}r + (2n_1\pi+\varphi)i$ einen beliebigen bestimmten Werth von $\log(p+qi)$, mithin erhält man sämmtliche Werthe eines vieldeutigen natürlichen Logarithmen, wenn man zu einem beliebigen Werthe desselben nach und nach sämmtliche Werthe des Logarithmen von 1 addirt.

§. 225. *Von den Rechnungsregeln für die natürlichen Logarithmen.* Um zu erfahren, ob die für eindeutige Logarithmen gefundenen Gesetze

(53) $\log a + \log b = \log ab$, (54) $\log a - \log b = \log(a:b)$

(55) $\log(a^b) = b \log a$, (56) $\log \sqrt[b]{a} = (\log a):b$

vollkommene Gültigkeit haben, wenn man sie auf die vieldeutigen natürlichen Logarithmen bezieht, substituiren wir in diesen Gleichungen für die Logarithmen ihre in §. 222 gefundenen Werthe.

1. Was die erste Gleichung betrifft, so setzen wir zuerst

$$a = p + qi,\quad b = p' + q'i,$$

also

$$ab = (pp' - qq') + (pq' + p'q)i,$$

und bezeichnen durch r, r', r'' resp. den Modulus von a, b, ab, so wie durch φ, φ', φ'' deren Argumente.

Wir haben alsdann

$$(57)\quad \begin{cases} \log a = \mathrm{l}r + (2n\pi + \varphi)i \\ \log b = \mathrm{l}r' + (2n'\pi + \varphi')i \\ \log ab = \mathrm{l}r'' + (2n''\pi + \varphi'')i. \end{cases}$$

Aus dem Zusatze zu §. 221 wissen wir aber, dass $r'' = rr'$ und $\varphi'' = \varphi + \varphi'$ oder $= \varphi + \varphi' - 2\pi$, mithin $2n''\pi + \varphi'' = 2n''\pi + \varphi + \varphi'$ oder $= 2(n'' - 1)\pi + \varphi + \varphi'$ ist, folglich lässt sich, da $n'' - 1$ durchaus keine anderen Werthe als n'' vorstellt, die letzte der Gll. (57) durch

$$\log ab = \mathrm{l}rr' + (2n''\pi + \varphi + \varphi')i$$

ersetzen, während die beiden ersten der Gll. (57)

$$\log a + \log b = \mathrm{l}r + \mathrm{l}r' + [2(n + n')\pi + \varphi + \varphi']i$$

liefern. Die Gl. (53) ist daher eine vollkommene, sobald

$$\mathrm{l}rr' + (2n''\pi + \varphi + \varphi')i = \mathrm{l}r + \mathrm{l}r' + [2(n + n')\pi + \varphi + \varphi']i$$

als vollkommene Gleichung sich erweist. Dass dies aber in der That der Fall ist, sieht man unmittelbar, da $\mathrm{l}r$ und $\mathrm{l}r'$ eindeutige reelle Logarithmen sind, also $\mathrm{l}rr' = \mathrm{l}r + \mathrm{l}r'$ sein muss, und da n'' und $n + n'$ durchaus einerlei Werthe haben.

Aus der Art, wie die Gleichung $\log a - \log b = \log(a:b)$ aus der Gleichung $\log a + \log b = \log(ab)$ hergeleitet worden ist, ergibt sich ferner, dass die eine mit der andern zugleich vollkommen sein muss.

Es sind demnach (53) und (54) vollkommene Gleichungen.

Was dagegen die Gll. (55) und (56) betrifft, so erweist sich die erste derselben, nämlich $\log(a^b) = b \log a$ als eine stets un-

vollkommene, wofern b nicht ein Bruch mit dem Zähler Eins ist, während die letzte Gleichung, nämlich $\log\sqrt[b]{a} = (\log a) : b$, vollkommen ist, so oft unter $\sqrt[b]{a}$ sämmtliche Werthe dieser Wurzel gedacht werden.

Der Nachweis für die Richtigkeit dieser Behauptung lässt sich inzwischen hier noch nicht vollständig führen, da wir bis jetzt allgemeinere (d. h. auch auf imaginäre Exponenten sich beziehende) Potenzen nur von absoluten Zahlen (s. §. 199), nicht aber von einem beliebigen a, ihrem Werthe nach kennen gelernt haben, und daher Werthe von $\log(a^b)$ und $\log\sqrt[b]{a}$ noch nicht für jedes a und b namhaft gemacht werden können. — Um indess vorläufig die Unvollkommenheit der Gl. $\log(a^b) = b \log a$ an einem Beispiele zu zeigen, denken wir uns a absolut, b reell, und a^b, falls b gebrochen ist, als reelle eindeutige Potenz. Unter diesen Bedingungen ist nach Gl. (XVIII), wenn unter n und n' die Null und alle reelle ganze Zahlen gedacht werden,

$$\log(a^b) = \mathrm{l}(a^b) + 2n\pi i \qquad b \log a = b\mathrm{l}a + 2bn'\pi i,$$

während, weil $\mathrm{l}(a^b)$ und $\mathrm{l}a$ reelle eindeutige Logarithmen sind, $\mathrm{l}(a^b) = b\mathrm{l}a$ ist. Es ist demnach $\log(a^b)$ nur dann dem $b \log a$ vollkommen gleich, wenn $2n\pi = 2bn'\pi$, d. h. $n = bn'$, eine vollkommene Gleichung ist. Aber, wenn b eine positive oder negative ganze Zahl ist, schliesst bn' nur die Null und diejenigen reellen ganzen Zahlen in sich, die ein Vielfaches von b sind, während n ausser der Null alle reelle ganze Zahlen vorstellt; mithin enthält $\log(a^b)$ in diesem Falle bmal mehr Werthe als $b \log a$. Ist ferner b eine gebrochene Zahl, und dieselbe in ihren kleinsten Zahlen durch $\mu : \nu$ ausgedrückt, so sind ersichtlich nur diejenigen Werthe von $b \log a$, in denen n' ein Vielfaches von ν ist, zugleich Werthe von $\log(a^b)$, während die zu gebrochenen Werthen von bn' gehörigen dem $b \log a$, und andrerseits die zu den Werthen von n gehörigen, welche kein Vielfaches von μ sind, dem $\log(a^b)$ eigenthümlich bleiben. Ist endlich b irrational, so haben $\log(a^b)$ und $b \log a$ nur den einen Werth gemein, für welchen $n = n' = 0$ ist *).

*) Hieraus ergibt sich nun auch die Richtigkeit der Behauptungen, die in der Einleitung pag. 8 in der Note aufgestellt wurden. Es ist nämlich

$$\log(a^2) = \mathrm{l}(a^2) + 2n\pi i$$

§. 226. *Von den Logarithmen mit positiver, von e verschiedener Basis.* Versteht man, wenn b von der Form $p+qi$, und a beliebig positiv ist, unter $\log_a b$ jeden der Form $\alpha+\beta i$ fähigen Werth von x, welcher $a^x = b$ macht, so hat man, da $e^{la} = a$, also $a^x = (e^{la})^x = e^{xla}$ ist, auch $e^{xla} = b$, mithin $xla = \log b$, d. h. $x = (\log b) : la$, und folglich, da $\log_a b = x$ ist,

$$\log_a b = \frac{lr+(2n\pi+\varphi)i}{la}.$$

Es existiren somit solche Logarithmen stets, und in derselben Vieldeutigkeit, wie die natürlichen, wofern nur weder $r = 0$ ist, (weil alsdann der Dividend des vorstehenden Ausdrucks mit lr zugleich werthlos wird), noch a den Werth 1 hat (weil alsdann der Divisor la in Null übergeht und mithin den Quotienten werthlos macht); und man erhält der vorstehenden Gleichung zufolge alle Werthe des zur Basis a gehörenden Logarithmen von b, wenn man alle Werthe des natürlichen Logarithmen von b durch den reellen natürlichen Logarithmen der Basis, la, dividirt, oder, was dasselbe ist — durch $1 : la$ multiplicirt.

Diesen für alle Logarithmen der Basis a sich gleichbleibenden Faktor $1 : la$ nennt man den Modulus des zur Basis a gehörenden Logarithmensystems.

C. Von den mehrdeutigen Potenzen.

a) Von den Werthen der mehrdeutigen Potenzen insbesondere.

§. 227. *Lehrsatz.* Bezeichnet x eine positive oder negative ganze Zahl, so ist für jeden reellen wie imaginären, aber von Null verschiedenen, Werth von A

$$2\log a = 2la+4n\pi i,\ 2\log(-a) = 2la+2(2n+1)\pi i,$$

folglich hat (da $l(a^2) = 2la$ ist) $2\log a$ nur diejenigen Werthe von $\log(a^2)$, in denen n für die Null oder eine der geraden Zahlen steht, während $2\log(-a)$ nur diejenigen enthält, in denen n eine ungerade reelle Zahl vorstellt, so dass in der That $2\log a$ und $2\log(-a)$ keinen einzigen gemeinsamen Werth haben.

$$\text{(XIX)}\quad 1+\log A\,\frac{x}{1!}+(\log A)^2\,\frac{x^2}{2!}+(\log A)^3\,\frac{x^3}{3!}+\ldots\text{in inf.}=A^x,$$

welchen seiner unendlich vielen Werthe auch der $\log A$ vorstellen möge.

Beweis. Bei Gelegenheit des Beweises zu §. 198 fanden wir, dass, wenn x eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet,

$$1+a\,\frac{x}{1}+a^2\,\frac{x^2}{2!}+a^3\,\frac{x^3}{3!}+\ldots\text{ in inf.}=A^x$$

ist für jeden reellen wie imaginären Werth von a, welcher

$$1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\ldots\text{ in inf.}=A$$

macht. Da nun nach §. 200 die letzte (durch A bezeichnete) Reihe gleich e^a ist, und nach §. 222 alle die unendlich vielen Werthe des $\log A$ die Eigenschaft haben, für a gesetzt, $e^a=A$ zu machen, so ist in der That die Gl. (XIX) für jeden reellen ganzen Zahlenwerth von x eine richtige. Hieraus folgt zugleich 1) insofern ausser den Werthen von $\log A$ kein in der Form $\alpha+\beta i$ darstellbarer Werth von a existirt, für welchen $e^a=A$ wird, dass die in §. 190 mit F_x bezeichnete Reihe nur dann gleich A^x werden kann, wenn gerade $a=\log A$ genommen wird; 2) insofern A^x eindeutig ist, dass die Reihe der Gl. (XIX) trotz der Vieldeutigkeit ihrer einzelnen Glieder nicht mehr als einen einzigen Werth haben kann, oder was dasselbe ist, dass alle Reihen, welche aus der Reihe in (XIX) dadurch hervorgehen, dass man für $\log A$ nach einander alle seine Werthe setzt, einander gleich sein müssen.

§. 228. *Lehrsatz.* Bezeichnet x eine positive oder negative gebrochene Zahl $\frac{r}{s}$, wo r eine positive oder negative ganze Zahl, und s eine positive ganze Zahl vorstellen soll, so sind alle Werthe der Reihe

$$1+\log A\,\frac{x}{1!}+(\log A)^2\,\frac{x^2}{2!}+(\log A)^3\,\frac{x^3}{3!}+\ldots\text{ in inf.},$$

welche sich unter Anwendung der Bezeichnung des §. 193 durch $\varphi_{x\log A}$, und nach §. 200 durch $e^{x\log A}$ vorstellen lässt, zugleich Werthe von $((\sqrt[s]{(A^r)}))$, und zwar sowohl für jeden von Null verschiedenen reellen, als für jeden imaginären Werth von A.

Beweis. Bei Gelegenheit des Beweises zu §. 198 wurde gefunden, dass, wenn

$$F_x = 1 + a\frac{x}{1} + a^2\frac{x^2}{2!} + a^3\frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ in inf.}$$

gesetzt wird, und r und s die eben bezeichnete Bedeutung haben, für jeden reellen wie imaginären Werth von a

$$F_r = (F_x)^s$$

ist. Man hat aber, weil r eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt, nach §. 227 $F_r = A^r$, wofern nur $a = \log A$ vorausgesetzt wird, d. h. sobald unter F_x die Reihe $\varphi_{x\log A}$ gedacht wird, mithin ist

$$A^r = (\varphi_{x\log A})^s,$$

d. h. es hat $\varphi_{x\log A}$ die Eigenschaft, mit s potenzirt, A^r zu geben; andrerseits bezeichnet $((\sqrt[s]{(A^r)}))$ jeden Werth, der mit s potenzirt A^r gibt, folglich müssen alle Werthe von $\varphi_{x\log A}$ zugleich Werthe von $((\sqrt[s]{(A^r)}))$ sein — was zu beweisen war.

Wie viel von einander verschiedene Werthe die Reihe $\varphi_{x\log A}$ wegen der Vieldeutigkeit des $\log A$ annehmen könne, und namentlich also, ob sie nur einige oder alle Werthe von $((\sqrt[s]{(A^r)}))$ vorzustellen vermöge, ist eine Frage, die in §. 232 ihre Erledigung finden soll.

§. 229. *Einführung allgemeiner mehrdeutiger Potenzen.* Die Reihe $\varphi_{x\log A}$ oder $e^{x\log A}$ werden wir künftighin, mag A und x reell oder imaginär von der Form $p+qi$ sein, der Abkürzung wegen durch $((A^x))$ bezeichnen, und dieses Zeichen allgemeine mehrdeutige Potenz von A, und wo kein Missverständniss obwalten kann, schlechthin allgemeine Potenz von A nennen. Sie hat wegen der Vieldeutigkeit des $\log A$ im Allgemeinen unendlich viele Werthe; gar keinen Werth aber hat sie nur in dem einzigen Falle, wenn $A = 0$ ist, weil dann die Reihe $((A^x))$ mit $\log A$ zugleich werthlos wird. Ist aber A von Null verschieden, so fällt sie 1) wenn A sonst beliebig reell oder imaginär, und x eine positive oder negative ganze Zahl ist, nach §. 227 mit der gewöhnlichen Potenz A^x zusammen und ist dann eindeutig; 2) enthält sie, wenn A positiv, und x positiv oder negativ gebrochen ist, unter ihren Werthen zufolge des §. 198 zugleich den Werth der eindeutigen reellen Potenz A^x, indem sie in dieselbe übergeht,

wenn man dem $\log A$ seinen Hauptwerth lA zuertheilt; 3) enthält sie unter ihren Werthen, wenn A positiv ist, auch den Werth der eindeutigen imaginären Potenz des §. 199, indem sie in dieselbe übergeht, wenn wiederum dem $\log A$ sein Hauptwerth lA beigelegt wird.

Sonach ist A^x, so oft diese Potenz nach dem Bisherigen eine Bedeutung hat, ein Werth der allgemeinen Potenz $((A^x))$ mit einziger Ausnahme des Falles, wo $A = 0$ ist.

§. 230. *Von der Grenze von* $((A^x))$ *für ein unendlich klein werdendes* A *und Erweiterung des Begriffes der allgemeinen Potenz.*

1) Es sei x eine absolute (ganze oder gebrochene) Zahl, und A positiv und unendlich klein, etwa gleich $\mathfrak{e}$. Alsdann hat man

$$((\mathfrak{e}^x)) = e^{x \log \mathfrak{e}} = e^{x l\mathfrak{e} + 2n\pi x i} = e^{x l\mathfrak{e}}\, e^{2n\pi x i},$$

während $l\mathfrak{e} = -\infty$, also $e^{x l\mathfrak{e}} = e^{-\infty}$ ist. Bezeichnen wir daher das unendlich kleine $e^{-\infty}$ durch δ, so wird $((\mathfrak{e}^x)) = \delta . e^{2n\pi x i}$, mithin der zu $n = 0$ gehörende Werth von $((\mathfrak{e}^x))$ gleich δ, d. h. gleichfalls unendlich klein. Nimmt man n von Null verschieden, so wird $((\mathfrak{e}^x)) = \delta(\cos 2n\pi x + i \sin 2n\pi x)$, mithin unterscheidet sich, da $\delta . \cos 2n\pi x$ und $\delta \sin 2n\pi x$ unendlich klein sind, $((\mathfrak{e}^x))$ von Null nur um ein unendlich klein Imaginäres (s. §. 156). Jeden falls ist daher die Null die Grenze von $((\mathfrak{e}^x))$.

Eben so verhält es sich, wenn A negativ unendlich klein, etwa gleich $-\mathfrak{e}$ ist, weil alsdann nach §. 223

$(((- \mathfrak{e})^x)) = e^{x l\mathfrak{e}}\, e^{(2n+1)\pi x i} = \delta\,(\cos(2n+1)\pi x + i \sin(2n+1)\pi x)$ wird.

Wir haben also nothwendig für absolute Werthe von x, $\lim ((A^x)) = 0$, mithin auch gleich 0_x.

2) Stellt x eine negative (ganze oder gebrochene) Zahl vor, so wird $((\mathfrak{e}^x)) = e^{x l\mathfrak{e}}\, e^{2n\pi x i}$, mithin (weil $l\mathfrak{e} = -\infty$ und daher $e^{x l\mathfrak{e}} = +\infty$ $= +\infty$ ist) unendlich gross, und es hat folglich dann $((A^x))$ gar keine Grenze.

Ebenso wird $((A^x))$ für $A = -\mathfrak{e}$ unendlich gross, da $(((- \mathfrak{e})^x))$ $= e^{x l\mathfrak{e}} e^{(2n+1)\pi x i}$, also mit $e^{x l\mathfrak{e}}$ zugleich unendlich wird, so dass bei negativem x sich $((A^x))$ unter keinen Umständen einer Grenze nähert, mag das A von der positiven oder der negativen Seite her auf die Null zugehen.

Ist z. B. x eine ungerade Zahl, so werden die reellen Werthe von $e^{2n\pi x i}$ und $e^{(2n+1)\pi x i}$ resp. $+1$ und -1, also die von

$((\mathfrak{e}^x))$ und $(((-\mathfrak{e})^x))$ resp. $+\infty$ und $-\infty$, und die Discontinuität der Potenz $((A^x))$ bei $x=0$ ist dann die grösst denkbare.

3) Für $x=0$ hat man $((\mathfrak{e}^x)) = e^{x\log\mathfrak{e}} = e^0 = 1$, mag $\mathfrak{e}$ positiv oder negativ sein, folglich wird $\lim((A^0)) = 1$, d. h. gleich einem der beiden Werthe von 0^0.

4) Ist endlich x imaginär und gleich $\alpha+\beta i$, so wird wegen $x\log\mathfrak{e} = (\alpha+\beta i)(l\mathfrak{e}+2n\pi i) = [\alpha l\mathfrak{e}-2n\beta\pi]+i[\beta l\mathfrak{e}+2n\alpha\pi]$, $((\mathfrak{e}^x)) = e^{\alpha l\mathfrak{e}-2n\beta\pi}[\cos(\beta l\mathfrak{e}+2n\alpha\pi)+i\sin(\beta l\mathfrak{e}+2n\alpha\pi)]$, mithin (da der Cosinus und Sinus von $\beta l\mathfrak{e}+2n\alpha\pi$ nie numerisch grösser als Eins sein kann, und $e^{\alpha l\mathfrak{e}-2n\beta\pi}$ gleich $e^{-\infty}$ oder gleich $e^{+\infty}$ wird, jenachdem α positiv oder negativ ist) unendlich klein oder unendlich gross, jenachdem α einen positiven oder einen negativen Werth hat. Ebenso verhält es sich mit $(((-\mathfrak{e})^x))$, da dessen Werthe aus denen von $((\mathfrak{e}^x))$ dadurch hervorgehen, dass man $2n+1$ statt $2n$ setzt. Sonach ist $\lim((A^x)) = 0$ für positive Werthe von α, während $((A^x))$ keine Grenze hat für negative Werthe von α. — Ist aber $\alpha=0$, so wird $((\mathfrak{e}^x)) = e^{-2n\beta\pi}(\cos\beta l\mathfrak{e}+i\sin\beta l\mathfrak{e})$; mithin hat $((A^x))$ auch in diesem Falle keine Grenze, weil $\cos\beta l\mathfrak{e}$ und $\sin\beta l\mathfrak{e}$ keinem b e s t i m m t e n Werthe sich nähern *).

Aus dem Vorstehenden sieht man, dass überall, wo 0^x nach dem Früheren eine Bedeutung hat, die allgemeine Potenz $((A^x))$ für ein verschwindendes A einer bestimmten Grenze sich nähert, welche mit dem Werthe von 0^x zusammenfällt (nämlich der Grenze Null für ein positives x, der Grenze Eins für $x=0$); ferner sieht man, dass in den Fällen, wo nach dem Früheren 0^x werthlos ist, auch $((A^x))$ für ein verschwindendes A einer Grenze entbehrt. Will man also den Begriff der allgemeinen mehrdeutigen Potenz so er-

*) Man könnte versucht sein, die Grenze von $((\mathfrak{e}^{\beta i}))$ für unbestimmt oder unendlich vieldeutig zu halten, weil $\cos(\beta l\mathfrak{e})$ und $\sin(\beta l\mathfrak{e})$ beim Kleiner-Werden des $\mathfrak{e}$ periodisch alle reelle Werthe zwischen -1 und $+1$ durchlaufen; allein es nehmen diese Ausdrücke für ein verschwindend klein werdendes $\mathfrak{e}$ nicht g l e i c h z e i t i g, sondern nur n a c h u n d n a c h alle jene Werthe an, und man hat daher nicht mehr Recht, die Grenze von $((\mathfrak{e}^{\beta i}))$ mehrdeutig zu nennen, als man Recht hat, die Reihe $1-1+1-1+1-\ldots$ in inf. für zweideutig zu erklären und derselben die Werthe 0 und 1 zuzuschreiben — welches letztere zu behaupten schwerlich jemandem einfallen wird.

weitern, dass sie für jeden Werth von A, den Werth von A^x in sich begreift, so hat man dieselbe nur, wie dies hiermit geschehe, wie folgt zu erklären.

Unter der allgemeinen mehrdeutigen Potenz $((A^x))$ verstehe man die natürliche Potenz $e^{x \log A}$, und falls diese keinen Werth hat (d. h. wenn $A = 0$ ist) die Grenze, welcher sich diese Potenz bei verschwindendem A nähert.

Hiernach erhalten wir noch für eine Potenz von Null einen Werth, für die das Bisherige noch keinen Werth lieferte, nämlich für die Potenz $0^{\alpha+\beta i}$, wenn β von Null verschieden und α positiv ist, und zwar erhalten wir für sie den Werth Null.

Sonach hat $0^{\alpha+\beta i}$ in zwei Fällen einen Sinn, nämlich 1) wenn α positiv ist, mag β positiv, negativ oder Null sein, und 2) wenn gleichzeitig α und β gleich Null sind. Werthlos dagegen wird $0^{\alpha+\beta i}$ einmal, wenn α negativ ist, mag β gleich Null sein oder irgend einen anderen reellen Werth haben, und zweitens wenn $\alpha=0$ und β von Null verschieden ist.

§. 231. *Von der Zahl der Werthe der allgemeinen Potenzen.* Es sei A von Null verschieden, übrigens aber beliebig reell oder imaginär und von der Form $p+qi$ *); dabei bezeichne r den Modulus, und φ das Argument von A, so dass $\log A = \mathrm{l}r + (2n\pi + \varphi)i$ wird. Alsdann ist

(58) $$((A^x)) = e^{x \log A} = e^{x[\mathrm{l}r + (2n\pi+\varphi)i]} = e^{x\mathrm{l}r} e^{x\varphi i} e^{2n\pi xi},$$

und es hat daher, da in dem letzten Produkte die beiden ersten Faktoren, $e^{x\mathrm{l}r}$ und $e^{x\varphi i}$, eindeutig sind, die Potenz $((A^x))$ genau eben so viele Werthe als der im Allgemeinen vieldeutige Faktor $e^{2n\pi xi}$ oder als die nach §. 200 Gl. (XIII) mit diesem Faktor gleichbedeutende Summe $\cos 2nx\pi + i \sin 2nx\pi$.

Ist nun 1) x reell, und dabei

a) einer positiven oder negativen ganzen Zahl gleich, so wird, da nach §. 214 u. 215 alsdann $\cos 2nx\pi = 1$, $\sin 2nx\pi = 0$ ist, $e^{2nx\pi i} = 1$. Es werden daher für jeden positiven und negativen ganzen Zah-

*) Den Fall, wo $A = 0$ ist, brauchen wir hier nicht zu berücksichtigen, da die Werthe der Potenzen von Null schon im vorigen §. besprochen worden sind.

lenwerth von x sämmtliche Werthe von $((A^x))$ einander gleich, d. h. es wird $((A^x))$ eindeutig — ein Resultat, welches wir schon in §. 224 gewonnen hatten.

b) Wenn $x = 0$ ist, so wird $e^{2n\pi xi} = e^0 = 1$, also $((A^x))$ wiederum eindeutig.

c) Bezeichnet x eine positive oder negative gebrochene Zahl, so lässt sich dieselbe allemal auf die Form $\mu : \nu$ bringen, wo μ eine positive oder negative ganze Zahl, ν aber eine positive ganze Zahl vorstellt. Dabei denke man μ und ν so bestimmt, dass für ein positives μ der Bruch $\frac{\mu}{\nu}$, für ein negatives μ der Bruch $-\frac{\mu}{\nu}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt erscheint. Ferner bemerke man, dass, wenn man in der Summe $m\nu + \nu'$ für m nach und nach die Null und alle reelle ganze Zahlen setzt, und während man dem m je einen dieser Werthe gegeben hat, jedesmal für ν' nach und nach $0, 1, 2, 3, \ldots \nu - 1$ substituirt, allmälig als Summenwerth die Null und alle reelle ganze Zahlen hervorgehen, also dasselbe, was im Bisherigen immer unter dem n gedacht worden ist. Sonach dürfen wir in der Potenz $e^{2nx\pi i}$ für n, ohne dadurch einen Werth zu wenig oder zu viel zu erhalten, jene Summe $m\nu + \nu'$ setzen. Thun wir dies, so ergibt sich, da alsdann $nx = (m\nu + \nu')\frac{\mu}{\nu} = m\mu + \frac{\mu}{\nu}\nu'$ und mithin nach §. 214 Gl. (46, 47)

$$\cos 2nx\pi = \cos(2m\mu\pi + 2\frac{\mu}{\nu}\nu'\pi) = \cos 2\frac{\mu}{\nu}\nu'\pi$$

$$\sin 2nx\pi = \sin(2m\mu\pi + 2\frac{\mu}{\nu}\nu'\pi) = \sin 2\frac{\mu}{\nu}\nu'\pi$$

wird,

$$(59) \qquad e^{2nx\pi i} = \cos 2\frac{\mu}{\nu}\nu'\pi + i \sin 2\frac{\mu}{\nu}\nu'\pi = e^{2\nu' x\pi i}.$$

Demnach hat $((A^x))$ genau so viele Werthe als $e^{2\nu' x\pi i}$, folglich (da ν' nur der Werthe $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots \nu - 1$ fähig ist) höchstens ν Werthe. Alle diese ν Werthe sind aber von einander verschieden; denn wäre $e^{2\nu_1 x\pi i} = e^{2\nu_2 x\pi i}$ unter ν_1 und ν_2 zwei verschiedene Werthe von ν' gedacht, so müsste nach §. 219, $\nu_1 x - \nu_2 x$ d. h. $(\nu_1 - \nu_2)x$ oder $(\nu_1 - \nu_2)\frac{\mu}{\nu}$ einer positi-

ven oder negativen ganzen Zahl gleich sein, was unmöglich ist, da sonst (weil μ und ν keinen gemeinsamen Theiler haben) $\nu_1 - \nu_2$ entweder gleich ν oder ein Vielfaches von ν sein müsste, während doch ν_1 und ν_2 als Werthe von ν' und folglich auch $\nu_1 - \nu_2$ numerisch kleiner als ν ist.

Es kann somit unter den bestehenden Voraussetzungen $((A^x))$ weder mehr noch weniger als ν von einander verschiedene Werthe haben.

d) Ist x irrational, so ist $((A^x))$ unendlich vieldeutig, da sich nachweisen lässt, dass alsdann sämmtliche Werthe dieser Potenz von einander verschieden sind. Hätte nämlich $((A^x))$ zwei gleiche Werthe, und wären dies z. B. die zu $n = n_1$ und $n = n_2$ gehörigen (unter n_1 und n_2 irgend welche bestimmte Werthe von n gedacht) so müsste $e^{2n_1 x\pi i} = e^{2n_2 x\pi i}$ und folglich nach §. 219, $n_1 x - n_2 x$, d. h. $(n_1 - n_2)x$, einer positiven oder negativen ganzen Zahl gleich sein, d. h. es müsste x etwas vorstellen, was mit der positiven oder negativen ganzen Zahl $n_1 - n_2$ multiplicirt eine positive oder negative ganze Zahl gibt, oder mit anderen Worten, es müsste x ein Quotient aus reellen ganzen Zahlen, mithin etwas Rationales sein.

2) Wenn endlich x imaginär, etwa gleich $\alpha + \beta i$ ist, so wird $e^{2nx\pi i} = e^{2n(\alpha+\beta i)\pi i} = e^{-2n\beta\pi + 2n\alpha\pi i}$.

Hätte daher $((A^x))$ irgend zwei gleiche Werthe, und wäre etwa der zu $n = n_1$ gehörige Werth dem zu $n = n_2$ gehörenden gleich, so müsste

$$e^{-2n_1\beta\pi + 2n_1\alpha\pi i} = e^{-2n_2\beta\pi + 2n_2\alpha\pi i}$$

sein, d. h. es müsste zufolge des §. 219 $-2n_1\beta\pi = -2n_2\beta\pi$ und $2n_1\alpha\pi i - 2n_2\alpha\pi i$ ein Vielfaches von $2\pi i$ sein. Aber schon die erste Bedingung ist unerfüllbar, da $-2n_1\beta\pi = -2n_2\beta\pi$ auf $n_1 = n_2$ führt; mithin ist $((A^x))$ für jedes imaginäre x (aller gleichen Werthe entbehrend) unendlich vieldeutig.

§. 232. *Lehrsatz.* Wenn $\mu : \nu$ einen positiven oder negativen, in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückten Bruch vorstellt, so ist

$$\left(\left(A^{\frac{\mu}{\nu}}\right)\right) = ((\sqrt[\nu]{(A^\mu)}))$$

eine vollkommene Gleichung.

Beweis. Da nach §. 231 $\left(\left(A^{\frac{\mu}{\nu}}\right)\right)$ nicht mehr und nicht weniger als ν von einander verschiedene Werthe hat, nach §. 228 aber keinen Werth haben kann, der nicht zugleich der Wurzel $((\sqrt[\nu]{(A^\mu)}))$ zukäme, während $((\sqrt[\nu]{(A^\mu)}))$ nach §. 149 nicht mehr als ν Werthe haben kann, so muss $((\sqrt[\nu]{(A^\mu)}))$ vollkommen identisch mit $\left(\left(A^{\frac{\mu}{\nu}}\right)\right)$ sein.

§. 233. *Trennung des Reellen und Imaginären in den Werthen der allgemeinen mehrdeutigen Potenzen.* Betrachten wir wiederum A als von Null verschieden, sonst aber beliebig und von der Form $p+qi$; nennen wir ferner wiederum r dessen Modulus und φ dessen Argument, und denken

1) x als positive oder negative ganze Zahl: so gibt die Gl. (58) des §. 231, da $e^{x\,\mathrm{lr}} = (e^{\mathrm{lr}})^x = r^x$, und $e^{2nx\pi i} = 1$ wird,

(60) $$((A^x)) = r^x e^{\varphi x i} = r^x(\cos\varphi x + i \sin\varphi x).$$

2) Ist x eine positive oder negative gebrochene Zahl und gleich $\mu:\nu$ (μ und ν so, wie in §. 231, c gewählt), so erhält man aus der Gl. (58) in Verbindung mit der Gl. (59)

$$((A^x)) = e^{x\mathrm{lr}} e^{x\varphi i} e^{2\nu' x\pi i} = r^x e^{x(2\nu'\pi+\varphi)i},$$

mithin

(61) $$((A^x)) = r^x\,(\cos[x(2\nu'\pi+\varphi)] + i \sin[x(2\nu'\pi+\varphi)]),$$

wo für ν' nach und nach jeder der Werthe 0, 1, 2, 3, . . . $\nu-1$ zu setzen ist, und r^x die eindeutige reelle Potenz von r, d. h. den absoluten Werth von $((\sqrt[\nu]{(r^\mu)}))$ vorstellt.

Für $\mu = 1$ ergibt sich hieraus, mit Rücksicht auf §. 232, für die sämmtlichen Werthe einer Wurzel aus jedem von Null verschiedenen Ausdrucke $p+qi$, wenn die Wurzel $\sqrt[\nu]{r}$ ihren absoluten Werth vorstellt,

(62) $$((A^x)) = ((\sqrt[\nu]{(p+qi)})) = \sqrt[\nu]{r}.\left(\cos\frac{2\nu'\pi+\varphi}{\nu} + i \sin\frac{2\nu'\pi+\varphi}{\nu}\right).$$

3) Ist x irrational, so führt die Gl. (58) auf

(63) $$((A^x)) = e^{x\mathrm{lr}} e^{(2n\pi+\varphi)xi} = r^x(\cos[x(2n\pi+\varphi)] + i\sin[x(2n\pi+\varphi)]).$$

4) Ist endlich x imaginär und gleich $\alpha+\beta i$, so erhält man

aus Gl. (58) wegen $x[lr+(2n\pi+\varphi)i]=(\alpha+\beta i)(lr+[2n\pi+\varphi]i)=[\alpha lr-\beta(2n\pi+\varphi)]+i[\beta lr+\alpha(2n\pi+\varphi)]$,

(64) $((A^x))=(([p+qi]^{\alpha+\beta i}))=$

$$e^{\alpha lr-\beta(2n\pi+\varphi)}(\cos[\beta lr+\alpha(2n\pi+\varphi)]+i\sin[\beta lr+\alpha(2n\pi+\varphi)])$$

In den Formeln (60—64) ist natürlich (s. §. 221) der erste (allemal positive) Faktor, nämlich resp. r^x und $e^{\alpha lr-\beta(2n\pi+\varphi)}$, der Modulus von $((A^x))$.

§. 234. *Von einigen besonderen Werthen der allgemeinen vieldeutigen Potenzen und von den allgemeinen Potenzen einiger besonderen Ausdrücke.*

1) Vom Hauptwerthe der allgemeinen Potenzen. Denjenigen Werth der allgemeinen Potenz, der zu $n=0$ gehört, nennt man den Hauptwerth derselben. Stellt also LA den Hauptwerth des Logarithmen $\log A$ vor (s. §. 222), so ist der Hauptwerth von $((A^x))$, d. h. von $e^{x\log A}$, der Werth e^{xLA} oder $e^{x(lr+\varphi i)}$.

Bezeichnet man denselben durch $[(A^x)]$, so erhält man demnach für ein reelles x (in der Gl. (63) das n, und in der Gl. (61) das dem n entsprechende ν der Null gleich setzend),

$$[(A^x)]=r^x(\cos\varphi x+i\sin\varphi x),$$

übereinstimmend mit der Formel für $((A_x))$ in Gl. (60), weil dort alle Werthe der Potenz unter sich, also auch dem Hauptwerthe gleich sind.

Für ein imaginäres x, wenn $x=\alpha+\beta i$ ist, erhält man aus Gl. (64), $n=0$ setzend,

(65) $$[(A^x)]=e^{\alpha lr-\beta\varphi}[\cos(\beta lr+\alpha\varphi)+i\sin(\beta lr+\alpha\varphi)].$$

2) Reelle Werthe imaginärer Potenzen. Die Gl. (64) des §. 233 zeigt, dass $((A^x))$ reeller Werthe fähig ist, selbst wenn A und x imaginär sind. Es dürfen nämlich α, β, r, φ nur in solchen Beziehungen zu einander stehen, dass der mit i multiplicirte Theil der dortigen Formel für irgend einen oder mehrere Werthe von n herausfällt, also dass

$$\sin[\beta lr+\alpha(2n\pi+\varphi)]=0,\text{ d. h. }\beta lr+\alpha(2n\pi+\varphi)=m\pi$$

wird (unter m die Null oder irgend eine reelle ganze Zahl gedacht).

Sind aber von den vier Werthen α, β, r, φ drei gegeben, so lässt sich der vierte im Allgemeinen stets so bestimmen, dass diese Bedingung erfüllt wird.

Setzen wir z. B. $\alpha = 0$ und $lr = 0$, also $r = \sqrt{(p^2+q^2)} = 1$ (d. h. $p = \sqrt{(1-q^2)}$), so werden (da alsdann für jeden Werth von n, $\beta lr + \alpha(2n\pi+\varphi) = 0$ wird), sämmtliche Werthe von $((A^x))$ reell. Es ist dann nämlich

$$((A^x)) = (([\sqrt{(1-q^2)}+qi]^{\beta i})) = e^{-\beta(2n\pi+\varphi)},$$

wo jedoch der numerische Werth von q gleich oder kleiner als Eins sein muss, weil sonst $p = \sqrt{(1-q^2)}$ imaginär werden würde.

Für $q = 1$ findet sich unter andern hieraus, da dann $p = 0$, also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ wird,

$$((i^{\beta i})) = e^{-\beta\pi(2n+\frac{1}{2})},$$

und in dem besonderen Falle, wo $\beta = 1$ ist,

$$((i^i)) = ((\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}})) = e^{-(2n+\frac{1}{2})\pi}.$$

3) Die allgemeinen Potenzen von Eins. Für $A = 1$ hat man $p = 1$ und $q = 0$, also $r = 1$, $lr = 0$, und $\varphi = 0$. Es liefert demnach die Gl. (64) des §. 233

$$(66)\qquad ((1^{\alpha+\beta i})) = e^{-2n\beta\pi}(\cos 2n\alpha\pi + i\sin 2n\alpha\pi).$$

4) Die Werthe von $((A^x))$, wenn der Modulus von A gleich Eins ist.

Ist $r = 1$, also $A = e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, so erhält man für positive oder negative ganze Zahlenwerthe von x aus Gl. (60)

$$((A^x)) = A^x = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^x = \cos\varphi x + i\sin\varphi x;$$

für sonstige reelle Werthe von x aus Gl. (63)

$$((A^x)) = (((\cos\varphi + i\sin\varphi)^x)) = \cos(2n\pi+\varphi)x + i\sin(2n\pi+\varphi)x;$$

endlich für imaginäre Werthe von x aus Gl. (64) wegen $lr = 0$

$$((A^x)) = (((\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\alpha+\beta i})) = e^{-(2n\pi+\varphi)\beta}[\cos(2n\pi+\varphi)\alpha + i\sin(2n\pi+\varphi)\alpha].$$

§. 235. *Zusatz.* Stellt k einen beliebigen Werth von $\log A$ vor, so ist nach §. 224 $\log A = k + \log 1$, folglich

$$((A^x)) = e^{x\log A} = e^{x(k+\log 1)} = e^{xk}e^{x\log 1}.$$

Da nun, weil k ein beliebiger, aber bestimmter Werth von $\log A$ ist, auch e^{xk} einen beliebigen, aber bestimmten Werth von $((A^x))$ bezeichnet, während $e^{x\log 1} = ((1^x))$ ist, so lehrt die letzte Gl. dass man sämmtliche Werthe von $((A^x))$ erhält, wenn man einen beliebigen derselben nach einander mit allen Werthen von $((1^x))$ multiplicirt.

b) Von den Bedingungen, unter denen die Rechnungsregeln für die eindeutigen Potenzen auf die allgemeinen mehrdeutigen Potenzen anwendbar sind.

Für die Untersuchung, wann die Gesetze der eindeutigen Potenzen sich auf die mehrdeutigen Potenzen anwenden lassen, bedürfen wir folgende Hülfssätze.

§. 236. *Lehrsatz.* Sind a, b, c positive oder negative ganze Zahlen, und ist dabei der grösste gemeinsame Theiler von a und b zugleich ein Theiler von c (unter Theilern positiver und negativer Zahlen die Theiler ihrer numerischen Werthe verstanden), so lassen sich jederzeit zwei reelle ganze Zahlen x und y finden, welche die Gleichung $ax+by=c$ befriedigen. Ist dagegen c nicht durch den grössten gemeinsamen Theiler von a und b theilbar, so gibt es keine reelle ganze Zahlen, welche für x und y gesetzt, die Gleichung $ax+by=c$ identisch machen.

Beweis. Wenn man die Gleichung $ax+by=c$ durch den grössten gemeinsamen Theiler von a und b, der gleich δ sein möge, dividirt, und $a:\delta=\alpha$, $b:\delta=\beta$, $c:\delta=\gamma$ setzt (wo dann die numerischen Werthe von α und β relative Primzahlen sein werden), so erhält man

$$\alpha x+\beta y=\gamma,$$

und man erkennt daher sogleich, dass γ eine positive oder negative ganze Zahl, d. h. dass c durch δ theilbar sein muss, weil die dem γ gleich sein sollende Summe $\alpha x+\beta y$ für jeden reellen ganzen Zahlenwerth von x und y einer positiven oder negativen ganzen Zahl gleich ist.

Die zweite Behauptung des Lehrsatzes ist somit begründet, und es bleibt nur noch zu zeigen übrig, dass, wenn c durch δ theilbar ist (also γ eine reelle ganze Zahl vorstellt), allemal die Gleichung $ax+by=c$, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung $\alpha x+\beta y=\gamma$ durch reelle ganze Zahlenwerthe von x und y erfüllt werden kann.

Zu dem Ende bezeichnen wir durch α', β', γ' die numerischen Werthe von α, β, γ, und zeigen 1) dass die gestellte Behauptung, wenn sie für die Gleichung $\alpha'x+\beta'y=\gamma'$ als gültig befunden wird, auch für die Gleichung $\alpha x+\beta y=\gamma$ gelten müsse und 2) dass sie in der That für $\alpha'x+\beta'y=\gamma'$ gilt.

Das Erste erkennt man leicht, wenn man bemerkt, dass die Gl. $\alpha' x + \beta' y = \gamma'$ sich auch so schreiben lässt: $\alpha(\pm x) + \beta(\pm y) = \gamma'$, wofern man bei dem x das obere oder untere Zeichen gelten lässt, je nachdem α positiv oder negativ ist, und ebenso bei dem y das obere oder untere Zeichen, je nachdem β positiv oder negativ ist. Stellen nämlich ξ und η reelle ganze Zahlen vor, welche die Gleichung $\alpha'\xi + \beta'\eta = \gamma'$ identisch machen, so wird, da diese Gleichung (wenn man es mit den Vorzeichen wie vorher hält) mit $\alpha(\pm\xi) + \beta(\pm\eta) = \gamma'$ zusammenfällt, auch $\alpha x + \beta y = \gamma'$ richtig, sobald man für x und y die reellen ganzen Zahlen $\pm\xi$ und $\pm\eta$ setzt. Da ferner γ' entweder gleich γ oder gleich $-\gamma$ ist, so hat man im ersten Falle $\alpha(\pm\xi) + \beta(\pm\eta) = \gamma$, und im zweiten Falle $\alpha(\mp\xi) + \beta(\mp\eta) = \gamma$, und es wird daher auch der Gl. $\alpha x + \beta y = \gamma$ genügt, wenn man für x und y bei positivem γ die reellen ganzen Zahlen $\pm\xi$ und $\pm\eta$, bei negativem γ die reellen ganzen Zahlen $\mp\xi$ und $\mp\eta$ nimmt.

Das Zweite endlich, dass die Gleichung $\alpha' x + \beta' y = \gamma'$ allemal durch reelle ganze Zahlenwerthe von x und y erfüllt werden kann, beweisen wir wie folgt.

Aus der in Rede stehenden Gleichung ergibt sich

$$x = \frac{\gamma' - \beta' y}{\alpha'} = \frac{\gamma'}{\alpha'} - \frac{\beta' y}{\alpha'}.$$

Denkt man demnach unter y irgend eine absolute ganze Zahl, und bedeuten m und n resp. die grössten in $\frac{\gamma'}{\alpha'}$ und $\frac{\beta' y}{\alpha'}$ enthaltenen ganzen Zahlen, so wie μ und ν die zugehörigen Reste: so hat man

$$\frac{\gamma'}{\alpha'} = m + \frac{\mu}{\alpha'}, \quad \frac{\beta' y}{\alpha'} = n + \frac{\nu}{\alpha'},$$

(wo die Werthe von μ und ν in der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots \alpha' - 1$ enthalten sein müssen) und folglich

$$x = (m-n) + \left(\frac{\mu}{\alpha'} - \frac{\nu}{\alpha'}\right).$$

Es wird daher in der That x einer reellen ganzen Zahl $m-n$ gleich, wofern sich y so wählen lässt, dass $\mu = \nu$ wird. Dass dies stets möglich ist, lässt sich aber leicht erkennen.

Setzt man nämlich für y nach einander $1, 2, 3, \ldots\ldots \alpha'$, so bekommt man für n und ν nach und nach α' Werthe. Werden nun dabei die α' Werthe von ν sämmtlich von einander verschie-

den, so müssen dies nothwendig die Werthe 0, 1, 2, 3....$\alpha'-1$ sein, und es muss daher einer darunter mit μ zusammenfallen und somit $x=m-n$ machen. Die α' Werthe von ν sind aber in Wahrheit sämmtlich von einander verschieden; denn stellen y_1 und y_2 zwei (aus den Zahlen 1, 2, 3 . . . α' gewählte) Werthe von y vor, und sind die entsprechenden Werthe von n und ν resp. n_1 und ν_1, n_2 und ν_2, d. h. ist

$$\frac{\beta' y_1}{\alpha'}=n_1+\frac{\nu_1}{\alpha'},\quad \frac{\beta' y_2}{\alpha'}=n_2+\frac{\nu_2}{\alpha'},$$

so hätte man, wenn in einem Falle $\nu_1=\nu_2$ wäre,

$$\frac{\beta' y_1}{\alpha'}-\frac{\beta' y_2}{\alpha'}=n_1-n_2;$$

also müsste, wenn y_1 die grössere der beiden Zahlen y_1 und y_2 vorstellt,

$$\frac{\beta'(y_1-y_2)}{\alpha'}$$

einer absoluten ganzen Zahl (nämlich der Zahl n_1-n_2) gleich sein, was unmöglich ist, weil dann $\beta'(y_1-y_2)$ durch α' theilbar sein müsste, während doch α' und β' der Voraussetzung nach keinen gemeinsamen Theiler haben, und $y_1-y_2<\alpha'$ ist.

Sonach steht fest, dass unter andern schon ein zwischen 0 und α' liegender absoluter ganzer Zahlenwerth von y, combinirt mit einem reellen ganzen Zahlenwerthe von x (dem Werthe $m-n$) die Gleichung $\alpha' x+\beta' y=\gamma'$ befriedigt, und dass daher auch die Gleichung $\alpha x+\beta y=\gamma$, oder was dasselbe ist, die Gl. $ax+by=c$ durch reelle ganze Zahlen auflösbar ist.

§. 237. *Lehrsatz.* Soll ein Produkt $a\mu$ für jeden reellen ganzen Werth des einen Faktors μ einen reellen ganzen Werth haben, so muss auch der andere Faktor a von reellem ganzen Werthe sein *).

B e w e i s. Setzen wir $a\mu=\nu$ und denken unter μ_1 und ν_1 reelle ganze Werthe, welche für μ und ν gesetzt, dieser Gleichung genügen, so muss auch, wofern das a die hier verlangte Eigenschaft hat, das Produkt $a\mu$, wenn für μ der Werth μ_1+1

*) Der Bequemlichkeit des Ausdrucks wegen wird von hier ab „r e e l l e g a n z e Z a h l e n“ und „r e e l l e g a n z e W e r t h e“ unterschieden, indem wir uns durch den letzten Ausdruck j e d e r e e l l e g a n z e Z a h l u n d d i e N u l l zu bezeichnen erlauben.

gesetzt wird, also das Produkt $a(\mu_1+1)$, einen reellen ganzen Werth, etwa den Werth ν_2, haben. Subtrahiren wir nun die hiermit richtigen Gleichungen $a(\mu_1+1) = \nu_2$ und $a\mu_1 = \nu_1$ von einander, so ergibt sich $a = \nu_2 - \nu_1$, d. h., da nothwendig $\nu_2 - \nu_1$ als Differenz ganzer Werthe wiederum von reellem ganzen Werthe ist, dass a einer reellen ganzen Zahl oder der Null gleich sein muss. Ist dies aber der Fall, so wird natürlich die Forderung dass $a\mu$ reell und ganz sei, auch für jeden anderen (reellen ganzen) Werth von μ erfüllt.

§. 238. ***Lehrsätze.*** 1. Ist $a+bs=0$, so muss, wenn a und b rational sein sollen und s irrational ist, $a=0$ und $b=0$ sein.

Denn ist b von 0 verschieden, so darf man die Gleichung $bs = -a$, welche eine nothwendige Folge von $a+bs=0$ ist, nach §. 48 durch b dividiren, was

$$s = -\frac{a}{b}$$

liefern, also auf den Widerspruch führen würde, dass das irrationale s einem Quotienten zweier rationalen Ausdrücke $-a$ und b gleich sei. — Demnach kann b nicht von Null verschieden sein und es reducirt sich daher die gegebene Gl. auf $a+0.b = 0$, d. h. auf $a = 0$. Die Gleichungen $a=0$ und $b=0$ sind demzufolge eine nothwendige Bedingung der Richtigkeit der Gleichung $a+bs=0$.

2. Zwei Gleichungen von der Form $a+bs=k$ und $a'+b's=k$ können für einen irrationalen Werth von s, falls a, b, a', b', rational sein sollen, nur dann neben einander bestehen, wenn $a=a'$ und $b=b'$ ist.

Denn es ergibt sich, wenn man jene Gleichungen von einander subtrahirt, die Gl. $(a-a')+(b-b')s=0$, und diese erfordert nach dem eben bewiesenen Satze zu ihrem Bestehen, dass $a-a'=0$ und $b-b'=0$, d. h. dass $a=a'$ und $b=b'$ sei.

3. Ist s irrational und sollen a, b, c, reelle ganze Werthe haben, so kann die Gleichung

$$a+bs+cs^2=0$$

nicht bestehen, wofern nicht $a=0$, $b=0$, $c=0$ ist, es müsste denn s die Form

$$\frac{r+\sqrt{m}}{h}$$

haben, in welchem Ausdrucke m und h reelle ganze Zahlen vorstellen und r einen reellen ganzen Werth bezeichnet.

Ist nämlich c von 0 verschieden, und kann also c als Divisor auftreten, so gibt die gegebene Gleichung, nach s aufgelöst,

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2c},$$

und liefert demnach s in der angegebenen Form. Ist folglich s nicht von dieser Form, so muss auch $c = 0$ sein und die gegebene Gleichung sich auf $a+bs = 0$ reduciren, woraus dann nach dem oben bewiesenen Satze überdies $a = 0$ und $b = 0$ folgt.

aa. Die Grundgleichungen der Potenzlehre.

§. 239. *Anwendbarkeit der Gleichung* $a^{b+c} = a^b a^c$ *auf allgemeine mehrdeutige Potenzen.*

Um für die Prüfung der Gleichung

(67) $$((a^{b+c})) = ((a^b))\,((a^c))$$

sämmtliche Werthe von $((a^{b+c}))$, $((a^b))$, $((a^c))$ vor Augen legen zu können, bezeichnen wir den Modulus und das Argument von a resp. durch r und φ und setzen $b = \alpha+\beta i$, $c = \gamma+\delta i$. Die Gl. (64) des §. 233 liefert alsdann, wenn man unter u, v, u', v', u'', v'' die durch die folgenden Gleichungen bestimmten Ausdrücke versteht,

$$\begin{aligned}
u &= (\alpha+\gamma)\mathrm{l}r - (\beta+\delta)(2n\pi+\varphi)\\
v &= (\beta+\delta)\mathrm{l}r + (\alpha+\gamma)(2n\pi+\varphi)\\
u' &= \alpha\mathrm{l}r - \beta(2n'\pi+\varphi)\\
v' &= \beta\mathrm{l}r + \alpha(2n'\pi+\varphi)\\
u'' &= \gamma\mathrm{l}r - \delta(2n''\pi+\varphi)\\
v'' &= \delta\mathrm{l}r + \gamma(2n''\pi+\varphi),
\end{aligned}$$

und für n, n', n'' nach und nach alle reelle ganze Werthe gesetzt denkt,

$$\begin{aligned}
((a^{b+c})) &= e^{u}(\cos v + i \sin v),\\
((a^b)) &= e^{u'}(\cos v' + i \sin v'),\\
((a^c)) &= e^{u''}(\cos v'' + i \sin v''),
\end{aligned}$$

so dass nach §. 220

$$((a^b))((a^c)) = e^{u'+u''}[\cos(v'+v'') + i \sin(v'+v'')]$$

wird. Da nun u, u', u'' reell, also e^u und $e^{u'+u''}$ positiv sind, so kann demnach zufolge des §. 219 nur dann vollkommen $((a^{b+c})) = ((a^b))((a^c))$ sein, wenn $u = u'+u''$ ist, und der Unterschied zwischen v und $v'+v''$ Null oder eine gerade Anzahl π beträgt. Wir haben daher nur die Frage zu beantworten, unter welchen Bedingungen die Gleichungen $u = u'+u''$ und $v-(v'+v'') = 2m\pi$, die letztere für reelle ganze Werthe von m, sich vollkommen erfüllen lassen.

Da nach dem Obigen

$$u'+u'' = (\alpha+\gamma)lr-(\beta+\delta)\varphi-2n'\pi\beta-2n''\pi\delta\,,$$
$$v'+v'' = (\beta+\delta)lr+(\alpha+\gamma)\varphi+2n'\pi\alpha+2n''\pi\gamma$$

ist, so gewinnt man für die Gleichungen $u=u'+u''$ und $v=v'+v'+2m\pi$, wenn man auf beiden Seiten die gleichen Glieder fortlässt und durch 2π dividirt, die Gleichungen

$$(A)\qquad (\beta+\delta)n = \beta n'+\delta n''$$
$$(B)\qquad (\alpha+\gamma)n = \alpha n'+\gamma n''+m\,,$$

und es ist offenbar, dass jedem Werthe von $((a^{b+c}))$ ein Werth von $((a^b))((a^c))$ entspricht, so oft für jeden Werth von n sich reelle ganze Werthe für n', n'', m finden lassen, welche diesen letzten beiden Gleichungen genügen; so wie, dass jedem Werthe von $((a^b))((a^c))$ ein Werth von $((a^{b+c}))$ entspricht, so oft für jeden Werth von n' und n'' sich reelle ganze Werthe von n und m finden lassen, welche diese Gleichungen befriedigen. Das Erste ist, wie man sieht, stets möglich, da man nur $n'=n$, $n''=n$ und $m=0$ nehmen darf, und es ist daher in der That jeder Werth von $((a^{b+c}))$ zugleich ein Werth von $((a^b))((a^c))$. Das Zweite findet aber nur unter den folgenden Bedingungen statt.

Erster Fall. Sind beide Exponenten b und c imaginär, so ist nur dann jeder Werth von $((a^b))((a^c))$ ein Werth von $((a^{b+c}))$ und mithin die Gl. (67) eine vollkommene, wenn gleichzeitig β, δ und $\beta\gamma-\alpha\delta$ durch $\beta+\delta$ theilbar sind.

Beweis. Die Gleichung (A) führt auf

$$(68)\qquad n = \frac{\beta n'+\delta n''}{\beta+\delta}$$

und wird also nur dann erfüllt, wenn $\beta n'+\delta n''$ für jeden Werth von n' und n'' durch $\beta+\delta$ theilbar ist. Um die hiezu nöthigen Bedin-

gungen zu erforschen, nehmen wir an, es seien ν' und ν'' bestimmte Werthe von n' und n'', welche, in die Gl. (68) eingeführt, für n einen reellen ganzen Werth ν liefern, und setzen dann in eben diese Gleichung, weil sie auch unter andern noch für den nächstfolgenden Werth von n'' gelten muss, $n' = \nu'$ und $n''=\nu''+1$. Man hat alsdann, weil

$$\frac{\beta\nu'+\delta(\nu''+1)}{\beta+\delta} = \frac{\beta\nu'+\delta\nu''}{\beta+\delta} + \frac{\delta}{\beta+\delta} = \nu + \frac{\delta}{\beta+\delta}$$

ist, die Gleichung

$$n = \nu + \frac{\delta}{\beta+\delta} \text{ oder } n-\nu = \frac{\delta}{\beta+\delta}.$$

Da aber $n-\nu$ mit n und ν zugleich von reellem ganzen Werthe ist, so muss demnach δ durch $\beta+\delta$ theilbar sein. Ganz eben so findet sich aus (68), indem man $n''=\nu''$, $n'=\nu'+1$ setzt, dass auch β durch $\beta+\delta$ theilbar sein muss.

Werden daher die reellen ganzen Werthe, welche man erhält, wenn man β und δ durch $\beta+\delta$ dividirt, resp. durch p und q bezeichnet, d. h. setzt man

(69) $$\frac{\beta}{\beta+\delta} = p, \quad \frac{\delta}{\beta+\delta} = q,$$

so verwandelt sich die Gl. (68) in

(70) $$n = pn' + qn'',$$

und man sieht, dass die beiden gefundenen Bedingungen, dass β und δ durch $\beta+\delta$ theilbar seien, zur Erfüllung der Gl. (68) und mithin der Gl. (A) nicht bloss nothwendig, sondern auch hinreichend sind, da alsdann die mit ihr zusammenfallende Gl. (70) für jedes n' und n'' einen reellen ganzen Werth für n gibt.

Aus den Gll. (69) ergeben sich die hierzu nothwendigen Beziehungen zwischen p und q, und somit auch zwischen β und δ.

Aus den genannten Gleichungen folgt nämlich

(71) $\beta = p(\beta+\delta)$ (72) $\delta = q(\beta+\delta)$,

und, wenn man diese resp. mit q und p multiplicirt und dann von einander subtrahirt,

(73) $$\beta q - \delta p = 0.$$

Die letzte Gleichung von (71) subtrahirt, gibt dann $\beta(1-q)=\beta p$ und mithin, da b imaginär, also β von Null verschieden vorausgesetzt ist,

$$(74) \qquad 1-q=p,$$

so dass die Gl. (73) liefert:

$$(75) \qquad \beta=\frac{p}{q}\delta = \frac{1-q}{q}\delta,$$

oder, da auch $q=1-p$ ist,

$$(76) \qquad \delta=\frac{q}{p}\beta = \frac{1-p}{p}\beta.$$

Der Werth, den man dem n für ein gegebenes n' und n'' zu ertheilen hat, ist dem Vorstehenden gemäss, nunmehr

$$(77) \qquad n=pn'+(1-p)n'' \text{ oder } n=(1-q)n'+qn''.$$

Was die Gl. (*B*) betrifft, so verwandelt sich dieselbe, wenn man für n den eben gefundenen Werth substituirt, in

$$(n'-n'')[p(\alpha+\gamma)-\alpha]=m,$$

und ist daher erfüllt, so oft für jeden reellen ganzen Werth von n' und n'', und mithin von $n'-n''$, sich ein reeller ganzer Werth für m ergibt — was nach §. 237 nur dann möglich ist, wenn $p(\alpha+\gamma)-\alpha$ einen reellen ganzen Werth hat.

Setzen wir unter dieser Voraussetzung $p(\alpha+\gamma)-\alpha=k$, und substituiren für p seinen Werth aus (69), so ergibt sich

$$(78) \qquad k=\frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\beta+\delta}-\alpha=\frac{\beta(\alpha+\gamma)-\alpha(\beta+\delta)}{\beta+\delta}=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\beta+\delta},$$

und es muss daher $\beta\gamma-\alpha\delta$ durch $\beta+\delta$ theilbar sein.

Die oben aufgestellten Bedingungen für die allgemeine Gültigkeit der Gl. (67) sind sonach hiermit gerechtfertigt.

[Es wird also z. B. $a^{2+3i} \cdot a^{4-5i}=a^{6-2i}$ eine unvollkommene, $a^{2+3i}\, a^{4-\frac{3}{2}i}=a^{6+\frac{3}{2}i}$ eine vollkommene Gleichung sein.]

Die Form, welche γ und δ haben müssen, wenn α und β gegeben sind, ist zufolge der Gll. (76) und (78)

$$(79) \qquad \gamma=\frac{\alpha(1-p)+k}{p}, \quad \delta=\frac{1-p}{p}\beta,$$

wo p jede reelle ganze Zahl, k jeden reellen ganzen Werth vorstellen kann.

Zweiter Fall. Ist der eine Exponent reell, der andere imaginär, so ist die Gl. (67) nur dann eine vollkommene, wenn der reelle Exponent einen reellen ganzen Werth hat.

Denn ist z. B. c der reelle Exponent, also $\delta=0$, so reducirt

sich die Gl. (A) auf $\beta n = \beta n'$, und wird daher stets für $n = n'$ erfüllt, während die Gl. (B), indem man für n seinen Werth n' setzt, in $\gamma(n' - n'') = m$ übergeht, also nach §. 237 nur befriedigt wird, wenn γ einen reellen ganzen Werth hat.

Dasselbe Resultat hätte man aus den Gl. (79) ziehen können, indem dieselben, wenn $\delta = 0$ ist, $p = 1$ und mithin $\gamma = k$ liefern.

Dritter Fall. Sind beide Exponenten reell, und ist dabei der eine, z. B. c, irrational, so erfordert die Vollkommenheit der Gl. (67), dass der andere Exponent b sich von einem Vielfachen von $b + c$ entweder gar nicht oder nur um eine reelle ganze Zahl unterscheide.

Beweis. Da in vorliegendem Falle, wo b und c reell sind, $\beta = 0$ und $\delta = 0$ ist, so ist die Gl. (A) stets von selbst erfüllt. Die Gl. (B) dagegen, da sie sich auch

$$(\alpha + \gamma)n = (\alpha + \gamma)n' + \gamma(n'' - n') + m,$$

oder, wenn man $n - n'$ durch N, $n'' - n'$ durch N' bezeichnet,

$$(\alpha + \gamma)\, N = \gamma N' + m \tag{80}$$

schreiben lässt, liefert nach α aufgelöst,

$$\alpha = \gamma\left(\frac{N'}{N} - 1\right) + \frac{m}{N},$$

oder wenn der Bequemlichkeit halber

$$\frac{N'}{N} = c, \quad \frac{m}{N} = C \tag{81}$$

gesetzt wird,

$$\alpha = \gamma(c - 1) + C. \tag{82}$$

Da nun, wie hier vorausgesetzt wird, γ irrational ist, und α denselben Werth behalten muss, welche (zusammengehörige) Werthe auch N, N' und m vorstellen mögen, so müssen nach §. 238, 2 die rationalen Coefficienten C und $c - 1$, und mithin auch c, einen unveränderlichen Werth haben.

Die Gll. (81), durch einander dividirt, geben ferner, wenn man $C : c$ mit ν bezeichnet,

$$m = \frac{C}{c} N' = \nu N',$$

mithin muss, da für jedes n' und n'', also auch für jeden reellen

ganzen Werth von $n'-n''$ d. h. von N', m einen reellen ganzen Werth haben soll, nach §. 237 auch ν von reellem ganzen Werthe sein. Da ferner für jeden reellen ganzen Werth von N' auch n und mithin N einen reellen ganzen Werth haben soll, und aus (81)

$$N = \frac{1}{c} N'$$

folgt, so muss (gleichfalls nach §. 237) auch $1:c$ eine reelle ganze Zahl oder die Null bedeuten. Wird daher dieser Quotient $1:c$ durch μ bezeichnet, und in (82) für m sein Werth $\nu N'$ gesetzt, so ergibt sich

$$\alpha = \gamma\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) + \frac{\nu}{\mu}. \tag{83}$$

Diese Form, in welcher μ jede reelle ganze Zahl und ν jeden reellen ganzen Werth vorstellen darf, ist es nun, welche das α haben muss, wenn die fragliche Potenzgleichung eine vollkommene sein soll. Denn die Gl. (83) ist zur Erfüllung der Gl. (80) nicht bloss nothwendig, sondern auch ausreichend, da, wenn sie erfüllt ist, wegen $N = \mu N'$ d. h. wegen $n - n' = \mu(n'' - n')$, sich $n = n' + \mu(n'' - n')$, und aus $m = \nu N'$ sich $m = \nu(n'' - n')$ findet, für jedes gegebene n' und n'' also reelle ganze Werthe für n und m existiren.

In der Gl. (83) ist der oben angegebene Ausspruch für die allgemeine Gültigkeit der Gl. (67) enthalten, da aus derselben

$$\alpha + \gamma = \frac{1}{\mu}(\gamma + \nu),$$

also

$$\gamma = \mu(\alpha + \gamma) - \nu$$

folgt, welche Gleichung in der That ausdrückt, dass γ sich von einem Vielfachen von $\alpha + \gamma$ nur um einen reellen ganzen Werth ν unterscheiden darf.

Wegen $\alpha = (\alpha + \gamma) - \gamma = \alpha + \gamma - \mu(\alpha + \gamma) + \nu = (\alpha + \gamma)(1 - \mu) + \nu$ unterscheidet sich dann auch α von einem Vielfachen von $\alpha + \gamma$ nur um einen reellen ganzen Werth.

Die Gl. (83) gibt zugleich zu erkennen, dass wenn der eine Exponent, γ, irrational ist, es im allgemeinen auch der andere, α, sein muss. Der einzige Fall, wo α rational sein kann, entspricht der Annahme $\mu = 1$, und erfordert also, dass dieser rationale Exponent einen reellen ganzen Werth ν habe.

Vierter Fall. Sind beide Exponenten reell und rational, so erfordert die unbeschränkte Anwendung der Gl. (67), dass, wenn b und c in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt durch $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ und $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ vorgestellt sind, der grösste gemeinsame Theiler von $\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1$ und $\alpha_2\gamma_2$ zugleich ein Theiler von $\alpha_1\gamma_2$ und $\alpha_2\gamma_1$ sei.

Beweis. Die hier allein zu erfüllende Bedingung ist die Erfüllung der Gl. (80), welche, wenn für α und γ ihre Werthe $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ gesetzt werden, und mit $\alpha_2\gamma_2$ multiplicirt wird, in

(84) $$(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)N = \alpha_2\gamma_1 N' + \alpha_2\gamma_2 m$$

übergeht. Nach §. 236 liefert aber diese Gleichung für jedes N' (wie hier gefordert wird) nur dann reelle ganze Werthe für N und m, wenn der grösste gemeinsame Theiler von $\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1$ und $\alpha_2\gamma_2$ zugleich ein Theiler von $\alpha_2\gamma_1$ und somit (da jeder Theiler, den $\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1$ und $\alpha_2\gamma_1$ gemein haben, zugleich die Differenz $(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)-\alpha_2\gamma_1$ d. h. $\alpha_1\gamma_2$ theilt) auch von $\alpha_2\gamma_1$ ist — was zu erweisen war.

Die gefundene Bedingung lässt sich auch so aussprechen: Ist k der kleinste Generalnenner von b und c, so darf die der Summe $b+c$ gleiche gebrochene Zahl sich auf keinen kleineren Nenner als k bringen lassen.

[Es sind also z. B. $a^{\frac{2}{3}}.\,a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{22}{15}}$ und $a^{\frac{1}{6}}\,a^{\frac{2}{9}} = a^{\frac{7}{18}}$ *) vollkommene Gleichungen, während $a^{\frac{1}{2}}\,a^{\frac{1}{2}} = a^1 = a$, $a^{\frac{1}{6}}.a^{\frac{2}{15}} = a^{\frac{3}{10}}$ und selbst $a^{\frac{1}{6}}.a^{\frac{2}{15}} = a^{\frac{27}{90}}$, unvollkommene Gleichungen sind.]

Die obige Bedingung ist allemal erfüllt, wenn $\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1$ und $\alpha_2\gamma_2$ relative Primzahlen sind, namentlich also, wenn der eine Exponent eine reelle ganze Zahl ist, da wenn z. B. γ eine ganze Zahl, also $\gamma_2 = 1$ ist, die angegebenen Ausdrücke in $\alpha_1+\alpha_2\gamma_1$ und α_2 übergehen, und folglich in der That keinen Theiler mit einander gemein haben.

*) Die Regel, welche man angegeben findet, dass die Gleichung eine vollkommene sei, wenn die Nenner der Exponenten relative Primzahlen zu einander seien, umfasst also nicht alle Fälle, in denen Vollkommenheit stattfindet.

§. 240. *Anwendbarkeit der Gleichung* $(ab)^c = a^c b^c$ *auf allgemeine mehrdeutige Potenzen.*

Da man
$$((ab)^c) = e^{c\log ab},$$
und
$$((a^c b^c)) = e^{c\log a}\, e^{c\log b} = e^{c(\log a + \log b)}$$
hat, und nach §. 225 $\log ab = \log a + \log b$ eine vollkommene Gleichung ist, so ist auch
$$((ab)^c) = ((a^c b^c))$$
eine vollkommene Gleichung.

§. 241. *Von den Bedingungen, unter denen sich die Gleichung* $a^{bc} = (a^b)^c$ *auf allgemeine mehrdeutige Potenzen anwenden lässt.*

Bezeichnen wir wiederum Modulus und Argument von a resp. durch r und φ und setzen $b = \alpha + \beta i$, $c = \gamma + \delta i$, also
$$bc = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i,$$
so ist, wenn der Kürze wegen
$$(\alpha\gamma - \beta\delta)\mathrm{l}r - (\alpha\delta + \beta\gamma)(2n\pi + \varphi) = u$$
$$(\alpha\delta + \beta\gamma)\mathrm{l}r + (\alpha\gamma - \beta\delta)(2n\pi + \varphi) = v$$
gesetzt wird, nach §. 233
$$((a^{bc})) = e^{u+vi}.$$

Andrerseits ist, wenn Modulus und Argument von a^b resp. durch R und Φ vorgestellt, d. h.
$$((a^b)) = e^{\mathrm{l}R + (2n_1\pi + \Phi)i}$$
gedacht wird,
$$(((a^b)^c)) = e^{\gamma \mathrm{l}R - \delta(2n'\pi + \Phi) + i[\delta \mathrm{l}R + \gamma(2n'\pi + \Phi)]}.$$
Es ist aber
$$((a^b)) = e^{[\alpha \mathrm{l}r - \beta(2n''\pi + \varphi)] + i[\beta \mathrm{l}r + \alpha(2n''\pi + \varphi)]},$$
mithin
$$\mathrm{l}R = \alpha \mathrm{l}r - \beta(2n''\pi + \varphi), \quad 2n_1\pi + \Phi = \beta \mathrm{l}r + \alpha(2n''\pi + \varphi)$$
und folglich, wenn
$$(\alpha\gamma - \beta\delta)\mathrm{l}r - (\alpha\delta + \beta\gamma)(2n''\pi + \varphi) - 2(n' - n_1)\pi\delta = u'$$
$$(\alpha\delta + \beta\gamma)\mathrm{l}r + (\alpha\gamma - \beta\delta)(2n''\pi + \varphi) + 2(n' - n_1)\pi\gamma = v'$$
gesetzt wird,
$$(((a^b)^c)) = e^{u'+v'i}.$$

Soll daher die Gl. $((a^{bc})) = (((a^b)^c))$ noch eine vollkommen gültige sein, so müssen (nach §. 219) die Gleichungen $u = u'$ und $v = v' + 2m\pi$ (unter m irgend welchen ganzen Werth verstanden) sich jederzeit erfüllen lassen.

Die Gleichung $u = u'$ reducirt sich, wie man aus den obigen Werthen von u und u' sieht (wenn man die identischen Theile auf beiden Seiten der Gleichung fortlässt, und bedenkt, dass $n' - n_1$ nicht mehr und nicht weniger vorstellen kann als n' allein [nämlich sämmtliche reelle ganze Werthe], so dass sich $n' - n_1$ auch durch n' ersetzen lässt), auf

(*C*) $$(\alpha\delta + \beta\gamma)n = (\alpha\delta + \beta\gamma)n'' + n'\delta,$$

und ebenso führt die Gleichung $v = v' + 2m\pi$ auf

(*D*) $$(\alpha\gamma - \beta\delta)n = (\alpha\gamma - \beta\delta)n'' + n'\gamma + m.$$

Damit nun alle Werthe von $((a^{bc}))$ auch Werthe von $(((a^b)^c))$ seien, müssen die Gll. (*C*) und (*D*) für jeden Werth von n reelle ganze Werthe für n', n'' und m liefern, und damit alle Werthe von $(((a^b)^c))$ zugleich Werthe von $((a^{bc}))$ seien, müssen eben diese Gleichungen für jeden Werth von n' und n'' reelle ganze Werthe für n und m liefern. Das Erste ist allemal möglich, da man nur $n' = n$, $n'' = n$ und $m = 0$ zu nehmen hat, um die Gleichungen für ein beliebig gegebenes n zu erfüllen, d. h. es ist in der That jeder Werth von $((a^{bc}))$ zugleich ein Werth von $(((a^b)^c))$. Nicht aber ist umgekehrt stets jeder Werth von $(((a^b)^c))$ ein Werth von $((a^{bc}))$, indem das Zweite nur unter gewissen Bedingungen statt findet.

Wir unterscheiden bei der Angabe dieser Bedingungen sechs Fälle.

Erster Fall. Ist von den Exponenten b und c der erste imaginär und der zweite reell, so muss der letzte einen reellen ganzen Werth haben.

Beweis. Da hier c als reell, also $\delta = 0$ vorausgesetzt wird, so reducirt sich die Gl. (*C*) auf $\beta\gamma n = \beta\gamma n''$, und ist also stets zu erfüllen, indem man nur $n = n''$ zu nehmen hat. Die Gl. (*D*), in welcher nun ausser $\delta = 0$ noch $n = n''$ zu nehmen ist, vereinfacht sich zu $n'\gamma + m = 0$, und hat nur der Bedingung zu genügen, dass sie für jedes n' einen reellen ganzen Werth für m liefere. Letzteres ist aber nach §. 237 nur möglich, wenn γ einen reellen ganzen Werth hat — mithin ist die obige Behauptung gerechtfertigt.

Zweiter Fall. Ist von den Exponenten b und c der erste reell und der zweite imaginär, so muss der erste eine (positive oder negative) gebrochene Zahl mit dem Zähler Eins sein.

Beweis. Da hier $\beta=0$ vorausgesetzt ist, so verwandelt sich die Gl. (C), wenn man durch δ dividirt (was erlaubt ist, weil c imaginär, also δ von Null verschieden gedacht wird), in

$$an = an'' + n',$$

woraus

$$n - n'' = \frac{1}{\alpha} n'$$

folgt. Da nun n und mithin $n - n''$ für jedes n' einen ganzen reellen Werth haben muss, so wird nach §. 237 erfordert, dass auch $\frac{1}{\alpha}$ einen reellen ganzen Werth habe. Bezeichnet man diesen durch μ, so ist der aus (C) jedesmal hervorgehende Werth von n

$$n = n'' + \mu n',$$

welcher die Gleichung (D) (wegen $\beta = 0$) auf

$$\alpha\gamma(n'' + \mu n') = \alpha\gamma n'' + n'\gamma + m, \text{ d. h. auf } \alpha\gamma\mu n' = n'\gamma + m,$$

oder indem man für α seinen Werth $1:\mu$ setzt, auf

$$\gamma n' = \gamma n' + m$$

bringt, mithin auf eine Gleichung, welche sich jedesmal durch $m = 0$ erfüllt. Dass α ein Bruch mit dem Zähler 1 sei, ist folglich, wie oben behauptet wurde, in der That die einzige zu erfüllende Bedingung.

Dritter Fall. Sind beide Exponenten imaginär, so muss sowohl δ als $\beta(\gamma^2 + \delta^2)$ durch $\alpha\delta + \beta\gamma$ theilbar sein.

Beweis. Zunächst ist klar, dass α, β, γ, δ nicht so beschaffen sein dürfen, dass $\alpha\delta + \beta\gamma = 0$ wird, da in diesem Falle die Gl. (C) in $\delta n' = 0$ übergehen und deswegen nur dann für jedes n' richtig bleiben würde, wenn $\delta = 0$ wäre, während hier c imaginär, also δ von Null verschieden vorausgesetzt wird. Ist aber $\alpha\delta + \beta\gamma$ nicht gleich Null, so ergibt sich aus der Gleichung (C), indem man dieselbe in der Form

$$(\alpha\delta + \beta\gamma)\,(n'' + \frac{\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma} n') = (\alpha\delta + \beta\gamma)n$$

schreibt,

$$n'' + \frac{\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma} n' = n,$$

während hieraus nach §. 237 folgt, da für jedes n' auch n und mithin $n - n''$ von reellem ganzen Werthe werden soll, dass $\delta : (\alpha\delta + \beta\gamma)$ einen reellen ganzen Werth haben, also δ durch $\alpha\delta + \beta\gamma$ theilbar sein muss.

Ist nun in der That δ z. B. das μfache von $\alpha\delta+\beta\gamma$, so gibt die letzte Gleichung $n=n''+\mu n'$,
und dies verwandelt die Gleichung (D) in

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)n''+\gamma n'-(\alpha\gamma-\beta\delta)(n''+\mu n')=m,$$

d. h. in
$$[\gamma-(\alpha\gamma-\beta\delta)\mu]n'=h.$$

Die letzte Gleichung erfordert aber, wie man sieht, zu ihrem Bestehen (s. §. 237), dass $\gamma-(\alpha\gamma-\beta\delta)\mu$, d. h. (indem man für μ seinen Werth $\delta:(\alpha\delta+\beta\gamma)$ wieder einführt)

$$\frac{\beta(\gamma^2+\delta^2)}{\alpha\delta+\beta\gamma}$$

einen reellen ganzen Werth habe, also $\beta(\gamma^2+\delta^2)$ durch $\alpha\delta+\beta\gamma$ theilbar sei *).

Die Erfüllung der oben angegebenen beiden Bedingungen ist sonach sowohl nothwendig als ausreichend für die Vollkommenheit der Gleichung $a^{bc}=(a^b)^c$ in dem vorliegenden Falle.

Vierter Fall. Sind beide Exponenten reell, aber c irrational, so muss c ein Vielfaches von bc (also b ein Bruch mit dem Zähler Eins) sein, oder es darf sich c von einem Vielfachen von bc nur um eine reelle ganze Zahl unterscheiden.

Beweis. Sind b und c reell, d. h. ist $\beta=\delta=0$ und folglich $b=\alpha$ und $c=\gamma$, so wird die Gl. (C) von selbst identisch und die Gl. (D) geht über in

(85) $$\alpha\gamma(n''-n)+\gamma n'=m.$$

Man hat daher alsdann, hierin $n-n''=N$ setzend,

(86) $$N=\frac{\gamma n'-m}{\alpha\gamma},$$

und diese Gleichung nach α auflösend,

(87) $$\alpha=\frac{n'}{N}-\frac{m}{N}\cdot\frac{1}{\gamma}.$$

Ist daher γ irrational, so muss, da α einen unveränderlichen Werth

*) Für $\gamma=0$ wird $\mu=\frac{1}{\alpha}$ und, $\frac{\beta(\gamma^2+\delta^2)}{\alpha\delta+\beta\gamma}=\frac{\beta\delta}{\alpha}$, so dass in diesem besonderen Falle nur α ein Bruch mit dem Zähler Eins, und $\frac{\beta\delta}{\alpha}$ eine reelle ganze Zahl zu sein braucht.

hat, nach §. 238, 2 sowohl $\frac{n'}{N}$ als $\frac{m}{N}$ einen festen Werth haben. Setzt man also

$$\frac{n'}{N} = c,\ \frac{m}{N} = C,$$

so hat man $$m = CN = \frac{C}{c}\,n',$$

und erkennt hieraus (s. §. 237), da m für jedes n' einen reellen ganzen Werth haben soll, dass auch $\frac{C}{c}$ einen reellen ganzen Werth, den wir durch ν bezeichnen wollen, haben muss. Sonach erhält man aus Gl. (86) wegen

(88) $$m = \nu n',$$

(89) $$N = \frac{\gamma-\nu}{\alpha\gamma}\,n',$$

und es muss mithin, da auch N für jedes n' reell und ganz werden soll, $\gamma-\nu$ durch $\alpha\gamma$ theilbar sein, d. h. es darf sich γ von einem Vielfachen von $\alpha\gamma$ nur um einen reellen ganzen Werth, um das hiesige ν, unterscheiden — wie oben behauptet worden.

Dass diese Bedingung nicht bloss nothwendig, sondern auch für die vollkommene Erfüllung der Gleichung $a^{bc}=(a^b)^c$ ausreichend ist, erkennt man sogleich, da es ja nur darauf ankam, für jedes gegebene n' und n'' reelle ganze Werthe von m und n zu gewinnen. Bezeichnet man nämlich den reellen ganzen Werth, den $\frac{\gamma-\nu}{\alpha\gamma}$ haben muss, durch μ, so dass man erhält

$$\gamma-\nu = \mu\alpha\gamma,$$

so ergibt sich

(90) $$\alpha = \frac{1}{\mu} - \frac{\nu}{\mu}\,\frac{1}{\gamma}$$

als diejenige Form, welche α haben muss, um der angegebenen Bedingung zu genügen. Die Gl. (89) aber, nämlich $N=\mu n'$, gibt $n=n''+\mu n'$, welcher (nothwendig ganze) Werth von n, verbunden mit dem Werthe $\nu n'$ von m, wenn für α der Werth aus (90) gesetzt wird, die Gl. (85) und folglich die Gl. (D) in der That identisch macht.

Anmerkung. Wie die Gl. (90) zeigt, entspricht der einzige Fall,

in welchem α rational werden kann, der Bedingung $\nu = 0$, also der Bedingung, dass α ein Bruch mit dem Zähler Eins sei.

Fünfter Fall. Ist c rational und b irrational, so muss c eine reelle ganze Zahl sein.

Beweis. Da in der Gl. (85) unter den jetzigen Voraussetzungen α irrational und γ rational ist, so erfordert ihr Bestehen nach §. 238, dass $\gamma(n''-n) = 0$ sei (also $n = n''$ genommen werde), und dass $\gamma n' = m$ sei, was nur dann für jedes n' möglich ist, wenn γ einen reellen ganzen Werth hat.

Sechster Fall. Sind beide Exponenten b und c reell, und ist dabei c rational, so muss auch b rational sein, und es dürfen, wenn die in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückten Werthe von b und c resp. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ und $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ sind, α_1 und γ_2 keinen gemeinsamen Theiler haben.

Beweis. Zu erfüllen ist hier wiederum nur die Gl. (85), in welche in vorliegendem Falle die Gl. (D) übergeht, und welche in Anbetracht der daraus gezogenen Gl. (87) zeigt, dass α mit γ (d. h. b mit c) zugleich rational sein muss. Setzt man nun in die Gl. (85) für α und γ ihre Werthe $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ und $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, und multiplicirt mit $\alpha_2\gamma_2$, so findet sich

$$\alpha_2\gamma_1 n' - \alpha_2\gamma_2 m = \alpha_1\gamma_1 N, \tag{91}$$

und diese Gleichung lehrt (s. 236), dass, wofern sich für jedes n' reelle ganze Werthe für m und N ergeben sollen, der grösste gemeinsame Theiler von $\alpha_1\gamma_1$ und $\alpha_2\gamma_2$ auch ein Theiler von $\alpha_2\gamma_1$ sein müsse.

Diese Bedingung wird z. B. erfüllt, wenn $\alpha\gamma$ in der Form $\frac{\alpha_1\gamma_1}{\alpha_2\gamma_2}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist; sie wird aber auch schon erfüllt, wenn α_1 und γ_2 relative Primzahlen sind. Denn nehmen wir an, dies sei nicht der Fall, und bezeichnen den grössten Theiler von α_1 und γ_2 durch p, den grössten Theiler von γ_1 und α_2 durch q, so dass, wenn

$$\alpha_1 = p\alpha_1', \; \gamma_2 = p\gamma_2'; \; \gamma_1 = q\gamma_1', \; \alpha_2 = q\alpha_2'$$

gesetzt wird, α_1' und γ_2', γ_1' und α_2' relative Primzahlen zu einander sind: so hat man

$$\alpha_1\gamma_1 = pq\alpha_1'\gamma'_1, \; \alpha_2\gamma_2 = pq\alpha_2'\gamma_2', \; \alpha_2\gamma_1 = q^2\alpha_2'\gamma_1',$$

und die oben gefundene Bedingung ist demnach, dass jeder gemeinsame Theiler von $pq\alpha_1'\gamma_1'$ und $pq\alpha_2'\gamma_2'$ zugleich ein Theiler von $q^2\alpha_2'\gamma_1'$ sei. Da aber nunmehr, weil auch α_1 und γ_1 resp. gegen α_2 und γ_2 der Voraussetzung nach relative Primzahlen sind, weder α_1' noch γ_1' mit $\alpha_2'\gamma_2'$ einen Theiler gemein hat, so ist pq der grösste Theiler zwischen $pq\alpha_1'\gamma_1'$ und $pq\alpha_2'\gamma_2'$, und es musss daher, wenn $((a^{bc})) = (((a^b)^c))$ eine vollkommene Gleichung werden soll, auch $q^2\alpha_2'\gamma_1'$ den Theiler pq haben. Es kann indess weder $q\alpha_2'$ noch $q\gamma_1'$ durch p, oder auch nur durch einen Theiler von p getheilt werden, weil $q\alpha_2'$ und $q\gamma_1'$ die Werthe von α_2 und γ_1 sind, und diese dann resp. mit α_1 und γ_2 (die ja auch das p zum Theiler haben) gegen die Voraussetzung einen gemeinsamen Theiler haben würden. Es ist folglich nothwendig $p = 1$, d. h. α_1 und γ_2 können keinen gemeinsamen Theiler haben. Ist diese Bedingung (dass α_1 und γ_2 ohne gemeinschaftlichen Theiler seien) aber erfüllt, so ist q der grösste Theiler von $\alpha_1\gamma_1$ und $\alpha_2\gamma_2$, während auch $\alpha_2\gamma_1$ sich durch q theilen lässt, und sonach ist in der That die Gl. (91) dann (nach §. 236) eine vollkommene — was zu beweisen war.

[Demnach ist z. B. $(a^{\frac{2}{5}})^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{10}}$ eine unvollkommene, dagegen $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{3}{10}}$ eine vollkommene Gleichung.]

§. 242. *Von den Bedingungen, unter denen sich die Gleichung $(a^b)^c = (a^c)^b$ auf die mehrdeutigen Potenzen anwenden lässt.*

Im vorigen §. haben wir $(((a^b)^c))$ auf die Form $e^{u'+v'i}$ gebracht. Auf dieselbe Form lässt sich daher auch $(((a^c)^b))$ bringen. Setzen wir nun $(((a^c)^b)) = e^{u_1+v_1 i}$ und bemerken, dass $(((a^b)^c))$ in $(((a^c)^b))$ übergeht, wenn b und c mit einander vertauscht werden, so werden wir offenbar für u_1 und v_1 Werthe bekommen, welche aus dem u' und v' des vorigen §. hervorgehen, wenn man α und γ, so wie β und δ gegenseitig mit einander vertauscht. Führen wir dies aus, ersetzen dabei der Unterscheidung wegen das in u' und v' vorkommende n' und n'' durch n_1 und n_2, und substituiren die erhaltenen Werthe von u_1 und v_1 in die Gleichungen $u_1 = u'$ und $v_1 = v' + 2m\pi$, welche die Bedingungen bilden, unter denen die in Rede stehende Gleichung eine vollkommen richtige wird, so erhalten wir nach gehöriger Reduction

$(E) \qquad (\alpha\delta+\beta\gamma)(n''-n_2) = \beta n_1 - \delta n'$

$(F) \qquad (\alpha\gamma-\beta\delta)(n''-n_2) = \alpha n_1 - \gamma n' + m.$

Damit nun jeder Werth von $((({a}^{b})^{c}))$ zugleich ein Werth von $((({a}^{c})^{b}))$ sei, müssen diese beiden Gleichungen für jedes gegebene n' und n'' reelle ganze Werthe für n_1, n_2 und m liefern, und damit umgekehrt jeder Werth von $((({a}^{c})^{b}))$ zugleich ein Werth von $((({a}^{b})^{c}))$ sei, müssen dieselben für jedes gegebene n_1 und n_2, reelle ganze Werthe für n', n'' und m geben. Da n'' und n_2 hier nur in der Differenz $n''-n_2$ vorkommen, so wird, wenn $n''-n_2 = N$ gesetzt wird, für jedes gegebene n_2 auch n'', sowie für jedes gegebene n'' auch n_2 einen reellen ganzen Werth erhalten, so oft N einen solchen hat, und man kann daher jene Bedingungen bequemer so aussprechen:

„Behufs der unbedingten Anwendbarkeit der Gl. $((({a}^{b})^{c}))=((({a}^{c})^{b}))$ müssen die Gll. (E) und (F) für jedes gegebene n' reelle ganze Werthe für n', N und m, so wie für jedes gegebene n_1 reelle ganze Werthe für n', N und m liefern."

Bei der Angabe der Bedingungen, unter denen dies eintritt, unterscheiden wir fünf Fälle.

Erster Fall. Sind beide Exponenten b und c imaginär, und wird der Modulus von b durch ϱ, der Modulus von c durch ϱ_1 bezeichnet, so muss, wenn $\alpha\delta+\beta\gamma = 0$ sein sollte, entweder $\alpha = \gamma$ und $\beta = -\delta$, oder $\alpha = -\gamma$ und $\beta = \delta$ sein. Ist dagegen $\alpha\delta+\beta\gamma$ von Null verschieden, so ist nöthig

a) wenn $\frac{\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}$ und $\frac{\delta\varrho^2}{\alpha\delta+\beta\gamma}$ irrational sind — dass $\beta-\delta$ oder $\beta+\delta$, so wie $\beta\varrho_1{}^2-\delta\varrho^2$ oder $\beta\varrho_1{}^2+\delta\varrho^2$ durch $\alpha\delta+\beta\gamma$ theilbar seien;

b) wenn die eben genannten beiden Quotienten rational sind — dass

$$\frac{\beta}{\alpha\delta+\beta\gamma} \text{ mit } \frac{\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}, \text{ und } \frac{\beta\varrho_1{}^2}{\alpha\delta+\beta\gamma} \text{ mit } \frac{\delta\varrho^2}{\alpha\delta+\beta\gamma},$$

nachdem sie in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, gleiche Nenner behalten;

c) wenn der erste jener Quotienten irrational, der zweite rational ist — dass $\beta-\delta$ oder $\beta+\delta$ durch $\alpha\delta+\beta\gamma$ theilbar sei und

dass $\alpha\delta+\beta\gamma$ mit $\beta\varrho_1^2$ und $\delta\varrho^2$ einerlei grösste gemeinsame Theiler habe;

d) wenn der erste der oben genannten Quotienten rational, der zweite irrational ist — dass $\beta\varrho_1^2-\delta\varrho^2$ oder $\beta\varrho_1^2+\delta\varrho^2$ durch $\alpha\delta+\beta\gamma$ theilbar sei, und dass $\alpha\delta+\beta\gamma$ mit β und δ einerlei grösste gemeinsame Theiler habe.

Beweis. Ist $\alpha\delta+\beta\gamma=0$, so geht die Gl. (E) über in $\beta n_1=\delta n'$ und kann also nach §. 237 nur dann für jedes n_1 ein reelles ganzes n', sowie für jedes n' ein reelles ganzes n_1 geben, wenn $\beta=\delta$ oder $\beta=-\delta$ ist. Da ferner aus $\alpha\delta+\beta\gamma=0$ für α der Werth $-\frac{\beta\gamma}{\delta}$ folgt, so hat man (wegen $\beta=\pm\delta$) $\alpha=\mp\gamma$. Wird nun in (F) $\pm\delta$ für β, $\mp\gamma$ für α gesetzt, so kommt
$$\mp(\alpha^2-\beta^2)(n''-n_2)=\alpha(n_1\pm n')+m,$$
und dieser Gleichung lässt sich allemal genügen, indem man nur für ein gegebenes n_1 und n_2, $n''=n_2$, $n'=\mp n_1$, $m=0$, für ein gegebenes n' und n'', $n_2=n''$, $n_1=\mp n'$, $m=0$ zu nehmen hat. Es sind mithin, wie oben behauptet worden, $\alpha=\mp\gamma$ und $\beta=\pm\delta$ die einzigen Bedingungen unter denen im vorliegenden Falle $(((a^b)^c))=(((a^c)^b))$ wird.

Ist demnach z. B. $\alpha=\gamma=0$, so muss $\beta=\delta$ oder $\beta=-\delta$ sein.

Für den Fall, dass $\alpha\delta+\beta\gamma$ von Null verschieden ist, setzen wir der Kürze halber
$$\frac{\beta}{\alpha\delta+\beta\gamma}=s,\ \frac{\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}=t,\ n''-n_2=N,$$
und erhalten aus (E) mittels der (nunmehr erlaubten) Division durch $\alpha\delta+\beta\gamma$ die Gleichung

(92) $$N=sn_1-tn'.$$

Sind nun (N), (n_1), (n') zusammengehörige (reelle ganze) Werthe von N, n_1, n', welche dieser Gleichung genügen, so müssen natürlich, wenn den hier gemachten Anforderungen entsprochen werden soll, auch für $n_1=(n_1)+1$ genügende reelle ganze Werthe von N und n' existiren, welche durch $(N)+\mu$ und $(n')+\nu$ bezeichnet sein mögen. Dies vorausgesetzt hat man aus (92), indem man für N, n_1, n' diese Werthe setzt,
$$(N)=s(n_1)-t(n'),\qquad (N)+\mu=s(n_1)+s-t(n')-t\nu,$$
und wenn man diese Gleichungen von einander subtrahirt, $\mu=s-\nu t$, und folglich

(93) $$s = \mu + \nu t.$$

Um nun zu untersuchen, ob diese für s als nothwendig gefundene Form hinreiche, die Gl. (92) und somit die Gl. (E) in jedem Falle zu erfüllen, substituiren wir in (92) für s den Ausdruck aus (93), was

(94) $$N = \mu n_1 + (n_1 \nu - n')t$$

gibt, und denken

1) t als irrational. Nach §. 238, 1 muss dann $n_1\nu - n' = 0$ und $N = \mu n_1$ sein. Die erste Gleichung, $n_1\nu - n' = 0$, gibt zu jedem n_1 einen reellen ganzen Werth für n', zu jedem gegebenen n' dagegen (s. §. 237) nur dann ein genügendes n_1, wenn $\frac{1}{\nu}$ einen reellen ganzen Werth hat, also $\nu = 1$ oder $\nu = -1$ ist; die zweite Gleichung $N = \mu n_1$, gibt unbedingt zu jedem n_1 ein genügendes N. Mithin darf μ jeden reellen ganzen Werth vorstellen, und $s = \mu \pm t$ ist bei irrationalem t die einzige von der Gl. (E) geforderte Bedingung.

Da hiermit die Gl. (92) in

$$n'' - n_2 = \mu n_1 - (n' \mp n_1)t$$

übergeht, so sind die zu einem gegebenen n_1 und n_2 gehörenden Werthe von n' und n'' resp. $\pm n_1$ und $n_2 + \mu n_1$; sowie die zu einem gegebenen n' und n'' gehörenden Werthe von n_1 und n_2 resp. $\pm n'$ und $n'' \mp \mu n'$.

Insofern nur $s = \mu \pm t$, also entweder $s - t = \mu$ oder $s + t = \mu$ zu sein braucht, und man

$$s - t = \frac{\beta - \delta}{\alpha\delta + \beta\gamma}, \quad s + t = \frac{\beta + \delta}{\alpha\delta + \beta\gamma}$$

hat, so wird zur Befriedigung der Gl. (E) bloss erfordert, dass entweder $\beta - \delta$ oder $\beta + \delta$ durch $\alpha\delta + \beta\gamma$ theilbar sei.

2) Für den Fall, dass t und mithin (wegen $s = \mu + \nu t$) auch s rational ist, bezeichne man die in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückten Werthe von s und t resp. durch $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$, so dass die Gl. (92) in

(95) $$Nqq' = pq'n_1 - p'qn'$$

verwandelt werden kann. Damit nun diese Gleichung zu jedem n' reelle ganze Werthe für N und n_1 liefere, muss der grösste gemeinsame Theiler von qq' und pq' zugleich ein Theiler von $p'q$

sein, d. h. es muss, da q' der grösste Theiler von qq' und pq' ist, q durch q' theilbar, also etwa $q = q'\varepsilon$ sein (unter ε einen beliebigen reellen ganzen Werth gedacht). Ferner fordert die Gl. (95), da aus derselben für jedes n_1 auch reelle ganze Werthe für N und n' hervorgehen müssen, dass der grösste gemeinsame Theiler von qq' und $p'q$ auch ein Theiler von pq' sei, d. h. dass auch q' durch q theilbar sei — was sich mit der vorher gefundenen Bedingung nur dann verträgt, wenn $\varepsilon = \pm 1$ ist. Man hat demnach als nothwendige und ausreichende Forderung, dass entweder $q = q'$ oder $q = -q'$ sei, d. h. dass

$$\frac{\beta}{\alpha\delta+\beta\gamma} \text{ und } \frac{\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}$$

in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt gleiche Nenner behalten.

Es bleibt nun noch übrig, zu untersuchen, welche Bedingungen die Erfüllung der Gl. (F) nöthig macht.

Zu dem Ende setze man aus der Gl. (92) für $n''-n_2$ den Werth $sn_1 - tn'$ in die Gl. (F), was

$$\frac{\alpha\gamma-\beta\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}(\beta n_1 - \delta n') = \alpha n_1 - \gamma n' + m$$

gibt, und, indem man diese Gleichung mit $\alpha\delta+\beta\gamma$ multiplicirt und gehörig reducirt, auf

$$\delta(\alpha^2+\beta^2)n_1 = \beta(\gamma^2+\delta^2)n' - (\alpha\delta+\beta\gamma)m$$

führt, d. h., wenn $\alpha^2+\beta^2 = \varrho^2$ und $\gamma^2+\delta^2 = \varrho_1{}^2$ gesetzt, und s und t in der obigen Bedeutung gebraucht wird, auf

(96) $$m = s\varrho_1{}^2 n' - t\varrho^2 n_1.$$

Diese Gleichung würde mit der Gl. (92) zusammenfallen, wenn man s für $s\varrho_1{}^2$ und t für $t\varrho^2$ setzte; folglich wird die Gl. (96) und somit die Gl. (F) nur dann, aber auch dann immer, erfüllt

1) wenn $t\varrho^2$ irrational ist, so oft entweder $s\varrho_1{}^2 - t\varrho^2$ oder $s\varrho_1{}^2 + t\varrho^2$, d. h.

$$\frac{\beta(\gamma^2+\delta^2)-\delta(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\delta+\beta\gamma} \text{ oder } \frac{\beta(\gamma^2+\delta^2)+\delta(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\delta+\beta\gamma}$$

einen reellen ganzen Werth hat, also so oft $\beta\varrho_1{}^2 - \delta\varrho^2$ oder $\beta\varrho_1{}^2 + \delta\varrho^2$ durch $\alpha\delta+\beta\gamma$ theilbar ist;

2) wenn $t\varrho^2$ rational ist, so oft $s\varrho_1{}^2$ und $t\varrho^2$ in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt gleiche Nenner erhalten.

Hieraus folgen unmittelbar die oben angegebenen Bedingungen der Anwendbarkeit der Gl. $(((a^b)^c)) = (((a^c)^b))$.

Anmerkung. Ist z. B. $\beta = \delta$, so ist die aus (E) hervorvorgehende Bedingung von selbst erfüllt, und man erhält, da nun $\beta\varrho_1^2 - \delta\varrho^2 = \beta(\gamma^2 - \alpha^2)$, $\beta\varrho_1^2 + \delta\varrho^2 = \beta(\varrho^2 + \varrho_1^2)$ und $\alpha\delta + \beta\gamma = \beta(\alpha + \gamma)$ wird, als einzige Bedingung, dass entweder $\gamma - \alpha$ eine reelle ganze Zahl, oder $\varrho^2 + \varrho_1^2$ durch $\alpha + \gamma$ theilbar sei.

Zweiter Fall. Ist von den Exponenten b und c der eine reell, der andere imaginär, so muss der reelle den Werth $+1$ oder -1 haben.

Beweis. Ist c der reelle Exponent, also $\delta = 0$, so liefert die Gl. (E) $\beta\gamma N = \beta n_1$, d. h. $\gamma N = n_1$, und fordert also, dass γ ein Bruch mit dem Zähler Eins, etwa gleich $1 : \mu$ sei, damit N für jedes gegebene n_1 einen reellen ganzen Werth erlange. Aus (F) wird dann, γN durch n_1 ersetzend, $\alpha n_1 = \alpha n_1 - \gamma n' + m$, d. h. $m = \gamma n'$, welche Gleichung für jedes n' nur erfüllt wird, wenn γ einen reellen ganzen Werth hat. Dies verträgt sich aber mit der vorigen Bedingung nur, wenn $\mu = \pm 1$, also $\gamma = 1$ oder $\gamma = -1$ wird, mithin ist die obige Behauptung gerechtfertigt.

Dritter Fall. Sind beide Exponenten reell, aber der eine, etwa c, irrational, ohne jedoch die Form $\frac{r + \sqrt{k}}{h}$ zu haben (unter r einen reellen ganzen Werth, und unter k und h reelle ganze Zahlen gedacht), so muss der andere Exponent b sich auf die Form

$$\frac{c + \mu}{\nu c + 1} \text{ oder } \frac{c + \mu}{\nu c - 1}$$

bringen lassen, wo wiederum μ und ν irgend welche reelle ganze Werthe vorstellen — oder was dasselbe ist (da in diesem Falle $\nu bc = (c - b) + \mu$ oder $\nu bc = (c + b) + \mu$ wird): es darf sich die Summe $c + b$ oder die Differenz $c - b$ der Exponenten von einem Vielfachen ihres Produkts nur um einen reellen ganzen Werth unterscheiden.

Beweis. Wegen $\beta = \delta = 0$ fällt die Gl. (E) von selbst fort, und die Gl. (F) reducirt sich auf

$$(G) \qquad \alpha\gamma N - \alpha n_1 + \gamma n' - m = 0.$$

Haben nun α und γ die zur Erfüllung dieser Gleichung nöthige Beschaffenheit, und sind (n'), (n_1), (N), (m) besondere zusammen-

gehörige Werthe resp. von n', n_1, N, m, so erhält man, diese Werthe in die Gl. (G) hineinsetzend und nach α auflösend,

$$(97) \qquad \alpha = \frac{(m) - \gamma(n')}{\gamma(N) - (n_1)},$$

und diesen Werth wiederum für α in der allgemeinen Gleichung substituirend und dieselbe alsdann mit $\gamma(N) - (n_1)$ multiplicirend,

$$(\gamma N - n_1)\ ((m) - \gamma(n')) - (m - \gamma n')(\gamma(N) - (n_1)) = 0,$$

d. h.

$$(98)\ [n'(N) - N(n')]\gamma^2 + [N(m) + n_1(n') - n'(n_1) - m(N)]\gamma + m(n_1) - n_1(m) = 0.$$

Da nun hier die Coefficienten von γ^2 und γ, so wie $m(n_1) - n_1(m)$, reelle ganze Werthe haben, und γ nicht die Form $\frac{r+\sqrt{k}}{h}$ haben soll, so muss zufolge des §. 238, 3

$$(99) \qquad n'(N) - N(n') = 0$$

$$(100) \qquad N(m) + n_1(n') - n'(n_1) - m(N) = 0$$

$$(101) \qquad m(n_1) - n_1(m) = 0$$

sein.

Die Gl. (99) fordert, da sie für jedes n' ein reelles ganzes N liefern muss, dass $(N):(n')$ einen reellen ganzen Werth habe, während die Gl. (101) verlangt, damit für jedes n_1 ein genügendes m hervorgehe, dass $(m):(n_1)$ von reellem ganzen Werthe sei. Bezeichnen wir diese Werthe durch ν und μ, d. h. setzen wir

$$\frac{(N)}{(n')} = \nu, \quad \frac{(m)}{(n_1)} = \mu,$$

so dass sich aus (99) und (101)

$$N = \nu n', \quad m = \mu n_1$$

ergibt, so verwandelt sich die Gl. (100), für N und m nun $\nu n'$ und μn_1 setzend, in

$$\nu n'(m) - n'(n_1) + n_1(n') - \mu n_1(N) = 0,$$

woraus, wenn (m) durch das gleichgeltende $\mu(n_1)$, und (N) durch das gleichgeltende $\nu(n')$ ersetzt wird,

$$\mu\nu n'(n_1) - \mu\nu n_1(n') - n'(n_1) + n_1(n') = 0,$$

d. h.

$$(\mu\nu - 1)[n'(n_1) - n_1(n')] = 0$$

entspringt.

Sonach muss entweder

(102) $\mu\nu - 1 = 0$ oder (103) $n'(n_1) - n_1(n') = 0$ sein.

Die Gleichung $\mu\nu - 1 = 0$ führt auf $\mu = 1$ und $\nu = 1$, oder auf $\mu = -1$ und $\nu = -1$, mithin auf $(m) = (n_1)$ und $(N) = (n')$, oder auf $(m) = -(n_1)$ und $(N) = -(n')$, so dass die Gl. (97) in

$$\alpha = \frac{\pm(n_1) - \gamma(n')}{\pm\gamma(n') - (n_1)},$$

also in $\alpha = 1$ oder $\alpha = -1$ übergeht, jenachdem man von den doppelten Vorzeichen die unteren oder die oberen benutzt.

Die Gl. (103) dagegen erfordert, da sie sowohl für jedes n_1 ein reelles ganzes n', als für jedes n' ein reelles ganzes n_1 geben muss, nach §. 237, dass $(n') = \pm(n_1)$ sei, so dass die Gl. (97) sich in

$$(104) \qquad \alpha = \frac{\mu(n_1) \mp \gamma(n_1)}{\pm\gamma\nu(n_1) - (n_1)} = \frac{\mu \mp \gamma}{\pm\gamma\nu - 1}$$

verwandelt. Da hier μ und ν jeden reellen ganzen Werth, also auch die Werthe $+1$ und -1 verstellen können, so ist die aus Gl. (102) hervorgegangene Bedingung in der aus (103) hervorgehenden mit enthalten.

Mit der Erfüllung der Gl. (104), die als nothwendig anerkannt worden, wird die Gl. (G) stets miterfüllt, da sich selbige nunmehr

$$\frac{\mu \mp \gamma}{\pm\gamma\nu - 1}(\gamma N - n_1) = m - \gamma n'$$

schreiben lässt, also für ein gegebenes n_1 und n_2 befriedigt wird, im Falle die oberen Zeichen gelten, wenn man $n' = n_1$, $m = \mu n_1$ und $N = \nu n_1$, d. h. $n'' = n_2 + \nu n_1$, nimmt, oder — im Falle die unteren Zeichen gelten, wenn man $n' = -n_1$, $m = \mu n_1$ und $N = -\nu n_1$, d. h. $n'' = n_2 - \nu n_1$, nimmt; so wie bei gegebenem n' und n'', wofern man resp.

$$n_1 = n',\ m = \mu n',\ n_2 = n'' + \nu n'$$

oder $$n_1 = -n',\ m = -\mu n',\ n_2 = n'' + \nu n'$$

nimmt.

Die einzig erforderliche Bedingungsgleichung (104) fällt aber mit der im Lehrsatze gegebenen zusammen — mithin ist der hier verlangte Beweis geliefert.

V i e r t e r F a l l. Sind beide Exponenten reell, der eine aber, etwa c, irrational und von der Form $\frac{r+\sqrt{k}}{h}$ (r, k und h in der oben erwähnten Bedeutung genommen), so muss der andere Exponent

die Form $\frac{p+q\sqrt{k}}{g}$ haben, und p, q, g müssen solche reelle ganze Werthe vorstellen, dass 1) der grösste Theiler von $qr+p$ und g zugleich grösster Theiler von $qr+p$ und h wird, dass 2) jeder gemeinsame Theiler von $q(k-r^2)$ und gh zugleich $(p-qr)h$ theilt, und dass 3) jeder gemeinsame Theiler von q^2k-p^2 und ghq zugleich $(p-qr)g$ theilt.

Beweis. Man hat hier, wegen $\beta=\delta=0$, wiederum nur die Gl. (G) zu berücksichtigen, aus welcher für α sich der Ausdruck in Gl. (97) ergibt, der nunmehr, da

$$\gamma = \frac{r+\sqrt{k}}{h} \tag{105}$$

vorausgesetzt ist, in

$$\alpha = \frac{h(m)-r(n')-(n')\sqrt{k}}{r(N)-h(n_1)+(N)\sqrt{k}}$$

übergeht, also, wenn in demselben Zähler und Nenner mit $r(N)-h(n_1)-(N)\sqrt{k}$ multiplicirt wird, ein α von der oben angegebenen Form

$$\frac{p+q\sqrt{k}}{g} \tag{106}$$

gibt.

Der Bequemlichkeit wegen denken wir in dem letzten Ausdrucke p, q, g in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt, d. h. wenn p und q mit g einen gemeinsamen Theiler haben, diesen Theiler durch Division des Zählers und Nenners fortgeschafft; und setzen dann in (G) für γ und α die Werthe aus (105) und (106).

Es ergibt sich dabei, wenn man die rationalen Glieder von den irrationalen trennt und mit gh die Gleichung multiplicirt,

$$(pr+qk)N-phn_1+grn'-ghm$$
$$+[(qr+p)N-qhn_1+gn']\sqrt{k}=0,$$

und es muss daher zufolge des §. 238, 1

$$(pr+qk)N-phn_1+grn'-ghm=0, \tag{107}$$

$$(qr+p)N-qhn_1+gn'=0 \tag{108}$$

sein. — Damit die letzte Gleichung für jedes n_1 reelle ganze Werthe für n' und N gebe, muss der grösste gemeinsame Theiler von $qr+p$ und g zugleich ein Theiler von qh sein. Es kann aber, falls $qr+p$ in der That einen von Eins verschiedenen gemeinsamen Theiler mit g hat, q nicht eben diesen Theiler haben; denn wäre

ε ein solcher Theiler und etwa $q = q'\varepsilon$, $g = g'\varepsilon$, so würde $qr+p$ sich $q'r\varepsilon+p$ schreiben lassen, also nicht durch ε theilbar sein, wenn es nicht auch p wäre, während der Voraussetzung gemäss p und q mit g keinen Theiler gemein haben sollen. Mithin muss jeder gemeinsame Theiler von $qr+p$ und g auch ein Theiler von h sein. — Damit ferner eben diese Gl. (108) für jedes n' reelle ganze Werthe für N und n_1 gebe, muss der grösste gemeinsame Theiler von $qr+p$ und qh zugleich Theiler von g sein. Da aber $qr+p$ mit q keinen Theiler gemein haben kann, der zugleich Theiler von g wäre, weil sonst gegen die Voraussetzung auch p diesen Theiler haben müsste, so folgt, dass der grösste Theiler von $qr+p$ und h zugleich Theiler von g sein muss.

Die erste der oben aufgestellten Bedingungen, dass $qr+p$ mit g und mit h denselben grössten gemeinsamen Theiler haben müsse, ist somit gerechtfertigt.

Setzen wir endlich den aus (108) für n' sich ergebenden Werth in die Gl. (107), so findet sich

$$(109) \qquad q(k-r^2)N-(p-qr)hn_1-ghm=0,$$

welche Gleichung, da es für jedes n_1 reelle ganze Werthe von N und m geben soll, erfordert, dass jeder gemeinsame Theiler von $q(k-r^2)$ und gh zugleich $(p-qr)h$ theile. Es ist somit auch die zweite der oben aufgestellten Bedingungen gerechtfertigt.

Setzen wir endlich den aus Gl. (108) für n_1 sich ergebenden Werth in die Gl. (107), so findet sich

$$(110) \qquad (q^2k-p^2)N-(p-qr)gn'-ghqm=0,$$

welche Gleichung wiederum verlangt, damit für jedes n' genügende Werthe von N und m resultiren können, dass jeder gemeinsame Theiler von q^2k-p^2 und ghq zugleich $(p-qr)g$ theile.

Es ist demnach auch die dritte und letzte der oben aufgestellten Bedingungen gerechtfertigt.

Ein Beispiel, für welches die Gl. $(a^b)^c = (a^c)^b$ unbedingt anwendbar ist, erhält man unter andern, wenn man

$$b = \frac{4+5\sqrt{3}}{6}, \quad c = \frac{2+\sqrt{3}}{6}$$

setzt.

A n m e r k u n g. Aus den Formeln des dritten und vierten Falles ergibt sich, dass, wenn der eine Exponent c irgendwie ir-

rational ist, auch im allgemeinen der andere Exponent irrational sein müsse, wenn den geforderten Bedingungen ein Genüge geschehen soll, indem der einzige rationale Werth, den b haben dürfte, $+1$ oder -1 ist. Es folgt dies auch leicht direkt aus der Gl. (G). Denn schreiben wir dieselbe in der Form

$$\gamma(\alpha N + n') - (\alpha n_1 + m) = 0,$$

so sehen wir, dass unter Voraussetzung eines rationalen α und eines irrationalen γ, $\alpha N + n' = 0$ und $\alpha n_1 + m = 0$ sein muss, während die erste dieser Gleichungen, um für jedes n' ein genügendes N zu geben, fordert, dass $\frac{1}{\alpha}$ einen reellen ganzen Werth habe; die zweite Gleichung aber, um für jedes n_1 ein genügendes m zu geben, dass α einen reellen ganzen Werth habe. Beide Folgerungen vertragen sich aber nur dann, wenn $\alpha = +1$ oder $\alpha = -1$ ist.

Fünfter Fall. Sind beide Exponenten b und c reell und rational, und in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt, resp. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ und $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, so dürfen $\alpha_1\gamma_1$ und $\alpha_2\gamma_2$ keinen gemeinsamen Theiler haben; es muss also $\frac{\alpha_1\gamma_1}{\alpha_2\gamma_2}$ der in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückte Werth von bc sein.

Beweis. Die Gl. (G), welcher wegen $\beta = \delta = 0$ hier allein zu genügen ist, gibt, wenn man für α und γ ihre Werthe $\alpha_1 : \alpha_2$, $\gamma_1 : \gamma_2$ setzt und mit $\alpha_2\gamma_2$ multiplicirt,

(111) $$\alpha_1\gamma_1 N - \alpha_1\gamma_2 n_1 + \alpha_2\gamma_1 n' - \alpha_2\gamma_2 m = 0,$$

und hat für jedes gegebene n_1 reelle ganze Werthe für N, m und n', so wie für jedes gegebene n' reelle ganze Werthe für N, m und n_1 zu liefern.

Haben nun die Coefficienten von N und m, nämlich $\alpha_1\gamma_1$ und und $\alpha_2\gamma_2$ einen gemeinsamen Theiler, so müssen, da α_1 und α_2, γ_1 und γ_2 relative Primzahlen zu einander sind, entweder α_1 und γ_2, oder α_2 und γ_1, oder sowohl α_1 und γ_2 als α_2 und γ_1 einen gemeinsamen Theiler haben.

Hätten aber α_1 und γ_2 einen Theiler ε mit einander gemein, wäre also etwa $\alpha_1 = \alpha'\varepsilon$, $\gamma_2 = \gamma'\varepsilon$, so würde die obige Gleichung für $n' = 1$ (für welchen Fall sie noch bestehen bleiben muss) in

$$\alpha'\gamma_1\varepsilon N - \alpha'\gamma_2\varepsilon n_1 - \alpha_2\gamma'\varepsilon m = -\alpha_2\gamma_1$$

übergehen und demnach auf

$$\alpha'\gamma_1 N - \alpha'\gamma_2 n_1 - \alpha_2\gamma' m = -\frac{\alpha_2\gamma_1}{\varepsilon}$$

führen; es müsste also, da die linke Seite dieser Gleichung einen reellen ganzen Werth hat, auch $\frac{\alpha_2\gamma_1}{\varepsilon}$ einen solchen haben, was unmöglich ist, da sonst $\alpha_2\gamma_1$ durch ε theilbar sein, also α_2 oder γ_1 mit ε einen Theiler gemein haben würde. Hätte aber α_2 mit ε einen Theiler gemein, so müsste (gegen die Voraussetzung) auch α_2 mit α_1 (weil letzteres gleich $\alpha'\varepsilon$ ist) einen gemeinschaftlichen Theiler haben; und hätte γ_1 mit ε einen gemeinsamen Theiler, so würden auch γ_1 mit γ_2 (weil $\gamma_2 = \gamma'\varepsilon$ ist) einen Theiler gemein haben.

Ebenso folgt, dass α_2 und γ_1 ohne gemeinsame Theiler sein müssen, da sonst die Gl. (111) sich für $n_1 = 1$ nicht mehr erfüllen liesse, indem, wenn ein gemeinsamer Theiler ϑ existirte, und $\alpha_2 = \alpha'\vartheta$, $\gamma_1 = \gamma'\vartheta$ gesetzt wird, aus jener Gleichung durch Division mit ϑ die Gleichung

$$\alpha_1\gamma' N + \alpha'\gamma_1 n' - \alpha'\gamma_2 m = \frac{\alpha_1\gamma_2}{\vartheta}$$

hervorginge, und daraus folgen würde, dass auch $\alpha_1\gamma_2$ durch ϑ theilbar sei, und dass somit auch α_1 und α_2 oder γ_1 und γ_2 einen gemeinsamen Theiler enthielten. Ist hingegen die Bedingung erfüllt, dass $\alpha_1\gamma_1$ und $\alpha_2\gamma_2$ relative Primzahlen zu einander sind, so lässt sich die Gl. (G) stets befriedigen, d. h. es wird die Gl. $(((a^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}})) = (((a^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{b}}))$ in der That eine vollkommene, weil die Gl. (111), die sich nun so schreiben lässt

$$\alpha_1\gamma_1 N - \alpha_2\gamma_2 m = \alpha_1\gamma_2 n_1 - \alpha_2\gamma_1 n',$$

nach §. 236 (da $\alpha_1\gamma_1$ und $\alpha_2\gamma_2$ keinen gemeinsamen Theiler haben) für jeden gegebenen reellen ganzen Werth von $\alpha_1\gamma_2 n_1 - \alpha_2\gamma_1 n'$, also namentlich für jedes gegebene n_1 und n', reelle ganze Werthe für N und m zu liefern im Stande ist.

§. 243. *Von den Bedingungen, unter denen die Gleichung* $\log((a^{\mathfrak{b}})) = b \log a$ *allgemein anwendbar ist.*

Ehe wir zur vollständigen Vergleichung der Werthe von $\log((a^{\mathfrak{b}}))$ und $b \log a$ schreiten, werden wir zeigen, dass der Haupt-

werth von $b \log a$ allemal einem Werthe von $\log((a^b))$ gleich sein muss.

Zu dem Ende bezeichnen wir den Hauptwerth von $\log a$ durch La, den Modulus und das Argument von a resp. durch r und φ, den Hauptwerth von $((a^b))$ durch $[a^b]$, und den Modulus und das Argument von $[a^b]$ resp. durch R und ψ, und setzen endlich $b = \alpha + \beta i$.

Alsdann ist

$$[a^b] = e^{bLa} = e^{b(lr + \varphi i)} = e^{(\alpha lr - \beta\varphi) + (\beta lr + \alpha\varphi)i},$$

d. h. $$[a^b] = e^{\alpha lr - \beta\varphi}[\cos(\beta lr + \alpha\varphi) + i \sin(\beta lr + \alpha\varphi)],$$

und mithin

$$R = e^{\alpha lr - \beta\varphi}, \quad lR = \alpha lr - \beta\varphi$$

$$\cos\psi = \cos(\beta lr + \alpha\varphi), \quad \sin\psi = \sin(\beta lr + \alpha\varphi),$$

so dass sich ψ und $\beta lr + \alpha\varphi$ nur um eine gerade Anzahl π unterscheiden können.

Es ist demnach

$$\log[a^b] = lR + (2n\pi + \psi)i = (\alpha lr - \beta\varphi) + (2n\pi + \beta lr + \alpha\varphi)i.$$

Andrerseits ist

$$bLa = (\alpha + \beta i)(lr + \varphi i) = (\alpha lr - \beta\varphi) + (\beta lr + \alpha\varphi)i,$$

und folglich

(112) $$\log[a^b] = bLa + 2n\pi i.$$

Somit ist bLa in der That einem Werthe von $\log[a^b]$, nämlich dem zu $n = 0$ gehörenden Werthe, gleich, welcher, beiläufig gesagt, mit dem Hauptwerthe $L[a^b]$ zusammenfällt, so oft $\beta lr + \alpha\varphi$ positiv und kleiner als 2π ist.

Gehen wir nun zur Vergleichung der allgemeinen Werthe von $\log((a^b))$ und $b \log a$ über.

Es ist zufolge des §. 224

$$b \log a = b(La + \log 1) = bLa + 2n\pi i(\alpha + \beta i), \text{ d. h.}$$

(113) $$b \log a = bLa - 2n\beta\pi + 2n\alpha\pi i.$$

Andrerseits ist, da man zufolge des §. 235 $((a^b)) = [a^b]((1^b))$ hat, nach §. 225

$$\log((a^b)) = \log([a^b]((1^b))) = \log[a^b] + \log((1^b)),$$

und somit wegen Gl. (112) und weil nach §. 225 $\log 1 + \log((1^b)) = \log((1.1^b)) = \log((1^b))$ ist,

(114) $$\log((a^b)) = bLa + 2n\pi i + \log((1^b)) = bLa + \log 1 + \log((1^b)) = bLa + \log((1^b)).$$

Ferner hat man nach §. 234 Gl. (66)

$$((1^b)) = e^{-2n'\beta\pi}(\cos 2n'\alpha\pi + i \sin 2n'\alpha\pi),$$

und folglich, da demnach $e^{-2n'\beta\pi}$ der Modulus, und $\cos 2n'\alpha\pi$ und $\sin 2n'\alpha\pi$ resp. der Cosinus und Sinus des Arguments von $((1^b))$ ist,

(115) $$\log((1^b)) = -2n'\beta\pi + 2\pi(n'' + \alpha n')i.$$

Aus der Verbindung der Gll. (114) und (115) geht dann hervor

(116) $$\log((a^b)) = b\mathrm{L}a - 2n'\beta\pi + 2\pi(n'' + \alpha n')i.$$

Die Vergleichung der Formeln (113) und (116) zeigt, dass alle Werthe von $b \log a$ zugleich Werthe von $\log((a^b))$ sind, und zwar den zu $n'' = 0$ gehörenden Werthen des letzten Ausdruckes entsprechen.

Zugleich sieht man aber, dass, wenn umgekehrt alle Werthe von $\log((a^b))$ auch Werthe von $b \log a$ sein sollen, die Differenz

$$\log((a^b)) - b \log a = 2\beta\pi(n - n') + 2\pi(n'' + \alpha n' - \alpha n)i$$

für jeden Werth von n' und n'' muss verschwinden können, d. h. dass für jeden Werth von n' und n'' reelle ganze Werthe von n existiren müssen, welche

$$2\beta\pi(n - n') = 0\,,\quad 2\pi(n'' + \alpha n' - \alpha n) = 0$$

machen.

Ist nun 1) b imaginär, also β von Null verschieden, so wird die erste Gleichung nur für $n = n'$ erfüllt, und die zweite reducirt sich dann auf $n'' = 0$, so dass sämmtliche, zu den von Null verschiedenen Werthen von n'' gehörende Werthe von $\log((a^b))$ dem Produkte $b \log a$ abgehen.

Ist 2) b reell aber irrational, so ist wegen $\beta = 0$, die einzige zu erfüllende Gleichung

$$n'' + \alpha(n' - n) = 0,$$

welche nach §. 238, 1 in die Gleichungen $n'' = 0$ und $n' - n = 0$ zerfällt.

Es bleiben daher auch hier wiederum alle Werthe von $\log((a^b))$, welche zu einem von Null verschiedenen Werthe von n'' gehören, dem $b \log a$ fremd.

Ist endlich 3) b reell und rational, so erfordert die einzig zu erfüllende Gleichung $n'' + \alpha(n' - n) = 0$, da sie für jedes n'' einen reellen ganzen Werth für $n' - n$ zu liefern hat, dass $\frac{1}{\alpha}$ eine reelle ganze Zahl sei.

Die Gleichung $\log((a^b)) = b \log a$ ist folglich nur in dem einzigen Falle vollkommen, wenn b eine positive oder negative gebrochene Zahl mit dem Zähler Eins ist, und sie lässt sich in diesem Falle, $b = \pm \frac{1}{\mu}$ setzend, in der Form

$$\log\left(\left(\sqrt[\mu]{a^{\pm 1}}\right)\right) = \frac{\log a^{\pm 1}}{\mu}$$

wiedergeben.

bb. Die abgeleiteten Gleichungen der Potenzlehre.

§. 244. *Lehrsatz.* Die Gleichungen $a^{-c} = \left(\frac{1}{a}\right)^c$ und $a^{-c} = \frac{1}{a^c}$ sind auch für allgemeine mehrdeutige Potenzen vollkommen gültig.

Beweis der ersten Gleichung. Nach §. 241 ist die Gleichung $(a^{-1})^c = a^{-c}$ auch für die mehrdeutigen Potenzen vollkommen richtig, mag c reell oder imaginär sein, mithin hat auch, da wegen der Eindeutigkeit der Potenzen $((a^{-1}))$ und $((a^1))$, $((a^{-1})) = \frac{1}{((a^1))} = \frac{1}{a}$ ist, die Gleichung

$$\frac{1}{((a))^c} = ((a^{-c}))$$

eine unbedingte Geltung.

Beweis der zweiten Gleichung. Die Gleichung $((a^{-c})) = 1:((a^c))$ ist offenbar eine vollkommene, sobald für jeden Werth von $((a^c))$ ein Werth von $((a^{-c}))$, sowie für jeden Werth von $((a^{-c}))$ ein Werth von $((a^c))$ sich findet, welcher derselben genügt, d. h. da $1:((a^c))$ nur dasjenige vorstellt, was mit $((a^c))$ multiplicirt Eins gibt: so oft zu jedem Werth von $((a^c))$ ein Werth von $((a^{-c}))$, und zu jedem Werth von $((a^{-c}))$ ein Werth von $((a^c))$ gefunden werden kann, welcher $((a^c))((a^{-c})) = 1$ macht. Man erhält aber die Werthe von $((a^c))$, wenn man in $e^{c \log a}$ für den $\log a$ nach und nach alle seine Werthe setzt, und die Werthe von $((a^{-c}))$, wenn man in $e^{-c \log a}$ dem $\log a$ alle seine Werthe beilegt. Da nun $e^{c \log a}\, e^{-c \log a} = e^{c(\log a - \log a)}$ ist, so erhält man in der That

$$((a^c))((a^{-c})) = e^{c(\log a - \log a)} = e^0 = 1,$$

so oft in dem Exponenten $c(\log a - \log a)$ für den ersten $\log a$

derselbe Werth, wie für den zweiten gesetzt wird. Man hat also nur bei einem gegebenen Werth von $((a^c))$, in $((a^{-c}))$ denjenigen Werth für $\log a$ zu wählen, welcher in $((a^c))$ benutzt worden war, so wie bei jedem gegebenen Werth von $((a^{-c}))$, in $((a^c))$ denjenigen Werth von $\log a$, welcher in $((a^{-c}))$ benutzt worden war, um die verlangte Gleichung herzustellen. Die Vollkommenheit der in Rede stehenden Gleichung ist somit erwiesen.

§. 245. *Von den Bedingungen, unter denen die Gleichung* $((a^{b-c})) = ((a^b)) : ((a^c))$ *allgemein anwendbar ist.*

Da nach §. 244 $a^b : a^c = a^b(1 : a^c) = a^b a^{-c}$ ist, auch wenn unter den Potenzzeichen allgemeine mehrdeutige Potenzen gedacht werden, so kann die in Rede stehende Gleichung auch durch $((a^{b-c})) = ((a^b))\,((a^{-c}))$ ersetzt werden, für deren unbedingte Gültigkeit die Bedingungen in §. 239 enthalten sind.

§. 246. *Lehrsatz.* Die Gleichung $((a : b))^c = ((a^c)) : ((b^c))$ ist eine vollkommene.

Beweis. Da nach §. 244 unbedingt $a^c : b^c = a^c(1 : b^c) = a^c b^{-c}$ und $a^c b^{-c} = a^c(1 : b)^c$ ist, während nach §. 240 andrerseits $a^c(1 : b)^c = [a(1 : b)]^c = (a : b)^c$ ist, auch wenn überall für die Potenzformen allgemeine mehrdeutige Potenzen gedacht werden, so ist in der That die im Lehrsatze angeführte Gleichung eine vollkommene.

§. 247. *Lehrsatz.* Die Gleichungen $\sqrt[c]{(ab)} = \sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b}$, $\sqrt[c]{(a : b)} = \sqrt[c]{a} : \sqrt[c]{b}$, $\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[bc]{a}$, $\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}$, $\log \sqrt[b]{a} = \frac{\log a}{b}$ sind auch für mehrdeutige Wurzeln unbedingt gültig.

Beweis. Die erste Gleichung ist nach §. 240 eine vollkommene, weil sie gleichbedeutend ist mit $\left(\left((ab)^{\frac{1}{c}}\right)\right) = \left(\left(a^{\frac{1}{c}}\right)\right)\left(\left(b^{\frac{1}{c}}\right)\right)$; die zweite Gleichung nach §. 246, weil sie gleichbedeutend ist mit $\left(\left((a : b)^{\frac{1}{c}}\right)\right) = \left(\left(a^{\frac{1}{c}}\right)\right) : \left(\left(b^{\frac{1}{c}}\right)\right)$; die dritte Gleichung nach §. 240 Fall VI, weil sie gleichbedeutend ist mit $\left(\left(\left(a^{\frac{1}{b}}\right)^{\frac{1}{c}}\right)\right) = \left(\left(a^{\frac{1}{bc}}\right)\right)$ und b und c ganze Zahlen sind; die vierte Gleichung nach §. 242 Fall V, weil sie gleichbedeutend ist mit $\left(\left(\left(a^{\frac{1}{b}}\right)^{\frac{1}{c}}\right)\right) = \left(\left(\left(a^{\frac{1}{c}}\right)^{\frac{1}{b}}\right)\right)$ und b und c ganze Zahlen sind; die 5te Gleichung endlich nach §. 243.

§. 248. *Bedingungen, unter denen die Gleichung* $(\sqrt[b]{a})^c = \sqrt[b]{(a^c)}$ *für mehrdeutige Wurzeln und Potenzen allgemein angewendet werden darf.*

Da diese Gleichung gleichbedeutend ist mit $\left(\left(\left(a^{\frac{1}{b}}\right)^c\right)\right) = \left(\left((a^c)^{\frac{1}{b}}\right)\right)$, so ist sie nach §. 242 (Fall II und Anmerkung zu Fall IV) nie vollkommen, wenn c irrational oder imaginär ist, und demnach zufolge des §. 242 (Fall V) nur vollkommen, wenn c rational ist, und dabei, unter $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ den in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückten Werth von c gedacht, γ_1 und b keinen gemeinsamen Theiler haben.

§. 249. *Bedingungen, unter denen die Gleichung* $\sqrt[c]{(a^b)} = a^{\frac{b}{c}}$ *für mehrdeutige Wurzeln und Potenzen allgemein angewendet werden darf.*

Vorstehende Gleichung ist gleichbedeutend mit $\left(\left((a^b)^{\frac{1}{c}}\right)\right) = \left(\left(a^{\frac{1}{c}\cdot b}\right)\right)$ und daher (nach §. 241, Fall I und V) nie vollkommen, wenn b imaginär oder irrational ist; vollkommen dagegen, wenn b rational ist und dabei, falls $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ den in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückten Werth von b vorstellt, α_1 mit c keinen gemeinsamen Theiler hat (s. §. 241 Fall VI).

§. 250. *Die Gleichung* $(\sqrt[c]{a})^b = a^{\frac{b}{c}}$ *ist auch für mehrdeutige Wurzeln und Potenzen unbedingt gültig.* Da nämlich dieselbe mit $\left(a^{\frac{1}{c}}\right)^b = a^{\frac{1}{c}\cdot b}$ gleichbedeutend ist, so ist sie nach §. 241 (Fall II, IV und VI) stets vollkommen, mag b imaginär, irrational oder rational sein.

c) Vervollständigung unvollkommener Potenzgleichungen.

§. 251. *Von den vollkommenen Gleichungen, welche die Stelle der unvollkommenen Haupt-Potenzgleichungen vertreten können.*

Zufolge der Resultate der §§. 239—243 darf man die gewöhnlichen Potenzregeln nicht ohne Vorsicht in den Rechnungen an-

wenden. Namentlich wird man, wenn die Exponenten nicht numerisch gegeben sind, eine Untersuchung der erforderlichen Berechtigung also meist unmöglich wird, nicht a^{b+c} für $a^b a^c$, oder a^{bc} für $(a^b)^c$, oder $b \log a$ für $\log a^b$ setzen dürfen, ohne Gefahr zu laufen, dass man Werthe (und unter ihnen vielleicht gerade die einzig gebrauchten) einbüsse, und umgekehrt wird man Werthe, die nicht in die Rechnung gehören, möglicher Weise einführen, wenn man $a^b a^c$ für a^{b+c}, $(a^b)^c$ für a^{bc}, $\log a^b$ für $b \log a$ setzt. Durch successive Anwendung zweier unvollkommenen Gleichungen kann man aber offenbar auf eine vollkommen unrichtige Gleichung gelangen. (Siehe das Beispiel auf pag. 8.) Gegen das Erste kann man sich nöthigenfalls sichern, wenn man noch einen ergänzenden Faktor oder noch ein ergänzendes Glied hinzufügt. Es ist nämlich vollkommen

(117) $((a^b a^c)) = ((a^{b+c}))((1^b))$ oder $= ((a^{b+c}))\,((1^c))$, d. i.

$$((a^b a^c)) = ((a^{b+c}))\, e^{2n_1 b\pi i} = ((a^{b+c}))\, e^{2n_1 c\pi i},$$

(118) $(((a^b)^c)) = ((a^{bc}))((1^c)) = ((a^{bc}))\, e^{2n_1 c\pi i}$

(119) $\log((a^b)) = b\log a + \log 1 = b \log a + 2n''\pi i.$

B e w e i s d e r G l e i c h u n g (117). Da, $b = \alpha + \beta i$ gesetzt, $1^b = e^{2n_1 b\pi i} = e^{-2n_1\beta\pi + 2n_1\alpha\pi i}$ ist, so hat man, die Bezeichnungen des §. 239 anwendend,

$$((a^{b+c}\,1^b)) = e^{u+vi}\; e^{-2n_1\beta\pi+2n_1\alpha\pi i} = e^{(u-2n_1\beta\pi)+(v+2n_1\alpha\pi)i},$$

$$((a^b a^c)) = e^{(u'+u'')+(v'+v'')i},$$

und die an die Stelle der Gll. (A) und (B) des §. 239 tretenden Gleichungen sind dann

$$(\beta+\delta)n + \beta n_1 = \beta n' + \delta n'',\quad (\alpha+\gamma)n + \alpha n_1 = \alpha n' + \gamma n'' + m,$$

so dass in der That $((a^b a^c))$ mit $((a^{b+c}\,1^b))$ einerlei Werthe hat, da man zur Befriedigung dieser Gleichungen nur $n = n''$, $n_1 + n = n'$, $m = 0$ zu nehmen hat.

Auf dieselbe Weise bewährt sich die Gl. $((a^b a^c)) = ((a^{b+c}))((1^c))$.

B e w e i s d e r G l e i c h u n g (218). Wendet man die in §. 241 gebrauchten Bezeichnungen an, so erhält man

$$((a^{bc}\,1^c)) = e^{u+vi}\; e^{-2n_1\delta\pi+2n_1\gamma\pi i} = e^{(u-2n_1\delta\pi)+(v+2n_1\gamma\pi)i},$$

$$(((a^b)^c)) = e^{u'+v'i},$$

und die Vergleichung der Exponenten dieser beiden Potenz-Aus-

drücke führt auf die, den Gll. (*C*) und (*D*) des §. 241 entsprechenden Gleichungen

$$(\alpha\delta+\beta\gamma)n+\delta n_1 = (\alpha\delta+\beta\gamma)n''+\delta n'$$
$$(\alpha\gamma-\beta\delta)n+\gamma n_1 = (\alpha\gamma-\beta\delta)n''+\gamma n'+m,$$

welche offenbar vollkommen befriedigt werden, wenn $n = n''$, $n_1 = n'$, $m = 0$ genommen wird.

Beweis der Gleichung (119). Die Richtigkeit der Gl. (119) erkennt man sofort bei der Vergleichung der Formeln (113) und (116) des §. 243.

Anmerkung. Die Gl. $(a^b)^c = (a^c)^b$ lässt sich nicht auf eine ebenso einfache Weise vervollständigen, da $((a^b)^c)$ Werthe enthält, welche nicht in $((a^c)^b)$ vorkommen, und $((a^c)^b)$ hinwiederum Werthe, welche der Potenz $((a^b)^c)$ fremd sind. Genügt es indess, wenn man die Form $(a^c)^b$ für die Form $(a^b)^c$ in eine Rechnung einführen will, dass kein Werth verloren gehe, so hat man die Form $((a^c)^b)$ nur mit $((1^c))$ noch zu multipliciren. Das Warum ergibt sich leicht aus den Gll. (*E*) und (*F*) des §. 242.

C. Verallgemeinerung des Gebrauchs der binomischen und logarithmischen Reihe.

§. 252. *Von der Convergenz und Divergenz solcher Reihen, die nach positiven ganzen Potenzen eines imaginären Ausdrucks fortschreiten.* Wenn eine Reihe von der Form

(120) $$a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+ \text{etc. in inf.}$$

für alle reelle Werthe von x convergirt, die numerisch kleiner als eine gegebene absolute Zahl δ sind, und zwar unabhängig von den Vorzeichen ihrer Glieder, so convergirt sie auch für alle imaginäre Werthe von x, deren Modulus kleiner als δ ist, unabhängig von den Gliederzeichen.

Beweis. Wir denken 1) die Coefficienten der Reihe als reell. Ist alsdann r der Modulus und φ das Argument von x, also $x = re^{\varphi i}$, so hat man für jeden ganzen Zahlenwerth von m

$$x^m = r^m(e^{\varphi i})^m = r^m e^{m\varphi i} = r^m(\cos m\varphi + i \sin m\varphi),$$

und die obige Reihe lässt sich durch Trennen des Reellen und Imaginären verwandeln in

(120a) $a + a_1 r\cos\varphi + a_2 r^2\cos 2\varphi + a_3 r^3\cos 3\varphi + \ldots.$ in inf.
$+ i(a_1 r\sin\varphi + a_2 r^2\sin 2\varphi + a_3 r^3\sin 3\varphi + \ldots.$ in inf.)

Es wird daher die gegebene Reihe für alle Werthe von r und φ convergiren, für welche die Reihen

(121) $a + a_1 r\cos\varphi + a_2 r^2\cos 2\varphi + a_3 r^3\cos 3\varphi + \ldots$ in inf.

(122) $a_1 r\sin\varphi + a_2 r^2\sin 2\varphi + a_3 r^3\sin 3\varphi + \ldots$ in inf.

convergent sind.

Da nun weder $\cos m\varphi$ noch $\sin m\varphi$ für irgend einen ganzen Zahlenwerth von m grösser als Eins ist, so haben die Glieder der Reihe

(123) $a + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \ldots.$ in inf.

offenbar numerisch grössere Werthe als die entsprechenden Glieder der Reihen (121) und (122), und es werden diese letzteren daher sicher in den Fällen convergiren, in denen die Reihe (123) convergirt. Die Reihe (123) geht aber für $r = x$ in die Reihe (120) über, mithin würde dieselbe der zum Grunde liegenden Voraussetzung nach, so oft $r < \delta$ ist, selbst dann convergiren, wenn alle Glieder durch ihre numerischen Werthe ersetzt würden. Es convergirt folglich jede der Reihen (121) und (122) und somit die Reihe (120) auch für imaginäre Werthe von x, so oft der Modulus r kleiner als δ ist, und zwar unabhängig von den Gliederzeichen.

Sind 2) die Coefficienten a, a_1, a_2, etc. imaginär, bezeichnen ferner α_m und β_m resp. den Modulus und das Argument von a_m, und setzt man

$$\alpha\cos\beta + \alpha_1\cos\beta_1 x + \alpha_2\cos\beta_2 x^2 + \ldots \text{ in inf.} = P$$
$$\alpha\sin\beta + \alpha_1\sin\beta_1 x + \alpha_2\sin\beta_2 x^2 + \ldots \text{ in inf.} = Q,$$

so ist die gegebene Reihe gleichbedeutend mit $P + Qi$. Aus der Voraussetzung, dass die gegebene Reihe für reelle Werthe von x, die numerisch kleiner als δ sind, unabhängig von den Gliederzeichen convergirt, folgt aber, dass dies auch mit den Reihen P und Q der Fall ist, mithin bleibt die von den Gliederzeichen unabhängige Convergenz für diese beiden Reihen, da ihre Coefficienten reell sind, nach dem eben geführten Beweise auch bestehen, wenn x imaginäre Werthe erhält, deren Modulus kleiner als δ ist. Sind aber die Reihen P und Q für solche Werthe von x convergent, so ist dies auch nach §. 163,*b* mit der gegebenen Reihe $P + Qi$ der Fall.

§. 253. *Der binomische Lehrsatz für reelle rationale Exponenten und imaginäre Dignanden.* Die Reihe

$$1 + {}^1nx + {}^2nx^2 + {}^3nx^3 + \ldots \text{ in inf.},$$

welche wir wie in dem §. 181 durch f_n bezeichnen wollen, convergirt, wenn n als reell vorausgesetzt wird, auf Grund des Convergenz-Beweises in §. 180, zufolge des vorigen §. auch für jeden imaginären Werth von x, dessen Modulus kleiner als Eins ist, und zwar unabhängig von den Gliederzeichen. Daher gilt denn auch die Gleichung (I) des §. 181, nämlich $f_n\, f_r = f_{n+r}$ (deren Begründung dort nicht auf ein Reell- oder Imaginär-Sein des x, sondern nur allgemein auf die Voraussetzung gestützt worden ist, dass f_n und f_r unabhängig von den Gliederzeichen convergiren) noch für jedes imaginäre x, wofern nur dessen Modulus kleiner als Eins ist. Somit bleiben unter der letzten Bedingung auch die aus der Gl. (I) abgeleiteten Gleichungen der §§. 184, 185, 186 bestehen, d. h. es bleibt noch $f_n = (1+x)^n$ für jeden reellen ganzen Werth von n, so wie

$$(f_p)^s = (1+x)^r$$

für jeden rationalen Werth von p, der in seinen kleinsten Zahlen durch $\frac{r}{s}$ ausgedrückt ist (r als positiv oder negativ, s als positiv gedacht). Aus der letzten Gleichung folgt überdies

$$[(f_p)^s]^{\frac{1}{s}} = [(1+x)^r]^{\frac{1}{s}},$$

oder, da nach der Gl. (118) des §. 251 einerseits

$$\left(\left([(f_p)^s]^{\frac{1}{s}}\right)\right) = f_p\left(\left(1^{\frac{1}{s}}\right)\right),$$

und andrerseits nach §. 241, weil r und s keinen Theiler mit einander gemein haben,

$$\left(\left([(1+x)^r]^{\frac{1}{s}}\right)\right) = \left(\left((1+x)^{\frac{r}{s}}\right)\right)$$

ist,

$$(((1+x)^p)) = f_p\left(\left(1^{\frac{1}{s}}\right)\right).$$

Da aber $((1^{\frac{1}{s}}))$ unter andern auch den Werth 1 hat, so ist die binomische Reihe f_p jederzeit einem der Werthe von $(((1+x)^p))$

gleich, mag x reell oder imaginär sein, wofern nur dessen Modulus kleiner als 1 ist; und die übrigen Werthe von $((1+x)^p)$ erhält man, wenn man die binomische Reihe mit allen Werthen von $((\sqrt[s]{1}))$ multiplicirt.

§. 254. *Anwendbarkeit der logarithmischen Reihe für imaginäre Werthe des Logarithmanden.* Verfolgt man den Beweis, welcher in §. 201 für die Richtigkeit der Gleichung

$$l(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \ldots \text{ in inf.}$$

gegeben worden ist, so erkennt man, dass die Gl. (32) noch gültig bleibt, wenn man lA und A^x resp. mit $\log A$ und $((A^x))$ vertauscht, da man statt der Gl. (XII) des §. 198 nur die Gl. (XIX) des §. 227 in Anwendung zu bringen braucht. Ferner sieht man, dass die dort (in §. 201) für $[1+(A-1)]^x$ angegebene Reihe auf Grund des vorigen §. noch für ein imaginäres A einen Werth von $[1+(A-1)]^x$ darstellt, wofern nur der Modulus von $A-1$ kleiner als Eins ist. Ist aber dies anerkannt, so bleibt auch noch die Gl. (33), wenigstens für einen der Werthe von $((A^x))$ bestehen, so dass die daraus (für $x=0$) hervorgehende Reihe

$$z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \text{ etc.}$$

in der That einen Werth von $\log(1+z)$ vorstellt, so oft der Modulus von $A-1$, d. h. von z, kleiner als Eins ist.

Man erhält dann sämmtliche Werthe von $\log(1+z)$, wenn man noch die Werthe von $\log 1$ addirt, und hat somit

$$\text{(XX)} \quad \log(1+z) = 2n\pi i + z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \text{ etc. in inf.},$$

für jeden der erwähnten Werthe von z.

§. 255. *Zusatz.* In dem besonderen Falle, dass $z=ui$ und u reell ist, ergibt sich aus (XX), indem man das Reelle vom Imaginären scheidet,

$$\text{(124)} \quad \log(1+ui) = \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{4}u^4 + \tfrac{1}{6}u^6 - \tfrac{1}{8}u^8 + \text{ etc.}$$
$$+ i\,[2n\pi + u - \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{7}u^7 + \text{ etc.}],$$

mindestens für jeden Werth von u, der numerisch genommen kleiner als Eins ist.

§. 256. *Convergenz der binomischen Reihe für den Fall, dass die Basis der Binomial-Coefficienten imaginär ist.* Dass die Reihe

$$f_n = 1 + {}^1nx + {}^2nx^2 + {}^3nx^3 + \text{ etc.}$$

für jeden reellen Werth von n convergirt, so oft der Modulus von

x kleiner als 1 ist, und zwar unabhängig von den Gliederzeichen, haben wir in §. 180 und §. 253 bewiesen. Um zu zeigen, dass sie dann auch für jeden imaginären Werth von n convergirt, haben wir nur darzuthun, dass die mte Wurzel aus dem Modulus von ${}^{m}n$ sich für wachsende Werthe von m der Grenze Eins *), oder einer Grenze, die kleiner als Eins ist, nähere (s. §. 168).

Zu dem Ende nehmen wir 1) an, es sei $n = qi$ (q als reell gedacht). Alsdann ist

$$(125) \qquad {}^{m}n = \frac{qi(qi-1)(qi-2)(qi-3)\ldots.(qi-[m-1])}{m!}.$$

Der Zähler dieses Quotienten, den wir Z nennen wollen, lässt sich durch Ausführung der Multiplicationen nach Potenzen von i entwickeln. Bemerken wir nun, dass für jeden ganzen absoluten Zahlenwerth von r, $i^{4r} = i^4$, $i^{4r+2} = i^2$, $i^{4r+3} = i^3$, $i^{4r+1} = i$ ist, so können wir, nachdem wir in dieser Entwickelung für i^{4r}, i^{4r+2}, i^{4r+3}, i^{4r+1} überall resp. i^4, i^2, i^3, i gesetzt haben, die gesammte Entwickelung von Z in vier Glieder-Gruppen trennen, die resp. das i nur in der 1sten, 2ten, 3ten, 4ten Potenz enthalten, so dass sich schreiben lässt:

$$Z = Ai^4 + Bi^2 + Ci + Di^3.$$

Es wird daher, wegen $i^4 = 1$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, wenn $A:m! = a$, $B:m! = b$, $C:m! = c$, $D:m! = d$ gesetzt wird,

$${}^{m}n = {}^{m}(qi) = (a-b) + (c-d)i,$$

und wenn man Kürze halber $(a-b)^2 + (c-d)^2$ durch Q bezeichnet,

$$\text{Modulus } {}^{m}(qi) = \sqrt{[(a-b)^2 + (c-d)^2]} = \sqrt{Q}.$$

Nimmt man ferner $n = qs$, und denkt unter s die Wurzel $((\sqrt{1}))$, so erhält man den Werth von ${}^{m}(qs)$ aus dem Ausdrucke (125), wenn man überall i mit s vertauscht, und demnach, weil jetzt noch $s^{4r} = s^4$, $s^{4r+2} = s^2$, $s^{4r+3} = s^3$, $s^{4r+1} = s$ ist, für den Zähler von ${}^{m}(qs)$, den Ausdruck

$$As^4 + Bs^2 + Cs + Ds^3.$$

*) Ist nämlich r der Modulus von x, so ist (nach dem Zusatze zu §. 221) (r^m . Mod ${}^{m}n$) der Modulus von ${}^{m}n.x^m$; ist also $r < 1$ und es nähert sich (Mod $\sqrt[m]{{}^{m}n}$) der Grenze Eins, so nähert sich der Modulus von $\sqrt[m]{({}^{m}n.x^r)}$ einer Grenze, die kleiner ist als Eins.

Da überdies $s^4 = s^2 = 1$, $s^3 = s = \pm\sqrt{1}$ ist, so wird demzufolge

$$^m(qs) = (a+b) \pm (c+d)\sqrt{1},$$

und Modulus $^m(qs) = \sqrt{[(a+b)+(c+d)]^2} = \sqrt{P}$

oder Modulus $^m(qs) = \sqrt{[(a+b)-(c+d)]^2} = \sqrt{P'}$,

jenachdem man $s = +\sqrt{1}$ oder $s = -\sqrt{1}$ nimmt.

Da nun die Reihe f_n für jeden reellen Werth von n, namentlich also auch für $n = qs$ convergirt, sobald der Modulus von x kleiner als Eins ist, so muss unter dieser Bedingung sowohl $\sqrt[m]{\sqrt{P}}$ als $\sqrt[m]{\sqrt{P'}}$ für wachsende Werthe von m sich der Einheit, oder einer Zahl, die kleiner als Eins ist, als Grenze nähern. Lässt sich daher zeigen, dass $Q < P$ oder $Q < P'$ ist, so ist auch $\sqrt[m]{\sqrt{Q}}$ kleiner als $\sqrt[m]{\sqrt{P}}$ oder $\sqrt[m]{\sqrt{P'}}$, und mithin f_n auch für $n = qi$ convergent.

Es ist aber

$$P - Q = 4(ab + cd) + 2(a+b)(c+d)$$

$$P' - Q = 4(ab + cd) - 2(a+b)(c+d),$$

und folglich gewiss $P - Q$ oder $P' - Q$ positiv (d. h. $P > Q$ oder $P' > Q$), wenn die Summe $(P-Q)+(P'-Q)$ positiv sein sollte. Dies ist aber in der That der Fall, da

$$(P-Q)+(P'-Q) = 8(ab+cd)$$

ist, und sowohl ab als cd einen positiven Werth hat. Letzteres sieht man leicht ein, wenn man auf die Bildung der Ausdrücke A, B, C, D, welche resp. mit a, b, c, d einerlei Zeichen haben, achtet.

Bei der Ausführung der Multiplicationen an den $m-1$ zweigliedrigen Faktoren des Produktes

$$Z = qi(qi-1)(qi-2)(qi-3) \;.\;.\;.\;.\; (qi-(m-1))$$

muss man nämlich jedes Glied eines jeden Faktors nach und nach mit jedem Gliede eines jeden der übrigen $m-2$ Faktoren multipliciren, und die erhaltenen Produkte addiren. Als höchstes Glied bekommt man daher das Produkt aller ersten Glieder der zweigliedrigen Faktoren von Z, d. h. $(qi)^{m-1}$. Die Glieder ferner, welche bei dieser Ausführung der Multiplicationen den Faktor $(qi)^{m-2}$ erhalten, gewinnt man, wenn man nach und nach das zweite Glied je eines der obigen $m-1$ zweigliedrigen Faktoren mit sämmtlichen ersten Gliedern der übrigen $m-2$ Faktoren, d. h.

mit $(qi)^{m-2}$ multiplicirt, mithin wird, da **jedes** zweite Glied in diesen Faktoren negativ (nämlich resp. gleich -1, -2, -3, etc.) ist, jeder Coefficient von $(qi)^{m-2}$ negativ, und folglich auch der Gesammt-Coefficient von $(qi)^{m-2}$, den man durch Addition dieser Theil-Coefficienten erhält.

Die mit dem Faktor $(qi)^{m-3}$ versehenen Glieder bekommt man, wenn man das Produkt je zweier zweiten Glieder der zweigliedrigen Faktoren von Z mit dem Produkte der ersten Glieder der $m-3$ übrigen, d. h. mit $(qi)^{m-3}$ multiplicirt. Da aber die zweiten Glieder in den Faktoren von Z sämmtlich negativ, die Produkte je zweier derselben also positiv sind, so werden sämmtliche Coefficienten von $(qi)^{m-3}$, und mithin auch deren Summe, welche den Gesammt-Coefficienten von $(qi)^{m-3}$ bildet, positiv.

Die mit dem Faktor $(qi)^{m-4}$ versehenen Glieder bekommt man, wenn man das Produkt je dreier zweiten Glieder der zweigliedrigen Faktoren von Z mit dem Produkte der ersten Glieder der $m-4$ übrigen, d. h. mit $(qi)^{m-4}$ multiplicirt. Da aber die sämmtlichen zweiten Glieder dieser Faktoren und also auch die Produkte je dreier derselben negativ sind, so wird wiederum der Gesammt-Coefficient von $(qi)^{m-4}$ negativ werden.

Man sieht aus dieser Art der Glieder-Entwickelung im voraus, dass die Coefficienten auch der folgenden Glieder (die Coefficienten von $(qi)^{m-5}$, $(qi)^{m-6}$, etc.) abwechselnd positiv und negativ werden müssen, und dass daher, wenn die Entwickelung des Produkts der zweigliedrigen Faktoren von Z gleich

$$(qi)^{m-1}-k_1(qi)^{m-2}+k_2(qi)^{m-3}-k_3(qi)^{m-4}+\ldots.(-1)^{m-2}k_{m-2}(qi)+(-1)^{m-1}k_{m-1},$$

und folglich

$$Z = (qi)^m-k_1(qi)^{m-1}+k_2(qi)^{m-2}-k_3(qi)^{m-3}+\ldots.(-1)^{m-1}k_{m-1}(qi)$$

gesetzt wird, k_1, k_2, k_3, ... k_{m-1}, k_m absolute Zahlenwerthe haben werden.

Ist nun m eine gerade Zahl, so sind die Glieder, aus denen die oben mit A und B bezeichneten Ausdrücke bestehen, folgende

$$q^m,\ k_2q^{m-2},\ k_4q^{m-4},\ k_6q^{m-6},\ \ldots\ k_{m-2}q^2,$$

also sämmtlich positiv, mag q positiv oder negativ sein, und mithin ist sowohl A als B positiv. Bei ungeradem m dagegen sind jene Glieder

$$-k_1q^{m-1},\ -k_3q^{m-3},\ -k_5q^{m-5},\ \ldots.\ -k_{m-2}q^2,$$

also sämmtlich negativ, so dass auch gleichzeitig A und B negativ werden müssen. Jedenfalls haben somit A und B gleiche Zeichen, und es ist demnach AB, und folglich auch ab positiv.

Die Glieder ferner, aus denen das obige C und D gebildet ist, sind bei geradem m

$$-k_1 q^{m-1}, \ -k_3 q^{m-3}, \ -k_5 q^{m-5}, \ \ldots \ -k_{m-1} q,$$

also sämmtlich negativ oder positiv, je nachdem q positiv oder negativ ist; folglich sind auch C und D gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ. Bei ungeradem m werden diese Glieder

$$q^m, \ k_2 q^{m-2}, \ k_3 q^{m-3}, \ \ldots \ k_{m-1} q,$$

also sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ, je nachdem q positiv oder negativ ist; folglich sind C und D auch in diesem Falle gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ. Jedenfalls muss mithin CD und sonach cd positiv werden.

Ist aber ab und cd positiv, so ist auch mindestens eine der Differenzen $P-Q$, $P'-Q$ positiv, d. h. wenn nicht $\sqrt[m]{\sqrt{Q}} < \sqrt[m]{\sqrt{P}}$, doch gewiss $\sqrt[m]{\sqrt{Q}} < \sqrt[m]{\sqrt{P'}}$, und folglich auch $\lim \sqrt[m]{\sqrt{Q}} \overline{\overline{<}} 1$, so dass in der That f_n für $n = qi$ convergirt.

Was 2) den Fall angeht, dass $n = p + qi$ ist, so bezeichne man durch φ und ψ die Reihen, welche aus f_{qi} hervorgehen, wenn man für $^m(qi)$, d. h. für $(a-b)+(c-d)i$ resp. $a-b$ und $c-d$ setzt, und bemerke, dass φ und ψ mit f_{qi} zugleich unabhängig von den Gliederzeichen convergiren müssen, weil der Modulus des Coefficienten von x^m in ihnen gleich oder kleiner als $\sqrt{Q}$ ist. Hieraus und aus der Convergenz von f_p folgt nun nach §. 176, dass auch die nach Potenzen von x geordneten Entwickelungen der Produkte $\varphi . f_p$ und ψf_p unabhängig von den Gliederzeichen convergiren, und mithin (nach §. 175) auch die nach Potenzen von x geordnete Entwickelung von $\varphi . f_p + i\psi . f_p$ — wofern nur der Modulus von x kleiner als Eins ist. Da nun $f_{qi} = \varphi + i\psi$ und folglich $\varphi . f_p + i\psi . f_p = f_p f_{qi}$ ist, andrerseits aber nach §. 181 f_{p+qi} die nach Potenzen von x geordnete Entwickelung von $f_p . f_{qi}$ vorstellt, so ist f_{p+qi} nichts anderes, als eben jene als convergent anerkannte Entwickelung von $\varphi . f_p + i\psi . f_p$, mithin convergirt f_n auch für $n = p + qi$ unabhängig von den Gliederzeichen, sobald der Modulus von x kleiner als Eins ist.

§. 257. *Der binomische Lehrsatz für irrationale und imaginäre Exponenten.* Der Erklärung der allgemeinen mehrdeutigen Potenz gemäss ist für jeden Werth von n

$$(((1+x)^n)) = e^{n \log (1+x)}$$

d. h., wenn $L(1+x)$ den Hauptwerth von $\log(1+x)$ vorstellt,

(126) $(((1+x)^n)) = ((1^n))\ e^{n L(1+x)} =$

$$((1^n))\ [1+nL(1+x)+\frac{n^2}{2!}[L(1+x)]^2+\frac{n^3}{3!}\ [L(1+x)]^3+\ldots]$$

Will man also nachweisen, dass auch für irrationale und imaginäre Werthe von n die binomische Reihe

(127) $1+{}^1nx+{}^2nx^2+{}^3nx^3+ \ldots .$ in inf.

einem der Werthe der nten Potenz des Binoms $1+x$ gleich sei, so hat man nur zu zeigen, dass die Reihe in (126) für irgend einen Werth von $((1^n))$ mit der Reihe (127) identisch werde. Wir fragen daher 1) ob die Reihe in (126) sich in eine gleichgeltende nach Potenzen von x fortschreitende Reihe umformen lasse, und 2) ob dann die Coefficienten der letzteren für irgend einen Werth von $((1^n))$ mit denen der Reihe (127) übereinstimmen.

Zu 1. Dass die nach Potenzen von x geordnete Entwickelung der Reihe in (126) für jeden Werth von x, dessen Modulus kleiner als Eins ist, unabhängig von den Gliederzeichen convergirt, und in Folge hiervon $(((1+x)^n))$ in der That durch eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe vorgestellt werden kann, beweisen wir wie folgt.

Nach §. 254 lässt sich $L(1+x)$ für die eben angegebenen Werthe von x durch die Reihe $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+$ etc. ersetzen, und demnach convergiren nach §. 176 die Entwickelungen aller ganzen Potenzen von $L(1+x)$ — insofern ganze Potenzen den Werth von Produkten haben — unabhängig von den Gliederzeichen für dieselben Werthe von x, für welche die Entwickelung von $L(1+x)$ unabhängig von den Gliederzeichen convergirt, d. h. für jeden Werth von x, dessen Modulus kleiner als Eins ist. Stellt daher $k_r x^m$ das den Faktor x^m enthaltende Glied der Entwickelung von $[L(1+x)]^r$ vor, und g_r den Modulus von k_r, so muss für wachsende Werthe von m, $\sqrt[m]{g_r}$ sich der Grenze Eins nähern, und folglich, wenn man $\sqrt[m]{g_r} = 1+\varepsilon_r$ setzt, ε_r einen mit wachsendem m

sich der Grenze Null nähernden Ausdruck bezeichnen. Da k_r hier reell, also g_r der numerische Werth von k_r ist, so hat man dann $(1+\varepsilon_r)^m = g_r = \pm k_r$, wo das $+$ oder $-$ Zeichen zu nehmen ist, jenachdem k_r positiv oder negativ ist.

Nennt man nun K_m den Coefficienten von x^m in der Gesammt-Entwickelung der Reihe in (126), so ist offenbar, wenn man für $((1^n))$ den Hauptwerth 1 nimmt,

$$K_m = nk_1 + \frac{n^2}{2!}k_2 + \frac{n^3}{3!}k_3 + \frac{n^4}{4!}k_4 + \ldots\ldots + \frac{n^m}{m!}k_m,$$

und mithin, wenn man den Modulus von n mit p, das Argument mit φ bezeichnet, so dass

$$n = p(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ n^r = p^r(\cos r\varphi + i\sin r\varphi) \quad \text{wird,}$$

$$K_m = p\cos\varphi\, k_1 + \frac{p^2\cos 2\varphi}{2!}k_2 + \frac{p^3\cos 3\varphi}{3!}k_3 + \ldots + \frac{p^m\cos m\varphi}{m!}k_m$$

$$+ i[p\sin\varphi . k_1 + \frac{p^2\sin 2\varphi}{2!}k_2 + \frac{p^3\sin 3\varphi}{3!}k_3 + \ldots + \frac{p^m\sin m\varphi}{m!}k_m].$$

Der Kürze wegen sei die Reihe der ersten Zeile in diesem Werthe von K_m durch P, die reelle Reihe der zweiten Zeile durch Q vorgestellt.

Bezeichnet man ferner durch G_m das, was aus K_m wird, wenn man $\cos\varphi$, $\cos 2\varphi$, $\cos 3\varphi$, $\cos 4\varphi$, ... $\sin\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\sin 3\varphi$, ... mit Eins, und k_1, k_2, k_3, ... mit ihren numerischen Werthen g_1, g_2, g_3 ... vertauscht, so hat man

$$G_m = [pg_1 + \frac{p^2}{2!}g_2 + \frac{p^3}{3!}g_3 + \ldots \frac{p^m}{m!}g_m](1+i) = P'(1+i) = P' + P'i,$$

während ersichtlich P' grösser als P und Q, und mithin auch der Modulus von G_m grösser als der Modulus von K_m d. h. $\sqrt{(P'^2 + P'^2)} > \sqrt{(P^2 + Q^2)}$ ist.

Wird weiter

$$p + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \ldots \frac{p^m}{m!} = z$$

gesetzt, und von den Ausdrücken g_1, g_2, g_3, ... g_m der grösste durch g_n vorgestellt, so hat man noch

$$P' < g_n . z, \text{ d. h. } P' < (1+\varepsilon_n)^m . z.$$

Bemerkt man überdies, dass z um so weniger sich von $e^p - 1$ unterscheidet, je grösser m genommen wird, und dass der Unterschied

$$(e^p - 1) - z = \frac{p^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{p^{m+2}}{(m+2)!} + \ldots \text{ in inf.},$$

wegen des positiven p, positiv, wenn auch mit wachsendem m verschwindend klein wird, so sieht man, dass auch

$$P' < (1+\varepsilon_n)^m (e^p - 1)$$

sein muss.

Der Modulus von G_m ist aber $\sqrt{(2P'^2)} = P'\sqrt{2}$, folglich kleiner als $(e^p - 1)(1+\varepsilon_n)^m \sqrt{2}$, d. h., wenn wir den jedenfalls positiven und endlichen Werth von $(e^p - 1)\sqrt{2}$ durch y bezeichnen, kleiner als $y(1+\varepsilon_n)^m$. Demzufolge ist auch die mte Wurzel aus dem Modulus von G_m kleiner als $\sqrt[m]{[y(1+\varepsilon_n)^m]}$ d. h. kleiner als $(1+\varepsilon_n) y^{\frac{1}{m}}$, während für wachsende Werthe von m, $y^{\frac{1}{m}}$ sich dem Werthe der Potenz y^0, d. h. der Einheit nähert, und demnach, wenn $y = 1 + \delta$ gesetzt wird, δ bei zunehmendem m die Null zur Grenze hat. Da aber deshalb $\lim (1+\varepsilon_n)(1+\delta) = 1$, und wegen $\sqrt{(P^2+Q^2)} < \sqrt{(2P'^2)}$ auch $\sqrt[m]{(\sqrt{(P^2+Q^2)})} < \sqrt[m]{\sqrt{(2P'^2)}}$ ist, so ist die mte Wurzel aus dem Modulus von K_m kleiner als ein Ausdruck, der für zunehmende Werthe von m der Einheit als Grenze sich nähert. Hieraus folgt in Rücksicht auf §. 168, dass die aus der Reihe in (126) hervorgehende Entwickelung, deren allgemeines Glied $K_m x^m$ ist, mindestens für jeden Werth von x, dessen Modulus kleiner als Eins ist, und zwar unabhängig von den Gliederzeichen, convergiren muss.

Um sich endlich zu überzeugen, dass diese Entwickelung innerhalb der Grenzen ihrer Convergenz noch den Werth der unumgeformten Reihe (126) habe, bezeichne man die Reste der nach Potenzen von x geordneten Entwickelungen von $L(1+x)$, $[L(1+x)]^2$, $[L(1+x)]^3$, etc., $(((1+x)^4))$, gerechnet von dem mit x^r multiplicirten Gliede an, durch v_1, v_2, v_3, etc., V, ferner die Reihe (126) und ihre vollständige Entwickelung resp. durch S und X, und endlich die resp. bis zu $[L(1+x)]^r$ und $K_r x^r$ gehenden Theile von S und X durch (S) und (X). Man hat alsdann

$$(S) - (X) = n v_1 + \frac{n^2}{2!} v_2 + \frac{n^3}{3!} v_3 + \ldots \frac{n^r}{r!} v_r .$$

Wird nun r so gross gedacht, dass V, v_1, v_2, v_3, etc., sowie $S-(S)$

verschwindend klein werden, und versteht man (x einstweilen reell, aber numerisch kleiner als Eins, nehmend) unter v' den grössten der numerischen Werthe von v_1, v_2, v_3, . . . v_r, so wird offenbar der Modulus von $(S)-(X)$ kleiner als

$$v'\left(p+\frac{p^2}{2!}+\frac{p^3}{3!}+\ldots\frac{p^r}{r!}\right),$$

folglich ist, da die hier mit v' multiplicirte Summe kleiner als e^p-1, jedenfalls also endlich ist, dieser Modulus von $(S)-(X)$, und mithin auch $(S)-(X)$ selbst, mit v' zugleich unendlich klein. Da ferner S und X sich unendlich wenig von (S) und (X) unterscheiden, so muss auch $S-X$ unendlich klein sein, d. h. es müssen die Reihen S und X mit zunehmender Gliederzahl sich einer und derselben Grenze nähern — oder was dasselbe ist, es können die Reihen S und X für einander gebraucht werden.

Für den Fall, dass x imaginär ist, denke man v_1, v_2, v_3, etc. auf die Form $\alpha+\beta i$ gedacht, gebe dann dem obigen Werthe von $(S)-(X)$ die Form $A+Bi$, und zeige auf dem eben beschriebenen Wege, dass A und B für zunehmende Werthe von r unendlich klein werden, um daraus wiederum auf die Uebereinstimmung der Werthe von S und X innerhalb der Convergenzgrenzen der letzten Reihe zu schliessen.

Zu 2. Dass die aus (126) hervorgehende Entwickelung [von der wir nunmehr erfahren haben, dass sie m i n d e s t e n s zwischen denselben Grenzwerthen von x convergirt, wie die Reihe (127)] mit der Reihe (127) zusammenfallen muss, schliessen wir einfach, wie folgt. — Gäbe die Entwickelung der Reihe in (126) nicht die Reihe (127) so würde sie selbige auch nicht geben können, wenn n reell und rational wäre, weil jene Entwickelung ganz unabhängig von der Beschaffenheit des n ist (d. h. weil der Coefficient von x^m unter jeden Umständen das obige K_m wird). Da wir aber wissen, dass für jedes rationale n die Reihen und zwar mit allgemein gehaltenen Coefficienten übereinstimmen, so muss nothwendig auch bei imaginärem n die Uebereinstimmung statt haben.

Man kommt zu demselben Schlusse, wenn man sich so ausdrückt: die Gleichung ${}^m n = K_m$ ist anerkannter Massen eine identische Gleichung für jeden rationalen Werth von n. Entwickelt man also ${}^m n$ unter

dieser Voraussetzung nach Potenzen von n, so muss man genau die oben bei K_m angegebene Entwickelung $k_1 n + \frac{k_2}{2!} n^2 + \frac{k_3}{3!} n^3 \ldots$ erhalten, d. h. es müssen die Coefficienten der Potenzen von n in der Entwickelung ${}^m n$ den entsprechenden Coefficienten in der Entwickelung von K_m gleich sein, weil sonst (s. §. 147) die Gleichung ${}^m n = K_m$ nicht für mehr als m Werthe von n bestehen könnte. Sind aber die Coefficienten wirklich einander gleich, so bleibt die Gleichung ${}^m n = K_m$ auch bestehen, wenn man dem n beliebige irrationale oder imaginäre Werthe beilegt.

Es ist somit in der That auch für irrationale und imaginäre Werthe von n die die binomische Reihe einem Werthe der Potenz $((1+x)^n)$, und zwar dem Hauptwerthe derselben gleich, so oft der Modulus von x kleiner als Eins ist.

§. 258. *Ueber den Werth der binomischen Reihe*

$$1 + {}^1 n x + {}^2 n x^2 + {}^3 n x^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

für den Fall, dass der Modulus von x gleich oder grösser als Eins ist.

I. Wir setzen zuvörderst voraus, dass der Modulus von x gleich Eins ist, und bezeichnen den Modulus von n, ${}^2 n$, ${}^3 n$, ... resp. durch p_1, p_2, p_3, ..., die zugehörigen Argumente durch φ_1, φ_2, φ_3, ... Alsdann ist, wenn ψ das Argument von x vorstellt,

$${}^m n x^m = p_m(\cos\varphi_m + i\sin\varphi_m)(\cos m\psi + i\sin m\psi) = p_m[\cos(\varphi_m + m\psi) + i\sin(\varphi_m + m\psi)].$$

Die binomische Reihe lässt sich daher umformen in

$$(A)\quad 1 + p_1\cos(\varphi_1+\psi) + p_2\cos(\varphi_2+2\psi) + p_3\cos(\varphi_3+3\psi) + \ldots \text{ in inf.}$$
$$+ i[p_1\sin(\varphi_1+\psi) + p_2\sin(\varphi_2+2\psi) + p_3\sin(\varphi_3+3\psi) + \ldots \text{ in inf.}]$$

Da sich nun meistentheils auf die Convergenz dieser Reihe aus der Convergenz der aus ihren Coefficienten gebildeten Reihe

$$(B)\quad 1 + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots \text{ in inf.}$$

schliessen lässt, so unterwerfen wir zunächst diese letztere einer besonderen Untersuchung.

Zu dem Ende bemerken wir, dass

$${}^m n = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdots \frac{n-m+1}{m}$$

ist, dass man daher, wenn der Modulus von $\frac{n}{1}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{3}$, ...

$\frac{n-\mathfrak{m}+1}{\mathfrak{m}}$ resp. durch r_1, r_2, r_3 . . . $r_\mathfrak{m}$ bezeichnet wird, nach dem Zusatze zu §. 221

$$\text{Mod. } {}^\mathfrak{m}n = p_\mathfrak{m} = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots \cdot r_\mathfrak{m}$$

hat, und folglich wegen $p_\mathfrak{m} : p_{\mathfrak{m}-1} = r_\mathfrak{m}$ die Reihe (B) nicht convergiren kann, wenn nicht $r_\mathfrak{m}$ von einem bestimmten Werthe von $\mathfrak{m}$ an kleiner als 1 wird. Nun ist aber, wenn man $n = \alpha + \beta i$, also $p\cos\varphi = \alpha$ und $p\sin\varphi = \beta$ setzt,

$$r_\mathfrak{m} = \text{Mod. } \frac{n-\mathfrak{m}+1}{\mathfrak{m}} = \text{Mod. } \left(\frac{\alpha-\mathfrak{m}+1}{\mathfrak{m}} + \frac{\beta}{\mathfrak{m}} i\right) = \sqrt{\left[\left(1-\frac{\alpha+1}{\mathfrak{m}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\mathfrak{m}}\right)^2\right]},$$

folglich wird 1) so oft $\alpha < -1$ ist (weil dann $1 - \frac{\alpha+1}{\mathfrak{m}}$ grösser als Eins wird) für jeden Werth von $\mathfrak{m}$, $r_\mathfrak{m} > 1$, und es divergirt also in diesem Falle die Reihe (B).

Mit der Reihe (B) zugleich divergirt dann auch die Reihe (A). Denn eine unerlässliche Bedingung für die Convergenz der letzteren ist, dass die Glieder $p_\mathfrak{m}\cos(\varphi_\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\varphi)$ und $p_\mathfrak{m}\sin(\varphi_\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\varphi)$ für hinreichend grosse Werthe von $\mathfrak{m}$ verschwinden oder doch verschwindend klein werden, was hier nicht der Fall ist, da einerseits von den Coefficienten p_1, p_2, p_3, etc. wegen $r_\mathfrak{m} > 1$ jeder folgende grösser als der vorhergehende ist, also $p_\mathfrak{m}$ einen endlichen Werth behält, wie gross auch $\mathfrak{m}$ genommen werden möge, und andrerseits, wenn von den Faktoren $\cos(\varphi_\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\varphi)$ und $\sin(\varphi_\mathfrak{m} + \mathfrak{m}\varphi)$ der eine Null oder nahe Null werden sollte, der andere resp. genau oder nahezu den Werth $+1$ oder -1 hat.

Ist 2) $\alpha > 0$, so hat man, wenn γ irgend eine zwischen 0 und α liegende absolute Zahl vorstellt,

$$1 - \frac{\alpha+1}{\mathfrak{m}} < 1 - \frac{1+\alpha-\gamma}{\mathfrak{m}},$$

mithin auch, wenigstens von einem gewissen Werthe von $\mathfrak{m}$ ab, den wir $\mathfrak{m}_1$ nennen wollen,

$$r_\mathfrak{m} < 1 - \frac{1+\alpha-\gamma}{\mathfrak{m}} \text{ *)},$$

also sicher $r_\mathfrak{m} < 1$.

*) Es ist nämlich, wenn man $1 - \frac{1+\alpha}{\mathfrak{m}}$ durch k bezeichnet,

Es ist demnach von den Ausdrücken $p_{m,}$, $p_{m,+1}$, $p_{m,+2}$, etc. jeder folgende kleiner als der vorhergehende, und es kann daher, weil überdies p_1, p_2, p_3, etc. sämmtlich positiv sind, nur dann die Reihe (*B*) divergiren, wenn die Summe $p_{m,}+p_{m,+1}+p_{m,+2}+\dots p_{m,+m,,}$ mit zunehmendem Werthe von $m_{,,}$ jeden Werth übersteigt. Dass dies aber nicht der Fall ist, dass sich vielmehr ein Werth angeben lässt, über den hinaus diese Summe nicht wachsen kann, lässt sich, wie folgt, zeigen.

Es ist, da $\frac{1}{m}<1$ ist, nach § 257

$$(128)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^{-h}=1-h\frac{1}{m}+\frac{h(h+1)}{2!}\,\frac{1}{m^2}-\frac{h(h+1)(h+2)}{3!}\,\frac{1}{m^3}$$
$$+\frac{h(h+1)(h+2)(h+3)}{4!}\,\frac{1}{m^4}-\text{etc.}=1-\frac{h}{m}+\frac{h(h+1)}{2!}\,\frac{1}{m^2}\left(1-\frac{h+2}{3m}\right)$$
$$+\frac{h(h+1)(h+2)(h+3)}{4!}\,\frac{1}{m^4}\left(1-\frac{h+4}{5m}\right)+\text{etc.}=1-\frac{h}{m}+H,$$

wo für ein positives h die durch H vertretene Reihe aus lauter positiven Gliedern besteht, also positiv ist, wofern nur $m>h$ genommen wird, weil dann $\frac{h+2}{3m}$, $\frac{h+4}{5m}$, $\frac{h+6}{7m}$, etc. kleiner als Eins werden. Man hat daher alsdann

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-h}>1-\frac{h}{m},$$

also wenn man die positive Zahl $1+\alpha-\gamma$ statt h setzt,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-(1+\alpha-\gamma)}>1-\frac{1+\alpha-\gamma}{m}>r_m$$

für jeden Werth von m, der gleich oder grösser als $m_,$ ist *).

$$1-\frac{1+\alpha-\gamma}{m}=k+\frac{\gamma}{m}=\sqrt{\left(k+\frac{\gamma}{m}\right)^2}=\sqrt{\left(k^2+2\frac{k\gamma}{m}+\frac{\gamma^2}{m^2}\right)},$$

während $r_m=\sqrt{\left(k^2+\frac{\beta^2}{m^2}\right)}$ ist; mithin wird $r_m<k+\frac{\gamma}{m}$ für jede Werth von m, für welchen $\frac{2k\gamma m+\gamma^2}{m^2}>\frac{\beta^2}{m^2}$, d. h. $2k\gamma m+\gamma^2>\beta^2$ ist, also (für k seinen Werth restituirend) so oft $2\gamma(m-1-\alpha)+\gamma^2>\beta^2$ d. h. sobald $m>1+\alpha+\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\gamma}$ genommen wird.

*) Da nämlich $m_,>1+\alpha+\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\gamma}$, und

Man erhält sonach, $\alpha-\gamma=\varepsilon$ setzend,

$$r_{\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}} < \left(\frac{\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}}{\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1}\right)^{1+\varepsilon},$$

und folglich, wenn man hierin nach einander $\mathfrak{m}_{,,}=1, 2, 3, \ldots \mathfrak{m}_{,,}$ setzt, und die entstehenden Ausdrücke mit einander multiplicirt,

$$r_{\mathfrak{m}_,+1} \cdot r_{\mathfrak{m}_,+2} \cdot r_{\mathfrak{m}_,+3} \cdots r_{\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}} < \left(\frac{\mathfrak{m}_,+1}{\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1}\right)^{1+\varepsilon},$$

also

$$(129) \qquad p_{\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}} < r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots r_{\mathfrak{m}_,} \left(\frac{\mathfrak{m}_,+1}{\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1}\right)^{1+\varepsilon},$$

und demnach, hierin für $\mathfrak{m}_{,,}$ nach und nach $0, 1, 2, 3, \ldots \mathfrak{m}_{,,}$ nehmend, und nachgehend addirend,

$$(130) \qquad p_{\mathfrak{m}_,} + p_{\mathfrak{m}_,+1} + p_{\mathfrak{m}_,+2} + \cdots + p_{\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}} < r_1\, r_2\, r_3 \cdots r_{\mathfrak{m}_,}(\mathfrak{m}_,+1)^{1+\varepsilon}$$

$$\times \left(\frac{1}{(\mathfrak{m}_,+1)^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(\mathfrak{m}_,+2)^{1+\varepsilon}} + \cdots \frac{1}{(\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1)^{1+\varepsilon}}\right).$$

Ferner folgt aus (128), wenn man dort ε für h, und $-(\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1)$ für $\mathfrak{m}$ setzt, weil dann alle Glieder der Reihe auf der Rechten des $(=)$ Zeichens positiv sind, die gesammte Reihe also grösser als die Summe der zwei ersten Glieder wird,

$$(131) \qquad \left(1-\frac{1}{\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1}\right)^{-\varepsilon} = \left(\frac{\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}}{\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1}\right)^{-\varepsilon} > 1 + \frac{\varepsilon}{\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1}.$$

Hieraus ergibt sich, auf jeder Seite die Einheit subtrahirend und mit $\frac{(\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1)^{-\varepsilon}}{\varepsilon}$ multiplicirend

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[(\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,})^{-\varepsilon} - (\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1)^{-\varepsilon}\right] > \frac{1}{(\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1)^{1+\varepsilon}},$$

und wenn man hierin nach einander $\mathfrak{m}_{,,}=0, 1, 2, 3, \ldots \mathfrak{m}_{,,}$ nimmt und die Resultate addirt,

$$\frac{1}{(\mathfrak{m}_,+1)^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{(\mathfrak{m}_,+2)^{1+\varepsilon}} + \cdots \frac{1}{(\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1)^{1+\varepsilon}} < \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\mathfrak{m}_,} - \frac{1}{(\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}+1)^{\varepsilon}}\right)$$

und um so mehr $\qquad < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\mathfrak{m}_,^{\varepsilon}}.$

Man hat demzufolge

$$1+\alpha+\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\gamma} = 1+\alpha-\gamma+\gamma+\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\gamma} = h+\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\gamma}$$

ist, so hat man allemal auch $\mathfrak{m}_, > h$.

$$p_{\mathfrak{m},}+p_{\mathfrak{m},+1}+p_{\mathfrak{m},+2}+\cdots p_{\mathfrak{m},+\mathfrak{m},,}<r_1\,r_2\,r_3\ldots r_{\mathfrak{m},}\frac{(\mathfrak{m},+1)^{1+\varepsilon}}{\varepsilon\mathfrak{m},^{\varepsilon}},$$

und da der Ausdruck auf der Rechten hier denselben Werth behält, wie gross auch $\mathfrak{m}_{,,}$ gedacht werden mag, so ist der Rest der Reihe (B) kleiner als ein bestimmter endlicher Werth, die Reihe (B) selbst also (wegen des Positiv-Seins der Glieder) convergent.

Mit der Reihe (B) zugleich convergirt aber auch die Reihe (A), da die Glieder der letzteren, numerisch genommen nie grösser als die entsprechenden Glieder der Reihe (B) sind, und es ist sonach die binomische Reihe für Mod. $x=1$ dem Hauptwerthe der Potenz $(1+x)^n$ gleich, so oft der reelle Theil von n einen positiven Werth hat.

Wenn ferner 3) α gleich Null ist oder zwischen 0 und -1 liegt, so bleibt der erste Theil des vorstehenden Räsonnements, welcher auf die Formel (129) führte, noch gültig, wenn man die absolute Zahl γ so gewählt denkt, dass $\gamma<1+\alpha$ wird, also $1+\varepsilon$ zwischen 0 und 1 liegt. Es nähert sich also noch, wie die Formel (129) zeigt, $p_{\mathfrak{m}}$ mit zunehmendem Werthe von $\mathfrak{m}$ der Grenze Null, weil $\frac{\mathfrak{m},+1}{\mathfrak{m},+\mathfrak{m},,+1}$ und somit auch $\left(\frac{\mathfrak{m},+1}{\mathfrak{m},+\mathfrak{m},,+1}\right)^{1+\varepsilon}$ mit wachsendem $\mathfrak{m}_{,,}$ der Grenze Null zugeht. — Bezeichnet man nun die Reihe

$$1+{}^1nx+{}^2nx^2+\ldots{}^{\mathfrak{m}}nx^{\mathfrak{m}}$$

durch $s_{\mathfrak{m}}$, so erhält man, mit $1+x$ multiplicirend,

$$1+({}^1n+1)x+({}^2n+{}^1n)x^2+({}^3n+{}^2n)x^3+\ldots.({}^{\mathfrak{m}}n+{}^{\mathfrak{m}-1}n)x^{\mathfrak{m}}+{}^{\mathfrak{m}}nx^{\mathfrak{m}+1}=s_{\mathfrak{m}}(1+x),$$

d. h., da ${}^rn+{}^{r-1}n={}^r(n+1)$ ist,

$$1+(n+1)x+{}^2(n+1)x^2+{}^3(n+1)x^3+\ldots{}^{\mathfrak{m}}(n+1)x^{\mathfrak{m}}=s_{\mathfrak{m}}(1+x)-{}^{\mathfrak{m}}nx^{\mathfrak{m}+1}.$$

Die Reihe auf der linken Seite dieser Gleichung ist aber, wenn $\mathfrak{m}$ ins Unendliche wachsend gedacht wird, nach dem eben geführten Beweise convergent und dem Hauptwerthe von $(((1+x)^{n+1}))$ gleich, weil der reelle Theil des Exponenten $n+1$ jetzt $\alpha+1$, also positiv ist, und es ergibt sich daher, wofern $1+x$ von Null verschieden ist, wenn man durch $1+x$ dividirt,

$$(1+x)^n=s_\infty-\left(\frac{{}^{\mathfrak{m}}nx^{\mathfrak{m}+1}}{1+x}\right)_{\mathfrak{m}=\infty}.$$

Es wird folglich die binomische Reihe s_∞ convergent und gleich

$(1+x)^n$ sein, wenn ${}^{m}nx^{m+1}$ für ein wachsendes m der Grenze Null sich nähert.

Da aber ${}^{m}nx^{m+1} = p_m[\cos(\varphi_m + m\psi + \psi) + i\sin(\varphi_m + m\psi + \psi)]$ ist, und p_m den Grenzwerth Null hat, so ist diese letzte Bedingung in der That erfüllt, und demnach die binomische Reihe für jeden Werth von α, der zwischen 0 und -1 liegt, so wie für $\alpha = 0$ convergent, so oft $1+x$ von Null verschieden ist, d. h. so oft x nicht den Werth -1 hat.

Um endlich den Fall weiter zu untersuchen, in welchem $x = -1$, also $\psi = \pi$ ist, und die Reihe (A) sonach in

(C) $1 - p_1\cos\varphi_1 + p_2\cos\varphi_2 - p_3\cos\varphi_3 + .. + i(-p_1\sin\varphi_1 + p_2\sin\varphi_2 - p_3\sin\varphi_3 + ...)$

übergeht, kehren wir zur Reihe (B) zurück.

Die Formel (130) bleibt hier noch gültig, wofern nur, wie so eben, $\gamma < 1+\alpha$ angenommen wird. Da aber die Glieder der Reihe (128), wenn ε für h, und $-(m_, + m_{,,} + 1)$ für m gesetzt wird, sämmtlich bis auf das erste negativ werden, also die Summe der beiden ersten Glieder grösser als die ganze Reihe ist, so tritt an die Stelle der Formel (131) jetzt

$$\left(\frac{m_, + m_{,,}}{m_, + m_{,,} + 1}\right)^{-\varepsilon} < 1 + \frac{\varepsilon}{m_, + m_{,,} + 1},$$

und man hat sonach, wenn man für das hier negative ε lieber $-\varepsilon$ setzt,

$$(132)\quad p_{m_,} + p_{m_,+1} + \cdots p_{m_,+m_{,,}} > r_1 r_2 \ldots r_{m_,} \frac{(m_, + 1)^{1-\varepsilon}}{\varepsilon}\left[(m_, + m_{,,} + 1)^{\varepsilon} - m_,\right].$$

Folglich wird, da mit wachsendem $m_{,,}$, $m_, + m_{,,} + 1$ und somit auch $(m_, + m_{,,} + 1)^{\varepsilon}$ jeden noch so grossen Werth übersteigt, der Rest der Reihe (B) unendlich gross. Die Convergenz der Reihe (A) für die zwischen -1 und 0 liegenden Werthe von α, und für ein von -1 verschiedenes x konnte daher nur durch Zeichenwechsel hervorgebracht sein. Die Reihe (C) dagegen muss mit (B) zugleich divergiren, da in derselben die Zeichen entweder gar nicht oder nicht genügend wechseln.

Ist nämlich n reell, also $\beta = 0$, so wird $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots\ldots = \pi$, und die Reihe (C) fällt dann mit der divergenten Reihe (B) zusammen. Ist ferner $\beta \lesseqgtr 0$, so hat man, wenn das Argument von $\frac{n - m + 1}{m}$ durch v_m bezeichnet wird,

$$^{\mathfrak{m}}n = {}^{\mathfrak{m}-1}n \frac{n-\mathfrak{m}+1}{\mathfrak{m}} = p_{\mathfrak{m}-1}(\cos\varphi_{\mathfrak{m}-1}+i\sin\varphi_{\mathfrak{m}-1}).r_{\mathfrak{m}}(\cos v_{\mathfrak{m}}+i\sin v_{\mathfrak{m}})$$
$$= p_{\mathfrak{m}}[\cos(\varphi_{\mathfrak{m}-1}+v_{\mathfrak{m}})+i\sin(\varphi_{\mathfrak{m}-1}+v_{\mathfrak{m}})],$$

folglich $\varphi_{\mathfrak{m}} = \varphi_{\mathfrak{m}-1}+v_{\mathfrak{m}}$ oder $= \varphi_{\mathfrak{m}-1}+v_{\mathfrak{m}}-2\pi,$

während

$$\cos v_{\mathfrak{m}} = \frac{\alpha+1-\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}r_{\mathfrak{m}}},\ \sin v_{\mathfrak{m}} = \frac{\beta}{\mathfrak{m}r_{\mathfrak{m}}}$$

sich ergibt. Für ein zunehmendes $\mathfrak{m}$ wird daher (wegen $\lim r_{\mathfrak{m}}=1$) $\lim\cos v_{\mathfrak{m}} = -1$, $\lim\sin v_{\mathfrak{m}} = 0$, und es nähert sich demzufolge $v_{\mathfrak{m}}$ der Grenze π, so dass um so genauer $\cos\varphi_{\mathfrak{m}} = -\cos\varphi_{\mathfrak{m}-1}$ und $\sin\varphi_{\mathfrak{m}} = -\sin\varphi_{\mathfrak{m}-1}$ wird, je grösser man das $\mathfrak{m}$ denkt. Es werden folglich in den beiden Reihen in (C) die Cosinus und Sinus in um so grösserer Zahl regelmässig alternirend positiv und negativ werden, je weiter man vorschreitet, und demnach die auf einander folgendem Glieder selbst in um so grösseren Gruppen gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ bleiben. — Betrachtet man diese Gruppen für sich als Reihenglieder, so erhalten die beiden Reihen in (C) folgende Gestalt

$$M_1 - M_2 + M_3 - \ldots \pm M_r \mp M_{r+1} \ldots,$$

wo M_1, M_2, M_3 etc., Summen positiver Glieder sind, und die Gliederzahl in M_r (da sie um so grösser ist, je grösser r gedacht wird) mit zunehmendem r am Ende jede gegebene noch so grosse Zahl übersteigt.

Die Divergenz der Reihe (C) ist daher ausser Zweifel gesetzt, sobald man gezeigt hat, dass M_r für keinen noch so grossen Werth von r verschwindend klein wird. — Ist nun z. B. $p_{\mathfrak{m}_,}\cos\varphi_{\mathfrak{m}_,}$ das erste, $p_{\mathfrak{m}_{,,}}\cos\varphi_{\mathfrak{m}_{,,}}$ das letzte Glied in M_r, und z ein geeigneter mittlerer (jedesmal endlicher) Werth aus den numerischen Werthen von $\cos\varphi_{\mathfrak{m}_,}$, $\cos\varphi_{\mathfrak{m}_,+1}$, $\cos\varphi_{\mathfrak{m}_,+2}$, ... $\cos\varphi_{\mathfrak{m}_{,,}}$, so wird $M_r = z\,(p_{\mathfrak{m}_,}+p_{\mathfrak{m}_,+1}+\ldots p_{\mathfrak{m}_{,,}})$, mithin, wie man aus (132) ersieht, um so mehr von Null verschieden, je mehr die Zahl $\mathfrak{m}_,+\mathfrak{m}_{,,}$ die Zahl $\mathfrak{m}_,$ übertrifft, d. h. je grösser r ist. Die Reihe (C) ist daher in der That eine divergente, mit Ausnahme des einzigen Falles, wo $n=0$ ist, weil dann ein Argument von n nicht mehr existirt, die vorstehenden Schlüsse also nicht mehr passen, und im Gegentheile die binomische Reihe dann den Werth 1 annimmt, was

wiederum mit dem Werthe der Potenz $(1+x)^n$, die dadurch in 0^0 übergeht, übereinstimmt.

Sonach divergirt die binomische Reihe für $x=-1$, wenn $n=\alpha+\beta i$ ist, immer, so oft α negativ ist, so wie für $\alpha=0$, wenn nicht zugleich $\beta=0$ ist.

II. Wenn der Modulus von x gleich a, also

$$x^m = a^m (\cos m\psi + i \sin m\psi)$$

ist, so lässt sich die binomische Reihe umformen in

$$(D)\ 1+ap_1 \cos(\varphi_1+\psi)+a^2p_2 \cos(\varphi_2+2\psi)+a^3p_3 \cos(\varphi_3+3\psi)+\ldots \text{ in inf.}$$
$$+i\,[ap_1 \sin(\varphi_1+\psi)+a^2p_2 \sin(\varphi_2+2\psi)+a^3p_3 \sin(\varphi_3+3\psi)+\ldots \text{ in inf.}]$$

Da nun die aus den Gliedern 1, ap_1, a^2p_2, a^3p_3, a^4p_4, etc. gebildete unendliche Reihe, welches auch die Vorzeichen derselben sein mögen, wegen

$$\frac{a^m p_m}{a^{m-1} p_{m-1}} = ar_m$$

convergirt oder divergirt, jenachdem ar_m mit zunehmendem m sich einer Grenze nähert, die kleiner oder grösser als Eins ist, also (da $\lim r_m = 1$ ist) jenachdem a kleiner oder grösser als Eins ist, so erkennt man 1) dass die Reihe (D) convergirt für $a<1$ (was wir auf einem anderen Wege schon in §. 257 dargethan haben) und 2) durch ein ähnliches Räsonnement, wie das auf pag. 375 geführte, dass eben diese Reihe divergirt, wenn $a>1$ ist.

Folgerung. Die vorstehende Erörterung lehrt, dass die binomische Reihe den Hauptwerth der Potenz $(1+x)^n$ hat, 1) so oft der Modulus von x kleiner als Eins ist, 2) so oft der Modulus von x gleich Eins ist, und dabei, wenn man dem n die Form $\alpha+\beta i$ gegeben hat, $\alpha-1$ einen positiven Werth hat.

Die Fälle nämlich, in denen unter den letzten Bedingungen, die binomische Reihe divergirt, schliessen sich von selbst aus, da es dieselben sind, in denen $(1+x)^n$ nach 230 selber keinen Werth hat.

Zusatz. Da hiermit die im Zusatze zu §. 180 schwebend gelassene Frage, ob für $x=1$ die binomische Reihe noch den Werth von $(1+x)^n$ habe, wenn gleichzeitig $n>-1$ sei, bejahend beantwortet ist, so bleibt die Gl. (XIV) des §. 201 und die Gl. (XX) des §. 254 noch für $z=1$ bestehen, und ebenso behält daher die Gl. (124) des §. 255 noch ihre Geltung für $u=1$.

§. 259. *Definitive Bestimmung des Werthes von* 0^0. In der

Arithmetik haben wir gesehen, dass die dortigen Potenzregeln gleich anwendbar bleiben, mag man der Potenz 0^0 den Werth 0 oder den Werth 1 beilegen. Die binomische Reihe dagegen liefert dem vorigen §. zufolge nur den Werth Eins, woraus dann, weil $(((1+x)^n)) = (1+x)^n ((1^n))$, folglich $(((1+x)^0)) = (1+x)^0((1^0)) = (1+x)^0$ ist, ($x = -1$ setzend) auch $((0^0)) = 1$ hervorgeht. Ueberdies fanden wir in §. 230 aus der Exponentialreihe $\lim ((A^0))$ für ein verschwindendes A gleichfalls ausschliesslich gleich Eins. Ferner lässt sich zeigen, dass auch $\lim ((A^x)) = 1$ wird, wenn A und x gleichzeitig der Grenze Null zugehen.

Setzen wir nämlich $A = \frac{1}{r}$ und $x = \frac{1}{m}$, unter r und m grosse absolute Zahlen denkend, so wird

$$A^x = \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{r}};$$

und man hat sich daher nur zu überzeugen, dass für wachsende Werthe von r und m $\lim \sqrt[m]{r} = 1$ werde. Nehmen wir nun den ungünstigsten Fall an, dass das r bei seinem Wachsen stets ein sehr grosses Uebergewicht über das m behalte und etwa gleich m^a sei — unter a eine beliebig grosse absolute Zahl verstanden — so hat man

$$\log \sqrt[m]{r} = \frac{\log r}{m} = \frac{\log (m^a)}{m} = a\frac{\log m}{m},$$

und wenn $\log m = p$, also $m = e^p$, gesetzt wird, nach §. 200

$$\frac{m}{\log m} = \frac{e^p}{p} = \frac{1}{p} + 1 + \frac{p}{2!} + \frac{p^2}{3!} + \ldots \text{ in inf.}$$

Es wird folglich $\frac{m}{\log m}$ mit wachsendem p, oder was dasselbe ist, mit wachsendem m unendlich gross, woraus folgt, dass $\lim \frac{\log m}{m} = 0$, und mithin auch $a \lim \frac{\log m}{m}$, d. h. $\lim \log \sqrt[m]{r}$, gleich Null sein muss. Soll aber $\lim \log \sqrt[m]{r} = 0$ sein, so muss die Grenze von $\sqrt[m]{r}$ den Werth Eins haben. Es ist daher in der That $\lim A^x = 1$,

und demzufolge auch, da überdies $2n\pi x$ für ein unendlich kleines x zur Grenze Null convergirt,

$$\lim((A^x)) = \lim[A^x((1^x))] = \lim(\cos 2n\pi x + i \sin 2n\pi x) = 1\ ^{*)}.$$

Mag also das x vor dem A oder mit dem A zugleich verschwinden, immer bleibt die Einheit die Grenze von $((A^x))$, und nur wenn das A vor dem x verschwunden ist, könnte man noch fragen, ob dieselbe nicht mit 0^x zugleich den Werth Null behalte. Wenn aber $A = 0$ ist, bevor x verschwindet, so hat die durch $((A^x))$ vorgestellte Reihe gar keine Grenze.

Es zwingt uns demnach die Aufnahme der binomischen und der Exponentialreihe, der Potenz 0^0 ausschliesslich den Werth Eins zuzuschreiben.

§. 260. *Von der Form* $0 \log 0$. Die Form $0 \log 0$ kann nur als Uebergangsform auftreten, d. h. nur aus einem Ausdrucke von der Form $p \log q$ hervorgehen, wenn durch besondere Umstände p und q gleichzeitig verschwinden. Aber eben so wie die Form $\frac{1}{ap} \cdot bp$ für den Fall unstatthaft wird, dass p verschwindet, und die Umformung in $\frac{b}{a}$ oder $\frac{1}{a} \cdot b$ vorhergegangen sein muss, wenn ein auf $p = 0$ bezogenes Resultat gewonnen werden soll: so muss auch der Ausdruck $p \log q$, weil er für $q = 0$ keinen Sinn hat, wo es angeht, vorher so umgeformt werden, dass er nach der Substitution von 0 für q ein statthafter bleibt. Es sind aber im allgemeinen Falle, d. h. da, wo q noch von Null verschieden ist, alle

*) Man kommt auf dasselbe Resultat, wenn man nicht A und x aus dem Positiven her, sondern aus dem Negativen oder Imaginären her gegen die Null hin convergiren lässt. Denkt man sich nämlich vorerst x negativ, etwa $= -y$, A aber noch absolut, so ist $\lim((A^x)) = \lim((A^{-y})) = \lim[1 : ((A^y))] = 1 : \lim((A^y))$, folglich gleich Eins, weil $\lim((A^y)) = 1$ ist. Ist ferner A und x beliebig reell oder imaginär, so ergibt sich aus der Gl. (64) des §. 233, wenn man bemerkt, dass $r\alpha$ und r^β für ein zur Grenze Null convergirendes A und x, d. h. mit abnehmendem α, β und r der Grenze Eins, also $\lim lr^\alpha$ und $\lim lr^\beta$ der Grenze Null sich nähern, und daher $\lim \alpha lr = \lim lr^\alpha = 0$ und $\lim \beta lr = \lim lr^\beta = 0$ ist (mögen α und β positiv, negativ oder Null sein) — gleichfalls $\lim((A^x)) = 1$.

Werthe von $p\log q$ in $\log((q^p))$ enthalten, während der letzte Logarithme wenn $p=0$ und $q=0$ genommen wird, dem $\log 1$ gleich ist, also die Werthe $2n\pi i$ hat. Bemerkt man ferner, dass nach §. 243, wenn $\log((q^p)) = A+2\nu\pi i$ gesetzt wird, wo ν nicht die Null, sonst aber jede reelle ganze Zahl vorstellt, die sämmtlichen Werthe von $p\log q$ die Werthe von A sind: so ist klar, dass $0\log 0$ nichts anderes als eine unstatthafte Form für die Null sein kann.

E. Von den Logarithmen mit beliebiger reeller oder imaginärer Basis.

§. 261. *Von den Werthen der Logarithmen mit beliebiger Basis.* Ist a beliebig, aber von der Form $\alpha+\beta i$, so wird man unter $\log_a(p+qi)$ jeden Werth z verstehen müssen, für welchen $a^z = p+qi$ wird. Da nun $a^z = e^{z\log a}$ ist, also $e^{z\log a} = p+qi$ werden muss, so ergibt sich $z\log a = \log(p+qi)$, folglich, wenn r und φ Modulus und Argument von $p+qi$, und R und ψ Modulus und Argument von a vorstellen,

$$\text{(XXI)} \quad z = \log_a(p+qi) = \frac{\log(p+qi)}{\log a} = \frac{lr+(2n\pi+\varphi)i}{lR+(2n'\pi+\psi)i},$$

oder
$$\log_a(p+qi) = P+Qi,$$
wo P und Q bestimmt sind, durch die Gleichungen

$$P = \frac{lr lR+(2n\pi+\varphi)(2n'\pi+\psi)}{(lR)^2+(2n'\pi+\psi)^2}, \quad Q = \frac{(2n\pi+\varphi)lR-(2n'\pi+\psi)lr}{(lR)^2+(2n'\pi+\psi)^2}.$$

Aus der Gl. (XXI) ersieht man, dass die zur Basis a gehörenden Logarithmen nur dann allgemein (d. h. für jegliches p und q) keinen Sinn haben, wenn der Modulus von a gleich Null ist, weil dann für jeden Werth von p und q der dortige Quotient bedeutungslos wird. Ist aber R von Null verschieden und zugleich $\lesseqgtr 1$, so hat der Logarithmus unendlich viele Werthe für jeden von Null verschiedenen Werth von r. Es ist also $\log 0$ der einzige werthlose Logarithmus für die Basis a — vorausgesetzt, dass weder $a=1$ noch $a=-1$ noch a imaginär von der Form $\cos u + i\sin u$ ist.

§. 262. *Von den Werthen der Logarithmen mit der Basis Eins.* Der Ausdruck in (XXI) kann, wenn R und r von Null verschieden sind, nie werthlos werden, wenn nicht $lR + (2n'\pi + \psi)i = 0$, d. h. sowohl $lR = 0$ als $2n'\pi + \psi = 0$ ist. Es wird aber $lR = 0$ nur für $R = 1$, und $2n'\pi + \psi$ kann nie verschwinden, wenn nicht $n' = 0$ und $\psi = 0$ ist, mithin wird $\log(p+qi)$ dann nur bedeutungslos, wenn $a = 1$ und $n' = 0$ ist. Es trifft dieser Fall also nur einen einzigen Werth von $\log_1(p+qi)$, und es haben daher die zur Basis Eins gehörenden Logarithmen bei jedem von Null verschiedenen Logarithmanden einen einzigen Werth weniger, als die zu anderen Grundzahlen gehörenden Logarithmen. (Vrgl. §. 84).

Schlussbemerkung. In §. 98 haben wir gefunden, dass Ausdrücke von der Form $p+qi$, durch Addition, Subtraktion, Multiplication und Division beliebig mit einander verbunden immer auf einen Ausdruck führen müssen, der wiederum der Form $p+qi$ fähig ist. Nach den Ergebnissen dieses Abschnittes lässt sich nun dasselbe für die übrigen der bisher betrachteten Verbindungsweisen, für das Potenziren und Logarithmiren aussagen. Da man nämlich in der Gl. (64) des §. 233 für Potenzen, in denen Dignand und Exponent jene Form haben, und in §. 261 für die Logarithmen, in denen Basis und Logarithmand jene Form haben, die Umgestaltung in dieselbe Form wirklich ausgeführt sieht: so kann ein Ausdruck von der Form $p+qi$, durch wie oft auch wiederholtes Potenziren und Logarithmiren keine Gestalt gewinnen, welche dieser Form unfähig wäre. Und hiermit ist der in §. 98 angefangene Beweis vervollständigt, dass alles Rechnen mit Zahlen nur auf Ausdrücke führen kann, welche die Form $p+qi$ gestatten.

Vierter Abschnitt.

Von den Kreisfunktionen.

§. 263. *Die direkten und indirekten Kreisfunktionen.* Die wichtigsten unter den zusammengesetzten Zahlenverbindungen (oder Funktionen) sind die durch die Zeichen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\cot x$ vorgestellten, deren Eigenschaften wir schon in §. 202 bis §. 217 kennen gelernt haben. Als direkten Zahlenverbindungen, deren Werthe unmittelbar aus den sie definirenden Gleichungen, d. h. aus den Gleichungen (IX) und (X) und den Gleichungen $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, bestimmt werden können, stehen ihnen als indirekte Zahlenverbindungen jene gegenüber, die wir in §. 202 durch $\sin^{-1} z$, $\cos^{-1} z$, $\operatorname{tg}^{-1} z$, $\cot^{-1} z$ bezeichnet haben, und deren Bedeutung sich in den Gleichungen

$\sin^{-1}(\sin x)=x$, $\cos^{-1}(\cos x)=x$, $\operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{tg} x)=x$, $\cot^{-1}(\cot x)=x$, (welche entstehen, wenn man in $\sin^{-1} z=x$, $\cos^{-1} z=x$, $\operatorname{tg}^{-1} z=x$, $\cot^{-1} z=x$ für z ihre definitionsmässigen Werthe, nämlich resp. $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\cot x$ setzt) ausspricht.

In dem Folgenden sollen nun vorzugsweise die in z ausgedrückten Werthe dieser indirekten Verbindungen, so wie die hauptsächlichsten Beziehungen, in denen sie unter einander stehen, aufgesucht werden.

§. 264. *Darstellung der direkten Kreisfunktionen in der Form $P+Qi$.* Die Gll. (XIV) und (XV) des §. 203 geben

(133) $\sin qi = \frac{1}{2}(e^q - e^{-q})i$, $\cos qi = \frac{1}{2}(e^q + e^{-q})$,

und daher auch

(134) $\operatorname{tg} qi = \frac{\sin qi}{\cos qi} = \frac{e^q - e^{-q}}{e^q + e^{-q}}i = \frac{e^{2q}-1}{e^{2q}+1}i$, $\cot qi = -\frac{e^{2q}+1}{e^{2q}-1}i$.

Man findet demnach, die Gll. (XVII) anwendend, wenn man $\frac{1}{2}(e^q + e^{-q})\sin p = P$ und $\frac{1}{2}(e^q - e^{-q})\cos p = Q$ setzt,

(135) $\sin(p+qi) = \sin p \cos qi + \cos p \sin qi = P + Qi$ *);

ferner wenn man $\frac{1}{2}(e^q + e^{-q})\cos p = P'$ und $-\frac{1}{2}(e^q - e^{-q})\sin p = Q'$ setzt,

(136) $\cos(p+qi) = \cos p \cos qi - \sin p \sin qi = P' + Q'i$,

und hieraus:

(137) $\operatorname{tg}(p+qi) = \frac{\sin(p+qi)}{\cos(p+qi)} = \frac{P+Qi}{P'+Q'i} = \frac{PP'+QQ'}{P'^2+Q'^2} + i\frac{P'Q-PQ'}{P'^2+Q'^2} = P'' + Q''i$,

wo der Kürze wegen P'' für $\frac{2e^{2q}\sin 2p}{e^{4q}+2e^{2q}\cos 2p+1}$, und Q'' für $\frac{e^{4q}-1}{e^{4q}+2e^{2q}\cos 2p+1}$ gesetzt worden ist, und

(138) $\cot(p+qi) = \frac{1}{P''+Q''i} = P''' + Q'''i$,

wo $P''' = \frac{2e^{2q}\sin 2p}{e^{4q}-2e^{2q}\cos 2p+1}$, $Q''' = -\frac{e^{4q}-1}{e^{4q}-2e^{2q}\cos 2p+1}$ zu denken ist.

§. 265. *Bedingungen, unter denen die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten imaginärer Ausdrücke einander gleich sind.*

1. Soll $\sin(p+qi) = \sin(p'+q'i)$ sein, so müssen in Folge der Gl. (135) die Werthe von p' und q' nach §. 79 die folgenden Bedingungen erfüllen:

(139) $(e^q + e^{-q})\sin p = (e^{q'} + e^{-q'})\sin p'$

(140) $(e^q - e^{-q})\cos p = (e^{q'} - e^{-q'})\cos p'$.

Ferner wird, weil auch $1-[\sin(p+qi)]^2 = 1-[\sin(p'+q'i)]^2$ sein muss, überdies erfordert, dass $[\cos(p+qi)]^2 = [\cos(p'+q'i)]^2$, also $\cos(p+qi) = \pm\cos(p'+q'i)$ sei, d. h. es muss wegen Gl. (136) noch

(141) $(e^q + e^{-q})\cos p = \pm(e^{q'} + e^{-q'})\cos p'$

(142) $(e^q - e^{-q})\sin p = \pm(e^{q'} - e^{-q'})\sin p'$

sein.

Um diese Gleichungen nach p' und q' aufzulösen, eliminiren

*) **Man vergl. §. 217.**

wir zunächst das p', indem wir die Gll. (139) und (141), so wie die Gll. (140) und (142) quadriren und darauf addiren. Man erhält dadurch die von p' freien Gleichungen:

(143) $$(e^q + e^{-q})^2 = (e^{q'} + e^{-q'})^2$$

(144) $$(e^q - e^{-q})^2 = (e^{q'} - e^{-q'})^2.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt sogleich, da für jedes reelle q und q' die Potenzen e^q, $e^{q'}$, e^{-q}, $e^{-q'}$, und mithin auch die Summen $e^q + e^{-q}$ und $e^{q'} + e^{-q'}$ positive Werthe haben, $e^q + e^{-q} = e^{q'} + e^{-q'}$, d. h., wenn man für e^q, e^{-q}, $e^{q'}$, $e^{-q'}$ die ihnen gleichen Reihen setzt:

$$2\left(\frac{q^2}{2!} + \frac{q^4}{4!} + \frac{q^6}{6!} + \ldots\right) = 2\left(\frac{q'^2}{2!} + \frac{q'^4}{4!} + \frac{q'^6}{6!} + \ldots\right),$$

und diese Gleichung führt auf $q^2 = q'^2$. Denn ist $q = 0$, so muss auch $q' = 0$ sein, weil sonst der Ausdruck zur Linken den Werth Null, der zur Rechten einen positiven (also von Null verschiedenen) Werth annehmen würde; ist aber q, also auch q' von Null verschieden, so würde, wenn z. B. $q^2 > q'^2$ wäre, jedes Glied der ersten Reihe grösser sein als das entsprechende Glied der zweiten Reihe, und folglich auch $e^q + e^{-q} > e^{q'} + e^{-q'}$; und wäre $q^2 < q'^2$, so würde eben so folgen, dass $e^q + e^{-q} < e^q + e^{-q'}$ wäre.

Die beiden Werthe $+q$ und $-q$, welche sich für q' aus der Gleichung $q^2 = q'^2$ ergeben, genügen, wie man sieht, gleichzeitig der Gl. (144).

Andrerseits liefert die Gl. (139), mag man $q' = q$ oder $q' = -q$ nehmen, $\sin p = \sin p'$, d. h. $p' = 2n\pi + p$ oder $= (2n+1)\pi - p$. Die Gl. (140) dagegen liefert für $q' = q$, $\cos p' = \cos p$, und für $q' = -q$, $\cos p' = -\cos p$, d. h., da $-\cos p = \cos(\pi - p)$ ist, $\cos p' = \cos(\pi - p)$. Aus $\cos p' = \cos p$ folgt $p' = 2n\pi \pm p$, aus $\cos p' = \cos(\pi - p)$ folgt $p' = 2n\pi \pm (\pi - p) = (2n+1)\pi \pm p$. Damit also die beiden Gll. (139) und (140) befriedigt werden, muss für $q' = q$, $p' = 2n\pi + p$ sein, für $q' = -q$ dagegen $p' = (2n+1)\pi - p$, und man hat daher

$$p' + q'i = \begin{cases} p' + qi = 2n\pi + (p + qi) \\ p' - qi = (2n+1)\pi - (p + qi). \end{cases}$$

Es bleibt demzufolge der für reelle Bogen gültige Satz, dass, wenn die Gleichung $\sin x = a$ durch einen Werth a von x befriedigt wird, alle übrige Werthe von x, welche dieselbe Gleichung be-

friedigen, in den Formeln $x=2n\pi+\alpha$ und $x=(2n+1)\pi-\alpha$ dargestellt sind, auch für imaginäre Bogen güllig.

2. Soll $\cos(p+qi) = \cos(p'+q'i)$ sein, so muss zufolge der Gl. (136)

(145) $$(e^q+e^{-q})\cos p=(e^{q'}+e^{-q'})\cos p'$$

(146) $$(e^q-e^{-q})\sin p=(e^{q'}-e^{-q'})\sin p'$$

sein, und zugleich (wegen $\sin x^2+\cos x^2=1$)

$$\sin(p+qi)=\pm\sin(p'+q'i),\text{ d. h.}$$

(147) $$(e^q+e^{-q})\sin p=\pm(e^{q'}+e^{-q'})\sin p'$$

(148) $$(e^q-e^{-q})\cos p=\pm(e^{q'}-e^{-q'})\cos p'.$$

Die Gll. (145–148) führen wiederum auf die Gll. (143) und (144) und somit auf $q'=\pm q$. Demnach folgt aus (145) $\cos p=\cos p'$; und aus (146), wenn $q'=q$ genommen wird, $\sin p'=\sin p$, dagegen $\sin p'=-\sin p$, d. h. (wegen $-\sin p=\sin -p$) $\sin p'=\sin -p$, wenn $q'=-q$ genommen wird. Die Gleichung $\cos p=\cos p'$ fordert $p'=2n\pi\pm p$; die Gleichung $\sin p'=\sin p$ fordert $p'=2n\pi+p$ oder $p'=(2n+1)\pi-p$; die Gleichung $\sin p'=\sin -p$ endlich fordert $p'=2n\pi-p$ oder $p'=(2n+1)\pi+p$. Sollen daher die Gll. (145) und (146) gleichzeitig erfüllt werden, so kann für $q'=q$ nur $p'=2n\pi+p$, für $q'=-q$ nur $p'=2n\pi-p$ sein, und es ergibt sich somit

$$p'+q'i=\begin{cases}p'+qi=2n\pi+(p+qi)\\ p'-qi=2n\pi-(p+qi).\end{cases}$$

Ist also α ein Werth von x, welcher der Gleichung $\cos x=a$ genügt, so sind nicht bloss bei reellen, sondern auch bei imaginären Werthen von x, die übrigen Werthe, welche diese Gleichung befriedigen, in der Formel $x=2n\pi\pm\alpha$ enthalten.

3. Soll $\operatorname{tg}(p+qi)=\operatorname{tg}(p'+q'i)$ sein, so muss wegen

$$\operatorname{tg}(p+qi)=\frac{\sin(p+qi)}{\cos(p+qi)},\ \operatorname{tg}(p'+q'i)=\frac{\sin(p'+q'i)}{\cos(p'+q'i)},$$

entweder

(149) $\sin(p'+q'i)=\sin(p+qi)$ und $\cos(p'+q'i)=\cos(p+qi)$

oder

(150) $\sin(p'+q'i)=-\sin(p+qi)$ und $\cos(p'+q'i)=-\cos(p+qi)$

sein. Die Gll. (149) lassen sich aber nach dem Vorhergehenden nur erfüllen, wenn $p'+q'i=2n\pi+(p+qi)$ genommen wird; die Gll. (150) nur, wenn $p'+q'i=(2n+1)\pi+(p+qi)$ genommen

wird *). Mithin wird die Gleichung $\operatorname{tg}(p+qi)=\operatorname{tg}(p'+q'i)$ erfüllt, so oft $p'+q'i$ einen der in $n\pi+(p+qi)$ enthaltenen Werthe repräsentirt, in einem anderen Falle aber niemals.

Es sind folglich, wenn die Gleichung $\operatorname{tg} x=a$ für $x=a$ richtig wird, die übrigen Werthe von x, welche dieser Gleichung genügen, $x=n\pi+a$, mag a reell oder imaginär sein.

4. Wegen $\cot x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ sind eben so, wenn $x=a$ die Gleichung $\cot x=a$ befriedigt, die übrigen Werthe von x, welche dieser Gleichung Genüge leisten, in der Formel $x=n\pi+a$ enthalten.

§. 266. *Zusatz.* Dem Vorstehenden nach gibt es unendlich viele Ausdrücke, welche denselben Sinus oder Cosinus oder dieselbe Tangente oder Cotangente haben, d. h. es sind die Formen $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\operatorname{tg}^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ unendlich vieldeutig.

Stellen wir nun durch $((\sin^{-1}x))$ alle Ausdrücke vor, deren Sinus den Werth x hat, und durch $\sin^{-1}x$ einen bestimmten, aber beliebigen dieser Ausdrücke, so haben wir dem vorigen §. zufolge

$$(151)\qquad ((\sin^{-1}x)) = \begin{cases} 2n\pi+\sin^{-1}x \\ (2n+1)\pi-\sin^{-1}x. \end{cases}$$

Ist also ein Werth von $((\sin^{-1}x))$ reell, so sind es auch alle übrigen — eine Voraussetzung, welche allemal und ausschliesslich erfüllt ist, so oft x reell und dabei $x^2 \overline{\lessgtr} 1$ ist. Es existirt in diesem Falle stets ein Werth von x, aber auch nicht mehr als ein einziger, der weder grösser als $\frac{1}{2}\pi$ noch kleiner als $-\frac{1}{2}\pi$ ist. Diesen einzigen (reellen) Werth wollen wir als den einfachsten Werth von $((\sin^{-1}x))$ fortan unter dem uneingeklammerten $\sin^{-1}x$ denken, so oft x reell ist.

Ebenso ist, wenn $((\cos^{-1}x))$ alle Ausdrücke bezeichnet, deren Cosinus den Werth x hat, und $\cos^{-1}x$ einen beliebigen besonderen dieser Ausdrücke vorstellt,

$$(152)\qquad ((\cos^{-1}x)) = 2n\pi \pm \cos^{-1}x$$

eine vollkommene Gleichung, und es sind demnach alle Werthe

*) Die erste der Gll. (150) wird nämlich nur erfüllt durch die Werthe $2n\pi-(p+qi)$ und $(2n+1)\pi+(p+qi)$, die zweite derselben nur durch $2n\pi\pm(\pi-(p+qi))$, mithin beide Gleichungen zugleich nur durch $(2n+1)\pi+(p+qi)$.

von $((\cos^{-1}x))$ entweder gleichzeitig reell oder gleichzeitig imaginär. Ist x reell und dabei $x^2 \overline{\gtrless} 1$, so existirt nach §. 213, 2 allemal ein einziger Werth von $((\cos^{-1}x))$, welcher weder grösser als π, noch kleiner als Null ist, und diesen einfachsten Werth wollen wir dann allemal unter dem uneingeklammerten Zeichen $\cos^{-1}x$ verstehen.

Ferner sind dem vorigen §. zufolge, wenn $\operatorname{tg}^{-1}x$ und $\cot^{-1}x$ besondere Werthe, und $((\operatorname{tg}^{-1}x))$ und $((\cot^{-1}x))$ alle Werthe vorstellen, deren Tangente und resp. Cotangente gleich x ist,

(153) $((\operatorname{tg}^{-1}x)) = n\pi + \operatorname{tg}^{-1}x$ (154) $((\cot^{-1}x)) = n\pi - \cot^{-1}x$

vollkommene Gleichungen. Für ein beliebig reelles x kann man sich unter $\operatorname{tg}^{-1}x$ und $\cot^{-1}x$ den einzigen (jedesmal existirenden) Werth von $((\operatorname{tg}^{-1}x))$ und $((\cot^{-1}x))$ denken, der zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

§. 267. ***Beziehungen zwischen den indirekten Kreisfunktionen.***

1. Es ist $((\sin^{-1}-x)) = -((\sin^{-1}x))$, $((\operatorname{tg}^{-1}-x)) = -((\operatorname{tg}^{-1}x))$, $((\cot^{-1}-x)) = -((\cot^{-1}x))$, $((\cos^{-1}-x)) = (2n+1)\pi - ((\cos^{-1}x))$.

Denn setzt man in diesen Gleichungen resp. $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\cot\alpha$, $\cos\alpha$ statt x (d. h. denkt man unter α resp. die Werthe von $((\sin^{-1}x))$, $((\operatorname{tg}^{-1}x))$, $((\cot^{-1}x))$, $((\cos^{-1}x))$, und vertauscht dann $-\sin\alpha$, $-\operatorname{tg}\alpha$, $-\cot\alpha$, $-\cos\alpha$ resp. mit den gleichgeltenden Ausdrücken $\sin -\alpha$, $\operatorname{tg} -\alpha$, $\cot -\alpha$, $\cos[(2n+1)\pi - \alpha]$, so erhält man Gleichungen, welche mit den identischen Gleichungen des §. 263 zusammenfallen.

Namentlich ist also für reelle Werthe von x

$\sin^{-1}-x = -\sin^{-1}x$, $\operatorname{tg}^{-1}-x = -\operatorname{tg}^{-1}x$, $\cot^{-1}-x = -\cot^{-1}x$, $\cos^{-1}-x = \pi - \cos^{-1}x$.

2. Für positive Werthe von x ist

$$(a)\quad \sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{(1-x^2)} = \operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x},$$

$$(b)\quad \cos^{-1}x = \sin^{-1}\sqrt{(1-x^2)} = \operatorname{tg}^{-1}\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x} = \cot^{-1}\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

$$(c)\quad \operatorname{tg}^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x} = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}},$$

$$(d)\quad \cot^{-1}x = \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{x} = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} = \cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}},$$

(unter den Wurzeln überall nur deren absolute Werthe gedacht).

Man überzeugt sich davon, wenn man in den Gll. (a) $\sin\alpha$ statt x, in den Gll. (b) $\cos\alpha$ statt x, in den Gll. (c) $\operatorname{tg}\alpha$ statt x, in den Gll. (d) $\cot\alpha$ statt x setzt, und die Gleichungen des §. 263 berücksichtigt.

Die Gleichungen ($a-d$) sind aber nicht mehr sämmtlich vollkommen richtig, wenn man statt der eindeutigen Formen die vieldeutigen setzt.

Ist nämlich z. B. $\sin^{-1}x=\alpha$, also auch $\cos^{-1}\sqrt{(1-x^2)}=\alpha$, so sind nach §. 266 die Werthe von $((\sin^{-1}x))$, $2n\pi+\alpha$ und $(2n+1)\pi-\alpha$, die Werthe von $((\cos^{-1}\sqrt{(1-x^2)}))$ dagegen $2n\pi+\alpha$ und $2n\pi-\alpha$, so dass nur ein Theil der Werthe von $((\sin^{-1}x))$ einem Theile der Werthe von $((\cos^{-1}\sqrt{(1-x^2)}))$ gleich ist. Da ferner $((\cos^{-1}-\sqrt{(1-x^2)}))=\pi-((\cos^{-1}\sqrt{(1-x^2)}))=(2n+1)\pi\pm\alpha$ ist, so erkennt man, dass zwar alle Werthe von $((\sin^{-1}x))$ zugleich Werthe von $((\cos^{-1}\pm\sqrt{(1-x^2)}))$ sind, nicht aber umgekehrt alle Werthe des letzten Ausdrucks zugleich Werthe von $((\sin^{-1}x))$. Wohl aber wird, wie man hieraus und aus $((\sin^{-1}-x))=-((\sin^{-1}x))$ sieht, $((\sin^{-1}\pm x))=((\cos^{-1}\pm\sqrt{(1-x^2)}))$ eine vollkommene Gleichung.

Durch gleiche Betrachtungen erkennt man die vollkommene Richtigkeit der Gleichungen

$$((\sin^{-1}\pm x))=\left(\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{\pm\sqrt{(1-x^2)}}\right)\right),\ ((\cos^{-1}\pm x))=((\sin^{-1}\pm\sqrt{(1-x^2)}))$$
$$=\left(\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\pm\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right)\right),\ ((\operatorname{tg}^{-1}\pm x))=\left(\left(\cos^{-1}\frac{1}{\pm\sqrt{(1+x^2)}}\right)\right),\ \text{etc.}$$

§. 268. *Darstellung der indirekten Kreisfunktionen in logarithmischer Form.* Aus der Gleichung $e^{xi}=\cos x+i\sin x$ folgt, dass xi einer der natürlichen Logarithmen von $\cos x+i\sin x$ ist, so dass man zufolge des §. 224

$$\log(\cos x+i\sin x)=xi+\log 1=xi+2n\pi i \text{ und mithin}$$

$$(155)\qquad 2n\pi+x=\frac{1}{i}\log(\cos x+i\sin x)$$

hat, so wie, wenn man hierin noch $-x$ statt x setzt,

$$(156)\qquad 2n\pi-x=\frac{1}{i}\log(\cos x-i\sin x).$$

Bezeichnet man nun $\cos x$ durch z, also $\sin x$ durch $\pm\sqrt{(1-z^2)}$, so kann man die beiden letzten Gleichungen, weil alsdann $((\cos^{-1}z))=2n\pi\pm x$ ist, und $z+i(\pm\sqrt{(1-z^2)})$ und $z-i(\pm\sqrt{(1-z^2)})$ sich in nichts unterscheiden, zusammenfassen in der Gleichung

(XXII) $((\cos^{-1} z)) = \frac{1}{i} \log[z - i((\sqrt{(1-z^2)}))].$

Setzt man ferner in (155) $\pi - x$ statt x, so erhält man

(157) $(2n+1)\pi - x = \frac{1}{i} \log(-\cos x + i \sin x),$

und wenn man nun $\sin x$ durch z, also $\cos x$ durch $\pm\sqrt{(1-z^2)}$ bezeichnet, so folgt aus den Gll. (155) und (157), weil die Werthe von $((\sin^{-1} z))$ in den Formeln $2n\pi + x$ und $(2n+1)\pi - x$ enthalten sind,

(XXIII) $((\sin^{-1} z)) = \frac{1}{i} \log(((\sqrt{(1-z^2)})) + iz).$

Dividirt man noch die Gleichungen $e^{xi} = \cos x + i \sin x$ und $e^{-xi} = \cos x - i \sin x$ durch einander, so erhält man

(158) $e^{2xi} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x},$

oder, wenn man hier Zähler und Nenner durch $\cos x$ dividirt,

$$e^{2xi} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}.$$

Es ist demnach $2xi$ ein Werth des natürlichen Logarithmen von $(1 + i \operatorname{tg} x) : (1 - i \operatorname{tg} x)$, und alle Werthe dieses Logarithmen sind folglich in der Formel $2xi + \log 1$ d. h. in $2i(x + n\pi)$ enthalten, so dass man hat

$$x + n\pi = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}.$$

Bezeichnet man daher $\operatorname{tg} x$ durch z, so ist wegen $((\operatorname{tg}^{-1} z)) = n\pi + x$,

(XXIV) $((\operatorname{tg}^{-1} z)) = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{1}{2i} \log \frac{i - z}{i + z},$

wo der dritte Ausdruck aus dem zweiten hervorgeht, wenn man Zähler und Nenner des Logarithmanden mit i multiplicirt.

Auf gleiche Weise erhält man aus (158), wenn man Zähler und Nenner mit $\sin x$ dividirt, und nachher $\cot x = z$ setzt,

(XXV) $((\cot^{-1} z)) = \frac{1}{2i} \log \frac{z + i}{z - i} = \frac{1}{2i} \log \frac{iz - 1}{iz + 1}.$

§. 269. *Darstellung von* $((\operatorname{tg}^{-1} z))$ *in Reihenform.* Wenn man in der aus der Gl. (124) des §. 255 entnommenen Gleichung

$L(1 + zi) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{6}z^6 -$ etc. $+ i[z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 -$ etc.$]$,

i mit $-i$ vertauscht, so ergibt sich

$$L(1-zi) = \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{6}z^6 - \text{etc.} - i[z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \text{etc.}],$$

und wenn man diese Gleichung von der vorhergehenden subtrahirt,

$$L(1+zi) - L(1-zi) = L\frac{1+zi}{1-zi} = 2i[z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \text{etc.}].$$

Andrerseits ist gemäss der Gl. (XXIV)

$$((\operatorname{tg}^{-1}z)) = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1}{2i}\left(L\frac{1+iz}{1-iz} + 2n\pi i\right),$$

mithin hat man

(XXVI) $((\operatorname{tg}^{-1}z)) = n\pi + z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \ldots$ in inf.,

welche Gleichung nach §. 255 für $z^2 < 1$, und ausserdem zufolge des Zusatzes zu §. 258 noch für $z = 1$ anwendbar ist.

§. 270. *Zusatz.* Setzt man $\operatorname{tg}^{-1}z = x$, so hat man

$$z = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin(\tfrac{1}{2}\pi - x)},$$

mithin, wenn man hierin $x = \tfrac{1}{2}\pi - x$, d. h. $x = \tfrac{1}{4}\pi$ nimmt, $z = \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\pi = 1$. Es ist demnach einer der Werthe von $((\operatorname{tg}^{-1}1))$ gleich $\tfrac{1}{4}\pi$, und es muss für einen bestimmten Werth von n, den wir mit n_1 bezeichnen wollen, die Reihe der Gl. (XXVI), wenn darin $z = 1$ gesetzt wird, den Werth $\tfrac{1}{4}\pi$ annehmen, d. h. es muss

$$\tfrac{1}{4}\pi = n_1\pi + 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots \text{ in inf.}$$

sein. Da aber der Werth der Reihe $1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$ in inf. nach §. 164, 4 zwischen 1 und $1 - \tfrac{1}{3}$, d. h. zwischen 1 und $\tfrac{2}{3}$ liegt, und andrerseits nach §. 208, $\tfrac{1}{4}\pi$ zwischen $\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ und 1, also (insofern $\sqrt{2} > 1,4$ ist) zwischen 0,7 und 1 liegt, so kann n_1 keinen anderen Werth, als den Werth Null haben, und man hat sonach

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots \text{ in inf.}$$

§. 271. *Darstellung der Werthe von* $((\sin^{-1}(\alpha+\beta i)))$ *in der Form* $p+qi$. Existiren reelle Werthe von p und q, welche $\sin^{-1}(\alpha+\beta i) = p+qi$ machen, so müssen, weil alsdann $\sin(p+qi) = \alpha+\beta i$ folgt, wegen Gl. (135) die Gleichungen

(159) $\tfrac{1}{2}(e^q + e^{-q})\sin p = \alpha,\ \tfrac{1}{2}(e^q - e^{-q})\cos p = \beta$

sich für jeden reellen Werth von α und β durch reelle Werthe von p und q befriedigen lassen. Lösen wir daher, um zu sehen, ob dies möglich sei, diese beiden Gleichungen nach p und q auf.

Man findet zunächst aus denselben, wenn man sie resp. durch $\sin p$ und $\cos p$ dividirt (also vorerst voraussetzt, dass weder $\sin p$

noch $\cos p$ gleich Null ist) und darauf nach einander addirt und subtrahirt,

(160) $$e^q = \frac{\alpha}{\sin p} + \frac{\beta}{\cos p},\quad e^{-q} = \frac{\alpha}{\sin p} - \frac{\beta}{\cos p}.$$

Diese beiden Gleichungen, mit einander multiplicirt, geben

(161) $$1 = \frac{\alpha^2}{\sin p^2} - \frac{\beta^2}{\cos p^2},$$

und man erhält daher, wenn man den Modulus von $\alpha + \beta i$ durch r bezeichnet, also $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$ setzt, je nachdem man mittels der Gleichung $\sin p^2 + \cos p^2 = 1$ den $\cos p$ oder den $\sin p$ eliminirt, hieraus

$$\sin p^2 = \tfrac{1}{2}(1+r^2) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[(1+r^2)^2 - 4\alpha^2]}$$
$$\cos p^2 = \tfrac{1}{2}(1-r^2) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{[(1-r^2)^2 + 4\beta^2]},$$

oder wegen $(1+r^2)^2 - 4\alpha^2 = (1-r^2)^2 + 4\beta^2$, wenn man $\sqrt{[(1+r^2)^2 - 4\alpha^2]} = u$ setzt,

$$\sin p^2 = \tfrac{1}{2}(1+r^2) \pm \tfrac{1}{2}u,\quad \cos p^2 = \tfrac{1}{2}(1-r^2) \pm \tfrac{1}{2}u,$$

wo, weil $(1-r^2)^2 + 4\beta^2$ offenbar positiv ist, u stets einen reellen Werth hat. Da aber u grösser als der numerische Werth von $1 - r^2$ ist, so darf in dem Ausdrucke für $\cos p^2$, damit $\cos p$ reell, also $\cos p^2$ positiv werde, nur das $(+)$ Zeichen gelten. Da ferner $\sin p^2 + \cos p^2$, d. h.

$$\tfrac{1}{2}(1 + r^2 \pm u) + \tfrac{1}{2}(1 - r^2 + u)$$

den Werth Eins haben muss, diese Summe aber, jenachdem man in dem ersten Gliede das $(+)$ oder das $(-)$ Zeichen gelten lässt, sich auf $1+u$ oder 1 reducirt: so darf in dem Ausdrucke für $\sin p^2$ nur das $(-)$ Zeichen gewählt werden. — Man hat sonach

(162) $$\sin p^2 = \tfrac{1}{2}(1 + r^2 - u),\quad \cos p^2 = \tfrac{1}{2}(1 - r^2 + u).$$

Wegen $(1+r^2)^2 - 4\alpha^2 < (1+r^2)^2$ ist auch $u < 1 + r^2$, mithin $\tfrac{1}{2}(1 + r^2 - u)$, d. h. $\sin p^2$ positiv, und es wird daher zugleich $\sin p$ reell. Die vorstehenden Gleichungen liefern folglich sowohl ein reelles $\sin p$, als ein reelles $\cos p$, und können daher, weil hier zugleich der Gleichung $\sin p^2 + \cos p^2 = 1$ Genüge geschieht, nach §. 216 stets durch reelle Werthe von p befriedigt werden.

Die Gll. (162) geben zwei Werthe sowohl für $\sin p$ als für $\cos p$, einen positiven und einen negativen. Von diesen ist hier aber für $\sin p$ nur einer zu nehmen. Da nämlich auch q reell werden soll, und daher sowohl e^q als e^{-q} positiv werden muss, so

folgt aus der ersten der Gll. (159), dass für $\sin p$ nur der positive oder der negative Werth genommen werden darf, je nachdem α positiv oder negativ ist. Für $\cos p$ dagegen genügt sowohl der positive, wie der negative Werth, da aus (161) folgt, dass der numerische Werth von $\frac{\beta}{\cos p}$ stets kleiner als der von $\frac{\alpha}{\sin p}$ ist, die Gll. (160) daher, mag $\cos p$ positiv oder negativ sein, positive Werthe für e^q und e^{-q} liefern.

Es ergeben sich demnach für p zwei Werthe, die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, und zwar liegen dieselben zwischen 0 und π oder zwischen 0 und $-\pi$, je nachdem α positiv oder negativ ist (weil dann auch $\sin p$ resp. positiv oder negativ ist). Nennt man bei positivem α den kleinsten derselben p_1, d. h. setzt man bei positivem α

$$\sin^{-1}\sqrt{[\tfrac{1}{2}(1+r^2-u)]} = p_1,$$

und bezeichnet man bei negativem α von den beiden zwischen 0 und $-\pi$ liegenden Werthen von p denjenigen, der zwischen 0 und $-\frac{1}{2}\pi$ enthalten ist, durch p_1, d. h. setzt man bei negativem α

$$\sin^{-1}-\sqrt{[\tfrac{1}{2}(1+r^2-u)]} = p_1,$$

so hat man sämmtliche Werthe von p, welche den gestellten Anforderungen genügen, zusammengefasst in der Formel

$$p = \begin{cases} 2n\pi+p_1 \\ (2n+1)\pi-p_1. \end{cases}$$

Was den Werth von q betrifft, so liefert die erste der Gll. (160)

$$q = \log\left(\frac{\alpha}{\sin p}+\frac{\beta}{\cos p}\right),$$

und gibt demnach, da hier der Logarithmand einen positiven Werth hat, einen einzigen reellen Werth für q, nämlich

$$q = \mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\sin p}+\frac{\beta}{\cos p}\right).$$

Man erhält daher, je nachdem man $p = 2n\pi+p_1$ oder $p=(2n+1)\pi-p_1$ setzt,

$$p+qi = 2n\pi+p_1+i\,\mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\sin p_1}+\frac{\beta}{\cos p_1}\right)$$

oder $$p+qi = (2n+1)\pi-p_1+i\,\mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\sin p_1}-\frac{\beta}{\cos p_1}\right),$$

mithin, da $\mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\sin p_1} - \frac{\beta}{\cos p_1}\right) = -\mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\sin p_1} + \frac{\beta}{\cos p_1}\right)$ ist *),

$$\text{(XXVII)}\ ((\sin^{-1}(\alpha+\beta i))) = \begin{cases} 2n\pi + p_1 + i\ \mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\sin p_1} + \frac{\beta}{\cos p_1}\right) \\ (2n+1)\pi - p_1 - i\ \mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\sin p_1} + \frac{\beta}{\cos p_1}\right). \end{cases}$$

Was den Fall anlangt, wo $\sin p = 0$ ist, so zeigt die erste der Gll. (159), dass dies nur eintreten kann für $\alpha = 0$, und es gibt dann, weil dabei $\cos p = \pm 1$ wird, die zweite der Gll. (159)

$$e^q - e^{-q} = \pm 2\beta.$$

Hieraus zieht man durch Multiplikation mit e^q,

$$(e^q)^2 - 1 = \pm 2\beta e^q,$$

und findet demnach, diese Gleichung nach e^q auflösend,

$$e^q = \pm\beta \pm \sqrt{(1+\beta^2)}.$$

Da indess numerisch genommen $\sqrt{(1+\beta^2)} > \beta$ ist, und e^q positiv werden muss, damit für q etwas Reelles erhalten werde, so darf hier auf die Wurzel nur das (+) Zeichen bezogen werden, so dass im vorliegenden Falle

$$e^q = \pm\beta + \sqrt{(1+\beta^2)}$$

allein anzunehmen ist, wobei man überdies bemerke, dass das + Zeichen vor dem β zu $\cos p = +1$, das − Zeichen zu $\cos p = -1$ gehörte.

Es ergibt sich hiernach $q = \mathrm{l}(\pm\beta + \sqrt{[1+\beta^2]}) = \pm\mathrm{l}(\beta + \sqrt{[1+\beta^2]})$ **), und man erhält folglich, da aus $\sin p = 0$, $p = 2n\pi$ (zu $\cos p = +1$ gehörig) und $p = (2n+1)\pi$ (zu $\cos p = -1$ gehörig) folgt, für $p + qi$ die Werthe $2n\pi + i\,\mathrm{l}(\beta + \sqrt{[1+\beta^2]})$ und $(2n+1)\pi - i\,\mathrm{l}(\beta + \sqrt{[1+\beta^2]})$, d. h. es ist

$$\text{(XXVII, }a)\quad ((\sin^{-1}\beta i)) = \begin{cases} 2n\pi + i\ \mathrm{l}(\beta + \sqrt{[1+\beta^2]}) \\ (2n+1)\pi - i\ \mathrm{l}(\beta + \sqrt{[1+\beta^2]}). \end{cases}$$

*) Es ist nämlich, wenn man abkürzend $\alpha : \sin p_1 = a$, $\beta : \cos p_1 = b$ setzt zufolge der Gl. (161) $1 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, also $a - b = \frac{1}{a+b}$, und folglich $\mathrm{l}(a-b) = \mathrm{l}\frac{1}{a+b} = \mathrm{l}1 - \mathrm{l}(a+b) = -\mathrm{l}(a+b)$.

**) Es ist nämlich $(\beta + \sqrt{[1+\beta^2]})(-\beta + \sqrt{[1+\beta^2]}) = 1$, also $\mathrm{l}(-\beta + \sqrt{[1+\beta^2]}) = \mathrm{l}[1 : (\beta + \sqrt{[1+\beta^2]})] = \mathrm{l}1 - \mathrm{l}(\beta + \sqrt{[1+\beta^2]}) = -\mathrm{l}(\beta + \sqrt{[1+\beta^2]})$.

Den Fall endlich angehend, dass $\cos p = 0$ ist, zeigt die zweite der Gll. (159), dass derselbe nur eintreten kann, wenn $\beta = 0$ ist. Die erste derselben gibt dann, weil aus $\cos p = 0$, $\sin p = \pm 1$ folgt, $e^q + e^{-q} = \pm 2\alpha$, — wo, da $e^q + e^{-q}$ bei reellem q nur positiv sein kann, das + oder — Zeichen zu nehmen ist, je nachdem α positiv oder negativ ist. Bezeichnet man also den numerischen Werth von α durch a, so hat man $e^q + e^{-q} = 2a$, mithin, diese Gleichung nach e^q auflösend, $e^q = a + ((\sqrt{[a^2 - 1]}))$, was voraussetzt, dass $a \overline{\gtrless} 1$ sei, weil sonst e^q imaginär werden würde. Ist diese Voraussetzung aber erfüllt, so ergibt sich, weil für ein positives α, $\sin p = 1$, also $p = (2n + \frac{1}{2})\pi$, für ein negatives α dagegen $\sin p = -1$, also $p = (2n - \frac{1}{2})\pi$ ist, und weil aus der letzten Gleichung

$$q = \mathrm{l}[a + ((\sqrt{(a^2 - 1)}))] = \pm \mathrm{l}(a + \sqrt{(a^2 - 1)})$$

folgt,

$$\text{(XXVII, } b) \quad \begin{aligned} ((\sin^{-1} a)) &= (2n + \tfrac{1}{2})\pi \pm i\, \mathrm{l}(a + \sqrt{(a^2 - 1)}) \\ ((\sin^{-1} - a)) &= (2n - \tfrac{1}{2})\pi \pm i\, \mathrm{l}(a + \sqrt{(a^2 - 1)}), \end{aligned}$$

so oft a eine absolute Zahl bezeichnet, die gleich oder grösser als Eins ist.

Ist $a < 1$, so kann nicht zugleich $\beta = 0$ und $\cos p = 0$ sein, weil, wie wir eben gesehen, diese Gleichungen auf ein imaginäres q führen; und es behält daher für $a < 1$ die Gl. (XXVII) ihre Gültigkeit. In dem besonderen Falle, wo $a < 1$ und $\beta = 0$ ist, wird wegen $r^2 = a^2$, $u = 1 - r^2 = 1 - a^2$, also zufolge der Gl. (162) $\sin p^2 = a^2$, d. h. es wird für ein positives α, $\sin p = \alpha$, für ein negatives α, $\sin p = -\alpha$, folglich jedenfalls $\sin p = \alpha$, so dass $q = \mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\sin p} + \frac{\beta}{\cos p}\right) = \mathrm{l}1 = 0$ wird, und demnach, weil $p_1 = \sin^{-1}\alpha$ wird, die Gl. (XXVII) in die bekannte Gleichung

$$((\sin^{-1}\alpha)) = \begin{cases} 2n\pi + \sin^{-1}\alpha \\ (2n + 1)\pi - \sin^{-1}\alpha \end{cases}$$

übergeht.

§. 272. *Darstellung der Werthe von* $((\cos^{-1}(\alpha + \beta i)))$ *in der Form* $p + qi$. Gibt es reelle Werthe von p' und q', welche für jedes gegebene reelle α und β, $((\cos^{-1}(\alpha + \beta i))) = p' + q'i$, also $\cos(p' + q'i) = \alpha + \beta i$ machen, so müssen dieselben wegen Gl. (136) die Gleichungen

$$\text{(163)} \quad \tfrac{1}{2}(e^{q'} + e^{-q'}) \cos p' = \alpha, \quad -\tfrac{1}{2}(e^{q'} - e^{-q'}) \sin p' = \beta$$

befriedigen. Da aber diese Gleichungen in die Gll. (159) übergehen, sobald man $q, -q$, $\sin p$ und $\cos p$ resp. mit $-q'$, q', $\cos p'$ und $\sin p'$ vertauscht, so gelten auch hier die Resultate des vorigen §., wenn man in ihnen eben diese Vertauschungen vornimmt. Namentlich wird also, wenn man wiederum

$$\sqrt{[(1+r^2)^2-4\alpha^2]} = u$$

setzt,

$$\cos p'^2 = \tfrac{1}{2}(1+r^2-u),\ \sin p'^2 = \tfrac{1}{2}(1-r^2+u),$$

und zwar ist für $\cos p'$ der positive oder negative Werth von $((\sqrt{[\tfrac{1}{2}(1+r^2-u)]}))$ zu nehmen, je nachdem α positiv oder negativ ist, während sich hieraus für $\sin p'$ zwei Werthe, ein positiver und ein negativer, ergeben.

Setzt man dann $\cos^{-1}\sqrt{[\tfrac{1}{2}(1+r^2-u)]}$ oder $\cos^{-1}-\sqrt{[\tfrac{1}{2}(1+r^2-u)]}$ gleich p_2, je nachdem α positiv oder negativ ist, so erhält man sämmtliche Werthe von p', die der obigen Forderung genügen, aus der Gleichung $p' = 2n\pi \pm p_2$.

Der zweiten der Gll. (160) entspricht hier die Gleichung

$$e^{q'} = \frac{\alpha}{\cos p'} - \frac{\beta}{\sin p'},$$

so dass man

$$q' = \mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\cos p'} - \frac{\beta}{\sin p'}\right)$$

erhält, wofern nur weder $\sin p'$ noch $\cos p'$ den Werth Null hat, und es findet sich daher unter dieser Bedingung, wenn man für p' die Werthe $2n\pi + p_2$ und $2n\pi - p_2$ setzt,

$$\text{(XXVIII)} \quad ((\cos^{-1}(\alpha+\beta i))) = \begin{cases} 2n\pi + p_2 + i\,\mathrm{l}\left(\dfrac{\alpha}{\cos p_2} - \dfrac{\beta}{\sin p_2}\right) \\ 2n\pi - p_2 - i\,\mathrm{l}\left(\dfrac{\alpha}{\cos p_2} - \dfrac{\beta}{\sin p_2}\right). \end{cases}$$

Die Voraussetzung, dass $\cos p' = 0$ ist, kann, wie die erste der Gll. (163) zeigt, nur statt haben, wenn $\alpha = 0$ ist, während die zweite dieser Gleichungen, da alsdann $\sin p' = \pm 1$ ist, auf $e^{q'} - e^{-q'} = \mp 2\beta$ führt. Die letzte Gleichung liefert aber

$$e^{q'} = \mp\beta + \sqrt{(1+\beta^2)},$$

wo das $-$ Zeichen vor dem β der Gleichung $\sin p' = 1$, das $+$ Zeichen der Gleichung $\sin p' = -1$ entspricht, mithin ergibt sich

$$q' = \mp \mathrm{l}(\beta + \sqrt{[1+\beta^2]}),$$

und man erhält, da für $\sin p' = 1$, $p' = (2n + \frac{1}{2})\pi$, für $\sin p' = -1$, $p' = (2n - \frac{1}{2})\pi$ wird,

(XXVIII, *a*) $((\cos^{-1}\beta i)) = p' + q'i = (2n \pm \frac{1}{2})\pi \mp i\, \mathrm{l}(\beta + \sqrt{[1 + \beta^2]})$,

in welcher Formel von den doppelten Vorzeichen die beiden oberen und die beiden unteren einander entsprechen.

Bei der Voraussetzung, dass $\sin p' = 0$ ist, reduciren sich die Gll. (163) auf $\beta = 0$ und $e^{q'} + e^{-q'} = \pm 2\alpha$, wo das $+$ und $-$ Zeichen sich resp. auf $\cos p' = 1$ und auf $\cos p' = -1$ beziehen. Bezeichnet man also wiederum durch a den numerischen Werth von α, so hat man, weil $e^{q'} + e^{-q'}$ nur positiv sein kann, $e^{q'} + e^{-q'} = 2a$, und man findet, wie in §. 271,

$$q' = \mathrm{l}(a + ((\sqrt{[a^2 - 1]}))),$$

was wiederum, da q' reell werden muss, voraussetzt, dass $a \gtrless 1$ sei. Da für $\alpha = a$, $\cos p' = 1$ und daher $p' = 2n\pi$; für $\alpha = -a$ dagegen $\cos p' = -1$ und mithin $p' = (2n + 1)\pi$ ist, so hat man zuletzt ($a \gtrless 1$ vorausgesetzt)

$$\text{(XXVIII, } b\text{)} \quad \begin{aligned} ((\cos^{-1}a)) &= 2n\pi \mp i\, \mathrm{l}(a + \sqrt{(a^2 - 1)}) \\ ((\cos^{-1} - a)) &= (2n + 1)\pi \mp \mathrm{l}\,(a + \sqrt{(a^2 - 1)}). \end{aligned}$$

§. 273. *Die Hauptwerthe von* $((\sin^{-1}x))$ *und* $\cos^{-1}x)$). Von den unendlich vielen Werthen, welche wir in §. 271 für $((\sin^{-1}x))$ gefunden haben, heisse derjenige, in welchem der reelle Theil weder grösser als $\frac{1}{2}\pi$ noch kleiner als $-\frac{1}{2}\pi$ ist, der Hauptwerth und werde einfach durch $\sin^{-1}x$ bezeichnet. Ferner heisse von den in §. 272 für $((\cos^{-1}x))$ gefundenen Werthen derjenige, in welchem der reelle Theil weder grösser als π noch kleiner als Null ist, der Hauptwerth und werde durch $\cos^{-1}x$ bezeichnet.

Hiernach ist also, wenn α und β von Null verschieden sind,

(164) $\sin^{-1}(\alpha + \beta i) = p_1 + i\, \mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\sin p_1} + \frac{\beta}{\cos p_1}\right)$

(165) $\cos^{-1}(\alpha + \beta i) = p_2 + i\, \mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\cos p_2} - \frac{\beta}{\sin p_2}\right) = p_2 - i\, \mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{\cos p_2} + \frac{\beta}{\sin p_2}\right)$;

ferner

(166) $\sin^{-1}\beta i = i\mathrm{l}(\beta + \sqrt{(1 + \beta^2)})$, $\cos^{-1}\beta i = \frac{1}{2}\pi - i\, \mathrm{l}(\beta + \sqrt{(1 + \beta^2)})$.

Ist α reell und dabei $\alpha^2 < 1$, so fällt der Hauptwerth von $((\sin^{-1}\alpha))$ und $((\cos^{-1}\alpha))$ mit demjenigen Werthe zusammen, den wir schon früher ohne Klammern resp. durch $\sin^{-1}\alpha$, $\cos^{-1}\alpha$ bezeichnet haben.

Ist α reell und dabei $\alpha^2=1$, so geben die Formeln (XXVII, b) und (XXVIII, b)

$$\sin^{-1}1=\tfrac{1}{2}\pi,\ \sin^{-1}-1=-\tfrac{1}{2}\pi,\ \cos^{-1}1=0,\ \cos^{-1}-1=\pi.$$

Ist α reell und dabei $\alpha^2>1$, so geben die obigen Formeln zwei Werthe, welche das dem Hauptwerthe beigelegte Merkmal haben, und es bleibt uns noch die Wahl, welchem von beiden wir behufs der Erhaltung der Eindeutigkeit diesen Namen lassen wollen. Um das Resultat des folgenden §. gleichförmiger zu machen, wählen wir zum Hauptwerthe von $((\sin^{-1}\alpha))$ den Werth, in welchem der Coefficient von i positiv ist, und zum Hauptwerthe von $((\cos^{-1}\alpha))$ den Werth, in welchem der Coefficient von i negativ ist, d. h. wir setzen

(167) $\sin^{-1}a=\tfrac{1}{2}\pi+i\,l(a+\sqrt{(a^2-1)}),\ \sin^{-1}-a=-\tfrac{1}{2}\pi+i\,l(a+\sqrt{(a^2-1)})$

(168) $\cos^{-1}a=-i\,l(a+\sqrt{(a^2-1)}),\ \cos^{-1}-a=\pi-l(a+\sqrt{(a^2-1)})$.

§. 274. *Beziehungen zwischen den Haupt-Werthen* $\sin^{-1}(\alpha+\beta i)$ *und* $\cos^{-1}(\alpha+\beta i)$. Denkt man unter α und β in der Funktion $\sin^{-1}(\alpha+\beta i)$ dieselben Ausdrücke, wie unter dem α und β in $\cos^{-1}(\alpha+\beta i)$ und nimmt zunächst β von Null verschieden an, so hat man 1) wenn α positiv ist und die in §. 271 und 272 angewendeten Bezeichnungen beibehalten werden, weil dann sowohl $\sin p_1$ als $\cos p_2$ gleich $\sqrt{(\tfrac{1}{2}(1+r^2-u))}$ ist, $\sin p_1=\cos p_2$. Insofern nun $\sin p_1$ und $\cos p_2$ mit α zugleich positiv sind, also p_1 und p_2 zwischen 0 und $\tfrac{1}{2}\pi$ liegen, so folgt aus $\sin p_1=\cos p_2$, $p_2=\tfrac{1}{2}\pi-p_1$, und mithin auch $\sin p_2=\cos p_1$. Man erhält sonach, die Gll. (164) und (165) zu einander addirend,

$$\sin^{-1}(\alpha+\beta i)+\cos^{-1}(\alpha+\beta i)=p_1+p_2=p_1+(\tfrac{1}{2}\pi-p_1)=\tfrac{1}{2}\pi.$$

Ist 2) α negativ, so ist sowohl $\sin p_1$ als $\cos p_2$ gleich $-\sqrt{[\tfrac{1}{2}(1+r^2-u)]}$, also wiederum $\sin p_1=\cos p_2$, und es liegt dabei p_1 zwischen 0 und $-\tfrac{1}{2}\pi$, p_2 zwischen $\tfrac{1}{2}\pi$ und π. Da nun $\sin p_1=-\sin -p_1$ und $\cos p_2=-\cos(\pi-p_2)$ ist, und sowohl $-p_1$ als $\pi-p_2$ zwischen 0 und $\tfrac{1}{2}\pi$ liegt, so hat man, weil aus $\sin p_1=\cos p_2$, $\sin -p_1=\cos(\pi-p_2)$ folgt, $-p_1=\tfrac{1}{2}\pi-(\pi-p_2)$, also wiederum $p_2=\tfrac{1}{2}\pi-p_1$ und $\sin p_2=\cos p_1$, woraus, wie im vorigen Falle, sich

(169) $$\sin^{-1}(\alpha+\beta i)+\cos^{-1}(\alpha+\beta i)=\tfrac{1}{2}\pi$$

ergibt.

Diese Gl. (169) bleibt noch richtig 1) für $\alpha=0$, wie dies die

Gll. (166) unmittelbar zeigen, 2) für $\beta=0$, wenn $\alpha^2 \lesseqgtr 1$ ist, wie wir dies aus dem Früheren wissen, und endlich 3) für $\beta=0$, wenn $\alpha^2>1$ ist, und wir, wie dies oben geschehen, unter den Hauptwerthen von $((\sin^{-1}\alpha))$ und $((\cos^{-1}\alpha))$ die in den Gll. (167) und (168) angegebenen Werthe denken. Man hat folglich

$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\tfrac{1}{2}\pi$$

für jeden reellen wie imaginären Werth von x.

§. 275. *Darstellung der Werthe von* $((\operatorname{tg}^{-1}(\alpha+\beta i)))$ *in der Form* $p+qi$. Aus der Gl. $((\operatorname{tg}^{-1}(\alpha+\beta i)))=p+qi$ folgt

$$\alpha+\beta i=\operatorname{tg}(p+qi)=\frac{\operatorname{tg}p+\operatorname{tg}(qi)}{1-\operatorname{tg}p\operatorname{tg}(qi)},$$

mithin, da, wenn

$$(170)\qquad \frac{e^q-e^{-q}}{e^q+e^{-q}}=v$$

gesetzt wird, nach Gl. (134) $\operatorname{tg}(qi)=vi$ ist,

$$(\alpha+\beta i)(1-iv\operatorname{tg}p)=\operatorname{tg}p+vi,$$

d. h.

$$\alpha+\beta v\operatorname{tg}p+(\beta-\alpha v\operatorname{tg}p)i=\operatorname{tg}p+vi.$$

Sollen daher für jedes reelle α und β reelle Werthe von p und q existiren, so müssen die Gleichungen

$$(171)\quad \alpha+\beta v\operatorname{tg}p=\operatorname{tg}p \qquad (172)\quad \beta-\alpha v\operatorname{tg}p=v$$

stets reelle Werthe für p und q, d. h. (da jeder reelle Werth von $\operatorname{tg}p$ auf ein reelles p führt) für $\operatorname{tg}p$ und q liefern. Es ergibt sich aber aus den Gll. (171) und (172) durch Elimination von v, wenn man $\alpha^2+\beta^2$ wiederum durch r^2 bezeichnet,

$$\alpha\operatorname{tg}p^2-(r^2-1)\operatorname{tg}p=\alpha,$$

folglich

$$(173)\qquad \operatorname{tg}p=\frac{r^2-1+((\sqrt{[(r^2-1)^2+4\alpha^2]}))}{2\alpha}.$$

Es existiren sonach, wofern nur α von Null verschieden ist, zwei Werthe für $\operatorname{tg}p$, und zwar, weil $(r^2-1)^2+4\alpha^2$ stets positiv ist, zwei reelle Werthe. Substituirt man dieselben für $\operatorname{tg}p$ in der Gl. (172), so findet man, da $(r^2-1)^2+4\alpha^2=(r^2+1)^2-4\beta^2$ ist,

$$(174)\qquad v=\frac{r^2+1-((\sqrt{[(r^2+1)^2-4\beta^2]}))}{2\beta},$$

so dass, so oft β von Null verschieden ist, jedem der beiden Werthe von $\operatorname{tg}p$ ein reeller Werth von v entspricht.

Ferner gibt die Gl. (170), nachdem man in derselben Zähler und Nenner mit e^q multiplicirt hat,

(175) $$e^{2q} = \frac{1+v}{1-v} = \frac{(1+v)^2}{1-v^2}.$$

Da aber q reell, also e^{2q} positiv sein soll, so lässt sich diese Gleichung nur erfüllen, wenn $v^2 < 1$ ist, und es darf demnach in (174) unter der Wurzel nur der absolute Werth verstanden werden. Es ist nämlich offenbar

$$(r^2+1)^2-4\beta^2 = [(r^2+1)-2\beta]^2-4\beta[2\beta-(r^2+1)];$$

ferner ist, weil $(r^2+1)^2-4\beta^2$ denselben Werth wie $(r^2-1)^2+4\alpha^2$ hat, also positiv ist, $(r^2+1)^2 > 4\beta^2$, und folglich $2\beta-(r^2+1)$ stets negativ. Mithin wird $(r^2+1)^2-4\beta^2 \gtrless [(r^2+1)-2\beta]^2$, d. h. $\sqrt{[(r^2+1)^2-4\beta^2]} \lessgtr (r^2+1)-2\beta$, je nachdem β positiv oder negativ ist; jedenfalls also $2\beta > (r^2+1)-\sqrt{[(r^2+1)^2-4\beta^2]}$, d. h. der Zähler in (174), wenn man den absoluten Wurzelwerth wählt, stets numerisch kleiner als der Nenner, und folglich $v^2 < 1$. Bezeichnet man den zum absoluten Werthe der Wurzel gehörigen Werth von v durch v', den zum negativen Wurzelwerthe gehörigen durch v'', so hekommt man $v'v'' = 1$, also $v'' = \frac{1}{v'}$, und es ist folglich, da v' numerisch kleiner als Eins ist, v'' numerisch grösser als 1, so dass in der That in (173) und (174) für die dort vorkommende Wurzel ausschliesslich der absolute Werth zu nehmen ist.

Da der Zähler des Ausdrucks in (174) hiernach stets positiv ist, so wird v mit β zugleich positiv oder negativ sein.

Aus der Gl. (175) ergibt sich ferner $q = \frac{1}{2} l \left(\frac{1+v}{1-v}\right)$, also, wenn man für v seinen Werth aus (174) substituirt,

$$q = \tfrac{1}{2} l \frac{2\beta+(r^2+1)-\sqrt{[(r^2+1)^2-4\beta^2]}}{2\beta-(r^2+1)+\sqrt{[(r^2+1)^2-4\beta^2]}},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner des Logarithmanden mit $2\beta-(r^2+1)-\sqrt{[(r^2+1)^2-4\beta^2]}$ multiplicirt und reducirt,

$$q = \tfrac{1}{2} l \frac{\sqrt{[(r^2+1)^2-4\beta^2]}}{1+r^2-2\beta} = \tfrac{1}{2} l \frac{\sqrt{[(r^2+1)^2-2\beta]}\sqrt{[(r^2+1)+2\beta]}}{r^2+1-2\beta}$$

$$= \tfrac{1}{2} l \sqrt{\frac{r^2+1+2\beta}{r^2+1-2\beta}} = \tfrac{1}{4} l \frac{1+r^2+2\beta}{1+r^2-2\beta}.$$

Setzt man nun

$$\mathrm{tg}^{-1}\frac{r^2-1+\sqrt{[(r^2-1)^2+4\alpha^2]}}{2\alpha} = w,$$

so hat man $p = n\pi + w$, und folglich

(XXIX) $((\mathrm{tg}^{-1}(\alpha+\beta i))) = p+qi = n\pi+w+\frac{1}{4}i\,\mathrm{l}\,\frac{1+r^2+2\beta}{1+r^2-2\beta}$,

wofern nur sowohl α als β von Null verschieden ist.

Man bemerke beiläufig, dass, weil $\mathrm{tg}\,w$ mit α zugleich positiv und negativ ist, bei positivem α das w zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, bei negativem α zwischen 0 und $-\frac{1}{2}\pi$ liegt, so wie dass der Coefficient von i in dem Werthe von $((\mathrm{tg}^{-1}(\alpha+\beta i)))$ positiv oder negativ ist, je nachdem β einen positiven oder negativen Werth hat.

Es bleibt nun noch der Fall zu erörtern übrig, wo von den Ausdrücken α und β der eine oder der andere gleich Null ist.

Wir gestalten zu dem Ende die Gll. (171) und (172), weil $\mathrm{tg}\,p$ für $\cos p = 0$ keinen Werth hat, in

(176) $\alpha\cos p+\beta v\sin p = \sin p$, $\beta\cos p-\alpha v\sin p = v\cos p$

um, und nehmen

1) an, es sei $\alpha = 0$. Die vorstehenden Gleichungen gehen alsdann über in

(177) $(1-\beta v)\sin p = 0$, (178) $(\beta-v)\cos p = 0$.

Damit die erste dieser Gleichungen erfüllt werde, muss entweder $\sin p = 0$ oder $1-\beta v = 0$ sein. Ist nun zuvörderst $\sin p = 0$, also $p = n\pi$, so liefert die Gl. (178) dazu $v = \beta$, und es wird daher diese Annahme nur passen, wenn $\beta^2 < 1$ ist, weil $v^2 < 1$ sein muss, wenn für q ein reeller Werth möglich werden soll. Demnach hat man, so oft β numerisch kleiner als Eins ist,

(XXIX, a) $((\mathrm{tg}^{-1}\beta i)) = n\pi+\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1+v}{1-v} = n\pi+\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1+\beta}{1-\beta}$.

Ist dagegen $1-\beta v = 0$, so gibt die Gl. (178) entweder $\cos p = 0$ oder $\beta = v$. Verbindet man zuerst die Gleichungen $1-\beta v = 0$ und $\cos p = 0$, so erhält man $p = (2n\pm\frac{1}{2})\pi$, $q = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1+v}{1-v} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{\beta+1}{\beta-1}$, d. h.

(XXIX, b) $((\mathrm{tg}^{-1}\beta i)) = (2n\pm\frac{1}{2})\pi+\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{\beta+1}{\beta-1}$,

welche Formel indess, da $v = \frac{1}{\beta}$ ist und $v^2 < 1$ werden muss, nur gilt, so oft β numerisch grösser als Eins ist.

Verbindet man endlich die Gleichungen $1-\beta v = 0$ und $\beta = v$, so erhält man durch Elimination von β, $1-v^2=0$, also $\beta^2 = v^2 = 1$, und es führt dann die aus (170) gezogene Gl. $e^{2q}-1 = v(e^{2q}+1)$ für $v=1$ auf $-1=+1$, und für $v=-1$ auf $e^{2q}=0$, mithin jedesmal auf eine nicht zu erfüllende Bedingung, und es hat demzufolge $((\mathrm{tg}^{-1}(\alpha+\beta i)))$ in dem vorliegenden Falle, wo $\alpha=0$ und $\beta=\pm 1$ ist, d. h. $((\mathrm{tg}^{-1}\pm i))$, gar keinen Werth.

Nimmt man endlich 2) $\beta=0$ an, so gehen die Gll. (176) über in

$$\alpha \cos p = \sin p \text{ und } v(\cos p + \alpha \sin p) = 0,$$

und lassen sich daher nur befriedigen für $\alpha = \mathrm{tg}\, p$ und $v=0$, so dass, weil für $v=0$, $q=\frac{1}{2}l1 = 0$ ist,

$$((\mathrm{tg}^{-1}\alpha)) = n\pi + \mathrm{tg}^{-1}\alpha.$$

erhalten wird.

§. 276. *Darstellung der Werthe von* $((\cot^{-1}(\alpha+\beta i)))$ *in der Form* $p+qi$. Da nach Gl. (134), wenn man

$$\frac{e^q+e^{-q}}{e^q-e^{-q}} = -\frac{1}{v} \tag{179}$$

setzt, $\cot(qi) = \frac{i}{v}$ wird, so folgt aus der Gl. $((\cot^{-1}(\alpha+\beta i))) = p+qi$,

$$\alpha+\beta i = \cot(p+qi) = \frac{\cot p \cot(qi) - 1}{\cot(qi)+\cot p} = \frac{i\cot p - v}{i + v\cot p},$$

also
$$(\alpha+\beta i)(i+v\cot p) = i\cot p - v,$$
d. h.
$$(\alpha+\beta v\cot p)i - (\beta - \alpha v \cot p) = i\cot p - v.$$

Es muss daher, wenn p und q reell sein sollen,

$$\alpha+\beta v\cot p = \cot p \text{ und } \beta - \alpha v\cot p = v$$

sein. Da aber diese Gleichungen mit den Gll. (171) und (172) in §. 275 übereinstimmen, wenn man $\cot p$ mit $\mathrm{tg}\, p$ vertauscht, so müssen die im vorigen §. für p und v gefundenen Werthe, wenn man nur in ihnen überall cot für tg schreibt, auch den vorstehenden Gleichungen genügen. Da ferner die Gl. (179)

$$e^{2q} = \frac{1-v}{1+v} = \frac{(1-v)^2}{1-v^2}$$

liefert, also $v^2 < 1$ werden muss, wenn q reell sein soll, so gelten auch hier, wie dort von den in den Werthen von $\cot p$ und v vorkommenden Wurzeln nur die absoluten Werthe, und man hat daher, weil aus

$$e^{2q} = \frac{1-v}{1+v},\ q = \frac{1}{2}l\frac{1-v}{1+v} = -\frac{1}{2}l\frac{1+v}{1-v}$$

folgt, wenn man

$$\cot^{-1}\frac{r^2-1+\sqrt{[(r^2-1)^2+4\alpha^2]}}{2\alpha}=w'$$

setzt,

$$\text{(XXX)}\qquad ((\cot^{-1}(\alpha+\beta i)))=n\pi+w'-\tfrac{1}{4}\,l\,\frac{1+r^2+2\beta}{1+r^2-2\beta},$$

so oft α und β von Null verschieden sind. Ferner hat man (weil das $\cos p$ und $\sin p$ des vorigen §. hier resp. durch $\sin p$ und $\cos p$ vertreten werden muss)

für $\beta^2<1$, $\quad$ (XXX, a) $((\cot^{-1}\beta i))=(n\pm\tfrac{1}{2})\pi-\tfrac{1}{2}\,l\,\dfrac{1+\beta}{1-\beta}$;

für $\beta^2>1$, $\quad$ (XXX, b) $((\cot^{-1}\beta i))=n\pi-\tfrac{1}{2}\,l\,\dfrac{\beta-1}{\beta+1}$,

und endlich für $\beta=0$

$$((\cot^{-1}\alpha))=n\pi+\cot^{-1}\alpha,$$

während $((\cot^{-1}i))$ und $((\cot^{-1}-i))$ wiederum werthlos sind.

§. 277. *Von den Summen und Differenzen indirekter Kreisfunktionen.* 1. Aus den Gll. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta$ und $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\,\cos\beta-\cos\alpha\,\sin\beta$ folgt

$$\text{(180)}\qquad \begin{aligned}\alpha+\beta&=((\sin^{-1}[\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta]))\\ \alpha-\beta&=((\sin^{-1}[\sin\alpha\,\cos\beta-\cos\alpha\,\sin\beta])).\end{aligned}$$

Setzt man hierin $\sin\alpha=x$, $\sin\beta=y$, und mithin $\cos\alpha=((\sqrt{(1-x^2)}))$ $\cos\beta=((\sqrt{(1-y^2)}))$, so erhält man, wenn man den Werth von $((\sin^{-1}x))$, welcher gleich α ist, durch $(\sin^{-1}x)$, den Werth von $((\sin^{-1}y))$, welcher gleich β ist, durch $(\sin^{-1}y)$ bezeichnet,

$$\text{(181)}\qquad \begin{aligned}(\sin^{-1}x)+(\sin^{-1}y)&=(\sin^{-1}[x(\sqrt{(1-y^2)})+y\;(\sqrt{(1-x^2)})])\\ (\sin^{-1}x)-(\sin^{-1}y)&=(\sin^{-1}[x(\sqrt{(1-y^2)})-y\;(\sqrt{(1-x^2)})]),\end{aligned}$$

wo die Bogenausdrücke auf der rechten Seite gleichfalls einfach eingeklammert sind, um anzudeuten, dass nur e i n Werth der vollständigen (doppelt einzuklammernden) Bogenausdrücke darunter gedacht werden soll, und wo $(\sqrt{(1-x^2)})$ und $(\sqrt{(1-y^2)})$ nur resp. einen der beiden Werthe von $((\sqrt{(1-x^2)}))$ und $((\sqrt{(1-y^2)}))$ vorstellen. Sind α und β reell, so ist für $(\sqrt{(1-x^2)})$, $\sqrt{(1-x^2)}$ oder $-\sqrt{(1-x^2)}$ zu nehmen, je nachdem $\cos\alpha$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem $\cos^{-1}x$ zwischen 0 und $\tfrac{1}{2}\pi$ oder zwischen $\tfrac{1}{2}\pi$ und π liegt; und für $(\sqrt{(1-y^2)})$ der Werth $\sqrt{(1-y^2)}$ oder der

Werth $-\sqrt{(1-y^2)}$, je nachdem $\cos^{-1}y$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ oder zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegt.

Beachtet man, dass der Ausdruck auf der rechten Seite der Gll. (181) dieselben Aenderungen erfährt, wenn man die Wurzeln zweideutig nimmt, als wenn man x und y resp. durch $\pm x$ und $\pm y$ ersetzt, so erkennt man noch die vollkommene Richtigkeit der Gleichung

(182) $(\sin^{-1}\pm x)+(\sin^{-1}\pm y)=(\sin^{-1}[x((\sqrt{(1-y^2)}))+y((\sqrt{(1-x^2)}))])$,

welche überdies, wegen $-(\sin^{-1}y)=(\sin^{-1}-y)$, die zweite der Gll. (181) in sich schliesst.

Es lehrt dieselbe, wenn man der Kürze wegen den Ausdruck $x((\sqrt{(1-y^2)}))+y((\sqrt{(1-x^2)}))$ durch z bezeichnet, dass jeder Werth von $((\sin^{-1}\pm x))+((\sin^{-1}\pm y))$ einem Werthe von $((\sin^{-1}z))$ gleich ist. Aber auch umgekehrt ist jeder Werth von $((\sin^{-1}z))$ zugleich ein Werth von $((\sin^{-1}\pm x))+((\sin^{-1}\pm y))$, d. h. es ist die Gleichung

(XXXI) $((\sin^{-1}\pm x))+((\sin^{-1}\pm y))=((\sin^{-1}[x((\sqrt{(1-y^2)}))+y((\sqrt{(1-x^2)}))]))$

eine vollkommene. Denn alle Werthe von $((\sin^{-1}z))$ sind enthalten in den Formeln $2n\pi+(\sin^{-1}z)$ und $(2n+1)\pi-(\sin^{-1}z)$, und für die erste Gruppe dieser Werthe erhält man aus (182), indem man jederseits $2n\pi$ addirt,

$$[2n\pi+(\sin^{-1}\pm x)]+(\sin^{-1}\pm y)=2n\pi+(\sin^{-1}z),$$

und für die andere Gruppe, indem man jede Seite der Gl. (182) von $(2n+1)\pi$ subtrahirt, und bemerkt, dass $-(\sin^{-1}\pm y)=+(\sin^{-1}\mp y)$ ist,

$$[(2n+1)\pi-(\sin^{-1}\pm x)]+(\sin^{-1}\pm y)=(2n+1)\pi-(\sin^{-1}z),$$

so dass in der That, weil die Summen $2n\pi+(\sin^{-1}\pm x)$ und $(2n+1)\pi-(\sin^{-1}\pm x)$ in $((\sin^{-1}\pm x))$ zusammengefasst werden können, schon

$$((\sin^{-1}\pm x))+(\sin^{-1}\pm y)=((\sin^{-1}z))$$

eine vollkommene Gleichung darstellt. Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung gewinnt durchaus keine neue Werthe, wenn man noch $((\sin^{-1}\pm y))$ für $(\sin^{-1}\pm y)$ schreibt, weil dieselbe gültig ist, welchen Werth von $((\sin^{-1}\pm y))$ man auch unter $(\sin^{-1}\pm y)$ denken mag, d. h. es ist auch die Gl. (XXXI) eine vollkommene.

2. Aus der Gleichung $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ folgt

$$\alpha+\beta=((\cos^{-1}[\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta])),$$

und hieraus, wenn man $\cos\alpha=x$, $\cos\beta=y$ und demgemäss für

$\sin\alpha$ und $\sin\beta$ resp. einen der Werthe von $((\sqrt{(1-x^2)}))$ und $((\sqrt{(1-y^2)}))$ setzt,

(183) $(\cos^{-1}x)+(\cos^{-1}y)=(\cos^{-1}[xy-(\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)})])$,

wo die einfachen Klammern um die Bogenausdrücke wiederum anzeigen sollen, dass ein völlig bestimmter Bogen darunter zu verstehen sei, und ebenso $(\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)})$ einem bestimmten der beiden Werthe von $((\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)}))$ entspricht. Sind $\cos^{-1}x$ und $\cos^{-1}y$ reell, so ist für $(\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)})$ der positive oder negative Werth zu nehmen, je nachdem das gleichgeltende Produkt $\sin\alpha\sin\beta$ positiv oder negativ ist, d. h. der positive Werth, wenn $\sin^{-1}x$ und $\sin^{-1}y$ gleichzeitig zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ oder zwischen 0 und $-\frac{1}{2}\pi$ liegen; der negative Werth, wenn der eine dieser Bogen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, der andere zwischen 0 und $-\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Eben so erhält man aus $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$, unter denselben Umständen denselben Werth für $(\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)})$ nehmend,

(184) $(\cos^{-1}x)-(\cos^{-1}y)=(\cos^{-1}[xy+(\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)})])$.

Die Gl. (183) sagt aus, dass jeder Werth von $((\cos^{-1}x))+((\cos^{-1}y))$ einem Werthe von $((\cos^{-1}z))$ gleich sei — unter z den Ausdruck $xy-((\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)}))$ verstanden. Es ist aber auch umgekehrt jeder Werth von $((\cos^{-1}z))$ zugleich ein Werth von $((\cos^{-1}x))+((\cos^{-1}y))$, d. h. es ist

(XXXII) $((\cos^{-1}x))+((\cos^{-1}y))=((\cos^{-1}[xy-((\sqrt{[1-x^2]}\sqrt{[1-y^2]}))]))$

eine vollkommene Gleichung. Denn alle Werthe von $((\cos^{-1}z))$ sind enthalten in den Formeln $2n\pi+(\cos^{-1}z)$ und $2n\pi-(\cos^{-1}z)$, und für die erste Gruppe dieser Werthe erhält man aus (183), indem man jederseits $2n\pi$ addirt,

$$[2n\pi+(\cos^{-1}x)]+(\cos^{-1}y)=2n\pi+(\cos^{-1}z),$$

und für die zweite Gruppe, indem man jede Seite der Gl. (183) von $2n\pi$ subtrahirt, dabei aber lieber auf der Linken $n'+n''$ statt n setzt,

$$[2n'\pi-(\cos^{-1}x)]+[2n''\pi-(\cos^{-1}y)]=2n\pi-(\cos^{-1}z).$$

Bemerkt man nun, dass $2n\pi+(\cos^{-1}x)$ und $2n'\pi-(\cos^{-1}x)$ stets Werthe von $((\cos^{-1}x))$, und $2n''\pi-(\cos^{-1}y)$ Werthe von $((\cos^{-1}y))$ sind, so sieht man in der That die Gl. (XXXII) gerechtfertigt.

3. Aus der Gleichung $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ folgt

$$\alpha+\beta=\left(\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right)\right),$$

oder, wenn man $\operatorname{tg}\alpha=x$, $\operatorname{tg}\beta=y$ setzt,

$$(\operatorname{tg}^{-1}x)+(\operatorname{tg}^{-1}y)=\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{x+y}{1-xy}\right),$$

und demnach auch, wegen $((\operatorname{tg}^{-1}x))=n\pi+(\operatorname{tg}^{-1}x)$,

(XXXIII) $$((\operatorname{tg}^{-1}x))+((\operatorname{tg}^{-1}y))=\left(\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{x+y}{1-xy}\right)\right).$$

Eben so findet sich, wenn man $-y$ statt y setzt,

$$((\operatorname{tg}^{-1}x))-((\operatorname{tg}^{-1}y))=\left(\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{x-y}{1+xy}\right)\right).$$

Fünfter Abschnitt.

Von der Entwickelbarkeit der Funktionen in Reihen, die nach Potenzen ihres Veränderlichen fortschreiten.

§. 278. *Von der Zusammensetzung der Funktionen und den einfachen Funktionen.* Bemerkt man, dass jeder Quotient $A:B$ sich in das Produkt $A.B^{-1}$, jede Wurzel $\sqrt[a]{B}$ sich in die Potenz $B^{\frac{1}{a}}$ umformen lässt, so dass man, diese Umformungen überall vorgenommen denkend, sich überheben kann, von Quotienten und Wurzeln besonders zu sprechen; bemerkt man ferner, dass nicht bloss Potenzen und Logarithmen, sondern auch algebraische Summen und Produkte jederzeit zunächst nur zwei Bestandtheile haben *): so sieht man sich berechtigt, folgendes Allgemeine über den Bau der Funktionen auszusagen.

Jeder noch so zusammengesetzte Ausdruck, zu dessen Bildung keine anderen, als die bisher betrachteten Verbindungsweisen benutzt worden sind, besteht zuvörderst aus zwei Bestandtheilen, und zwar sind dieselben nur entweder zu einer algebraischen Summe, zu einem Produkte, zu einer Potenz oder zu einem Logarithmen mit einander verbunden. Jeder dieser nächsten Bestandtheile, sofern er nicht ein unzusammengesetzter Ausdruck ist, bildet seinerseits wiederum eine algebraische Summe, ein Produkt, eine Potenz oder einen Logarithmus, bestehend aus zwei einfacheren Theilen; diese Theile, so weit sie nicht unzusammengesetzt sind,

*) Bei unendlichen Reihen wird es bequem, das erste Glied als ersten Bestandtheil, den Rest der Reihe als den zweiten anzusehen.

sind wiederum ebenso, nur aus noch einfacheren Bestandtheilen zusammengesetzt, etc., so dass man, wofern der gegebene Ausdruck ein geschlossener, d. h. keine unendliche Reihe war, durch fortgesetzte Zerlegung zuletzt auf Verbindungen kommen muss, die sämmtlich aus zwei durch einfache Zeichen vorgestellten Theilen bestehen, die unter sich algebraische Summen, Produkte, Potenzen oder Logarithmen bilden *).

Ist der gegebene Ausdruck eine Funktion von x, so werden wir in der Folge bei den vorzunehmenden Zergliederungen die Zerlegung nur so weit fortgesetzt denken, bis man auf Verbindungen kommt, in denen der eine Bestandtheil das x selber, der andere ein von x unabhängiger, sonst aber beliebig zusammengesetzter Ausdruck ist, oder eventuell auf Verbindungen, in welchen jeder der beiden Bestandtheile das x selbst ist. Die äussersten Verbindungen, auf welche man dabei gelangt, heissen einfache Funktionen von x, und lassen sich in folgenden vier Formen zusammenfassen, in denen m, a und α von x unabhängige Ausdrücke bezeichnen:

(185) $$m+ax^{\alpha},\; a^{x},\; x^{x},\; \log x.$$

Specialisirt sind nämlich die einfachen Funktionen folgende:

$$m\pm x,\; ax,\; x^{\alpha},\; a^{x},\; \log_{a} x;\; x\pm x,\; xx,\; x^{x},\; \log_{x} x,$$

und von diesen sind in $m+ax^{\alpha}$ enthalten: $m\pm x$ (indem man $a=\pm 1$, $\alpha=1$ denkt), ax (indem man $m=0$ und $\alpha=1$ denkt), x^{α} (indem man $m=0$ und $a=1$ denkt), während $x+x$, $x-x$ und xx

*) Es ist z. B. $\cos x$, als abgekürztes Zeichen für den geschlossenen Ausdruck $2^{-1}(e^{xi}+e^{-xi})$, ein Produkt aus den beiden Faktoren 2^{-1} und $e^{xi}+e^{-xi}$. Der erste dieser Faktoren ist eine aus 2 und -1 zusammengesetzte Potenz, während —1, d. h. 0—1, eine Differenz aus den einfachen Zeichen 0 und 1 ist. Der zweite Faktor $e^{xi}+e^{-xi}$ ist seinerseits eine Summe, deren nächste (zwei) Bestandtheile e^{xi} und e^{-xi} sind, etc.

Wir führen hier beiläufig an, dass Obiges nicht bloss für die Ausdrücke der niederen Analysis gilt, sondern auch, wenn auch zum Theil nur indirekt, für die Ausdrücke der höheren Analysis, da dieselben stets nur in soweit betrachtet werden, als ihre Werthe, sei es in ihrer Gesammtheit oder parthieenweise, gleichfalls durch blosse algebraische Additionen, Multiplikationen, Potenzirungen und Logarithmationen entstanden gedacht werden können.

als gleichbedeutend mit $2x$, 0 und x^2 nicht zu derselben Funktionsart gehörig, und $\log_a x$ und $\log_x x$ als gleichbedeutend mit $\frac{\log x}{la}$ und $\frac{\log x}{lx}$ zu den zusammengesetzten Funktionen gezählt werden mögen. Die Ausdrücke $\cos x$ und $\sin x$, obwohl wegen ihrer einfachen Bezeichnungsweise zuweilen zu den einfachen Funktionen gestellt, müssen wir als Abkürzungszeichen für $\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}$ und $\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$ gleichfalls zu den zusammengesetzten Funktionen rechnen.

Bemerkt man, dass $m+ax^\alpha=mx^0+ax^\alpha$ ist, und mx^0+ax^α als zusammengesetzt aus den einfachen Funktionen mx^0 und ax^α betrachtet werden kann, so wird es auch erlaubt sein, die obige Form $m+ax^\alpha$ bei späteren Untersuchungen durch ax^α zu ersetzen.

§. 279. *Normale Entwickelungen und normale Funktionen.* Wir werden eine Funktion von x „nach x“ oder „nach Potenzen von x“ entwickelbar nennen, wenn sie sich in eine Reihe umgestalten lässt, welche nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitet, und diese Reihe selbst dann als die „nach Potenzen von x geordnete Entwickelung der Funktion“ oder, wo kein Missverständniss zu befürchten ist, schlechthin als die „Entwickelung der Funktion“ bezeichnen, ohne damit indess sagen zu wollen, dass auch ihr Werth überall mit dem der Funktion übereinstimme.

Demnach nennen wir z. B. die logarithmische Reihe die Entwickelung von $\log(1+x)$, und die binomische Reihe die Entwickelung von $(1+x)^n$, obwohl eine Uebereinstimmung in den Werthen nicht vorhanden ist, wenn der Modulus von x die Einheit übertrifft.

Man beachte ferner, dass man sehr wohl fragen darf, ob nicht, wenn bei der Umgestaltung einer Funktion in eine Reihe die logarithmische oder binomische Reihe wiederholt angewendet wird, wegen der beschränkten Anwendbarkeit dieser Reihen die Uebereinstimmung in den Werthen ganz verloren gehen könne. Auch ist es möglich, dass durch eine Aenderung in der Anordnung der Glieder, wie sie für das Ordnen nach Potenzen des Veränderlichen erfordert werden kann, eine unendliche Reihe, welche ursprünglich den Werth einer bestimmten Funktion hatte, ihre Convergenz einbüsst, und

somit aufhört, mit dieser Funktion gleichen Werth zu haben. Ist daher für eine Funktion eine Entwickelung in Form einer unendlichen Reihe gefunden, so wird es im Allgemeinen immer noch der Untersuchung bedürfen, ob durch die dabei vorgenommenen Form-Umwandlungen die Gleichheit der Werthe nicht gestört worden sei.

Enthält die Funktion in ihren Bestandtheilen einen Ausdruck u, in welchem ausschliesslich das x vorkommt, so ist es oft bequem, dieselbe zuerst nach Potenzen von u zu entwickeln, darauf an den Gliedern der entstehenden Reihe einzeln die Entwickelung nach Potenzen von x vorzunehmen, und endlich die Glieder der Gesammtreihe nach Potenzen von x anzuordnen.

Bezeichnet dabei A die Funktion, U ihre Entwickelung nach u, und X die Entwickelung von U nach Potenzen von x, so hat man zu untersuchen, unter welchen Umständen $U = A$ sei, und hierauf, wann $U = X$ sein werde, um zu erkennen, ob und wann die Funktion A ihrer Entwickelung X gleich sei.

Hat die Entwickelung einer Funktion mit dieser unbedingt, oder doch zwischen bestimmten endlichen Grenzwerthen von x, gleichen Werth, und ist im letzten Falle dabei der Werth Null zwischen den Grenzwerthen mitenthalten, so nennen wir Entwickelung und Funktion n o r m a l.

Von den einfachen Funktionen (185) ist hiernach die erste eine normale (und fällt mit ihrer Entwickelung zusammen), so oft α eine positive ganze Zahl ist, ferner a^x, so oft a von Null verschieden ist; dagegen sind x^x und $\log x$ n i c h t - n o r m a l e Funktionen.

§. 280. *Erklärung.* Stellt X eine Reihe vor, welche nach Potenzen von x fortschreitet, und α eine absolute Zahl, so sagen wir „α sei die Grenze der Convergenz für die Reihe X", wenn α der grösste Modulus von x ist, für welchen noch Convergenz statt findet; wir sagen „die Reihe X convergire bis zu $x = \alpha$", wenn die Convergenz bewahrt bleibt, so lange der Modulus von x kleiner als α ist, ohne aber damit gerade die Möglichkeit zu verneinen, dass die Convergenz für Mod. $x = 1$ bestehen bleibe.

Der Inhalt des ersten Zusatzes zu §. 176 lässt sich hiernach nunmehr so ausdrücken: Ist α die Grenze der Convergenz für eine Reihe, so convergirt dieselbe bis zu $x = \alpha$ unabhängig von

den Gliederzeichen. Und ist α die Grenze der Convergenz für die Reihen A und B, so convergirt die Entwickelung des Produkts AB bis zu $x=\alpha$.

§. 281. *Entwickelung algebraischer Summen normaler Funktionen.* Stellen A und A_1 normale Funktionen von x, und X und X_1 deren nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Entwickelungen vor; behalten ferner die Reihen X und X_1 den Werth von A und A_1, so lange sie convergiren: so ist auch $A \pm A_1 = X \pm X_1$ für jeden Werth von x, für welchen X und X_1 gleichzeitig convergent sind. Andrerseits ist nach §. 175 für eben diese Werthe von x, unter anderen also auch für $x=0$, die nach Potenzen von x geordnete Entwickelung von $X \pm X_1$ convergent, und an Werth der algebraischen Summe $X \pm X_1$ gleich; mithin ist diese Entwickelung innerhalb derselben Grenzen auch gleich $A \pm A_1$, d. h. es ist $A \pm A_1$ eine normale Funktion.

§. 282. *Entwickelung der Produkte normaler Funktionen.* Sind wiederum A und A_1 normale Funktionen von x, und X und X_1 die normalen Entwickelungen derselben, so erhält man, wenn

$$X = a + a_1 x + a_2 x^2 + \text{ etc.}, \quad X_1 = b + b_1 x + b_2 x^2 + \text{ etc.}$$

ist, und k_n den Coefficienten von x^n in der nach Potenzen von x geordneten Entwickelung des Produkts XX_1 vorstellt,

$$k_n = ab_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots\ldots + a_n b. \tag{186}$$

Es hat also, da den Coefficienten der Reihen X und X_1 als Coefficienten gültiger Entwickelungen von A und A_1 immer eine Bedeutung zukommen muss, k_n als Summe von Produkten nichtwerthloser Ausdrücke immer einen Werth, und die Entwickelung von XX_1, oder, was hier dasselbe ist, von AA_1 ist somit immer eine gültige. Ferner wissen wir aus §. 176, dass diese Entwickelung convergirt, so oft X und X_1 gleichzeitig unabhängig von den Gliederzeichen convergent sind, und alsdann einerlei Werth mit XX_1 hat. Da nun, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, und namentlich auch für $x=0$, $XX_1 = AA_1$ ist, so ist das Produkt AA_1 stets eine normale Funktion. Stellen also α und α_1 die Convergenzgrenzen für X und X_1 vor, und behalten diese Reihen innerhalb dieser Grenzen den Werth von A und A_1, so findet, wenn z. B. $\alpha < \alpha_1$ ist, Convergenz und Werth-Uebereinstimmung zwischen AA_1 und seiner Entwickelung mindestens bis zu $x=\alpha$ statt.

§. 283. *Entwickelung solcher Potenzen normaler Funktionen von x, in denen der Exponent unabhängig von x ist.* Jede Potenz einer normalen Funktion von x, deren Exponent nicht von x abhängt, ist unbedingt wiederum eine normale Funktion, wenn der Exponent eine ganze Zahl ist; wenn derselbe keine ganze Zahl ist, dagegen nur dann unbedingt, wenn der Dignand nicht mit x zugleich verschwindet. Im ersten Falle convergirt die normale Entwickelung der Potenz, so oft der Dignand unabhängig von den Gliederzeichen convergirt; im zweiten Falle hingegen bis zu $x = \alpha_1$, wenn α_1 den kleinsten Modulus derjenigen Werthe von x bezeichnet, für welche das Quadrat des Modulus des Dignanden doppelt so gross wird, wie in dem Falle, wo $x = 0$ ist.

Beweis. Ist A eine normale Funktion von x, und m eine absolute ganze Zahl, so ist die Potenz A^m mit einem Produkte normaler Funktionen gleichbedeutend und folglich dem vorigen §. gemäss unbedingt einer normalen Entwickelung fähig. Stellt ferner x die Grenze der Convergenz für die (normale) Entwickelung von A vor, so folgt überdies aus dem vorigen §., dass die Entwickelung von A^m bis zu $x = \alpha$ convergiren werde.

Ist m keine absolute ganze Zahl, so unterscheide man den Fall, wo A mit x zugleich verschwindet, von dem Falle, wo A für $x = 0$ einen von Null verschiedenen Werth behält.

Hat 1) A für $x = 0$ einen von Null verschiedenen Werth a, und stellt X die Entwickelung von A vor (deren erstes Glied dieses a sein wird), so kann man

$$X = a(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \text{ in inf.})$$

setzen und erhält, die Reihe $a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ in inf. durch u bezeichnend, nach §. 257 für jeden Werth von u, dessen Modulus kleiner als Eins ist,

$$X^m = a^m(1+u)^m = a^m[1 + {}^1mu + {}^2mu^2 + {}^3mu^3 + \ldots \text{ in inf.}],$$

oder $\quad 1 + {}^1mu + {}^2mu^2 + {}^3mu^3 + \ldots \text{ in inf.} = U$

setzend, $\quad X^m = a^m U.$

Bezeichnet nun α die Grenze der Convergenz für die Reihe X und mithin auch für die Reihe u, so convergiren die Entwickelungen von u^2, u^3, u^4, etc. nach dem Vorgehenden für jeden Werth von x, dessen Modulus kleiner als α ist, und der zugleich

den Modulus von u kleiner als Eins macht *). Bleibt ferner der Modulus von u kleiner als Eins bis zu $x = \alpha_1$, so ist offenbar $\alpha_1 < \alpha$, weil die Reihe X sicher convergirt, wenn der mit x sich allein ändernde Theil u derselben den Werth Eins nicht übersteigt.

Sonach darf man in der Gleichung $X^m = a^m U$, ohne deren bis zu $x = \alpha_1$ gehende Richtigkeit zu beeinträchtigen, für u^2, u^3, u^4, etc. ihre nach Potenzen von x fortschreitenden Entwickelungen substituiren. Dass α_1 nie unendlich klein, also das Bestehenbleiben der Gleichung $A^m = a^m U$ nach ausgeführter Substitution nicht illusorisch werden kann, erkennt man, wie folgt.

Sind die Coefficienten von X reell, bedeuten ferner $(a)_1$, $(a)_2$, $(a)_3$, etc. die numerischen Werthe von a_1, a_2, a_3, etc. und stellt v die Hälfte des kleinsten der Werthe von

$$\frac{1}{(a)_1}, \quad \frac{(a)_1}{(a)_2}, \quad \frac{(a)_2}{(a)_3}, \quad \frac{(a)_3}{(a)_4}, \quad \text{etc.}$$

oder von

$$\frac{1}{(a)_1}, \quad \frac{1}{\sqrt{(a)_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{(a)_3}}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{(a)_4}}, \quad \text{etc.}$$

vor, so ist nach §. 169 für jeden Werth von x, der numerisch kleiner als v ist, das erste Glied der Reihe X numerisch kleiner als die Summe aller folgenden Glieder und mithin $1 < u^2$. Es wird also in diesem Falle $\alpha_1 \gtreqless v$ werden **).

*) Nach dem Vorhergehenden convergiren zwar die Entwickelungen aller ganzen Potenzen von u bis zu $x = \alpha$, — aber nur unter der Voraussetzung, dass diese ganzen Potenzen selber endliche Werthe haben; und diese Voraussetzung nöthigt, die Bedingung hinzuzufügen, dass die Werthe von x nicht über die Grenze hinausgehen dürfen, bei welcher Mod. $u = 1$ wird.

Denken wir z. B. die Coefficienten der Reihe X als reell, und dem x einen reellen Werth beigelegt, der numerisch kleiner als α ist, aber $u^2 > 1$ macht, so sind zwar die nach Potenzen von x geordneten Entwickelungen von u^2, u^3, u^4, etc. noch sämmtlich resp. gleich u^2, u^3, u^4, etc., aber es sind dieselben nicht mehr durchweg convergente Reihen, da für $u^2 > 1$ und ein wachsendes n der Werth von u^n, und mithin auch der Werth der mit u^n identischen Entwickelung, über jeden noch so grossen Werth hinaus wächst.

**) Ist z. B. $A = e^x$, also $X = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ etc.,

Sind die Coefficienten von X imaginär, und bedeuten $(a)_1$, $(a)_2$, $(a)_3$, etc. die Moduli von a_1, a_2, a_3, etc. und δ_1, δ_2, δ_3, etc. die zugehörigen Argumente, so hat man für ein positives x

$$\begin{aligned}(\text{Mod. } u)^2 &= [(a)_1 \cos\delta_1 x + (a)_2 \cos\delta_2 x^2 + (a)_3 \cos\delta_3 x^3 + \ldots]^2 \\ &\quad + [(a)_1 \sin\delta_1 x + (a)_2 \sin\delta_2 x^2 + (a)_3 \sin\delta_3 x^3 + \ldots]^2 \\ &= (a)_1{}^2 x^2 + (a)_2{}^2 x^4 + (a)_3{}^2 x^6 + \ldots + 2(a)_1(a)_2 x^3 \cos(\delta_1 - \delta_2) \\ &\quad + 2(a)_1(a)_3 x^4 \cos(\delta_1 - \delta_3) + \ldots + 2(a)_2(a)_3 x^5 \cos(\delta_2 - \delta_3) \\ &\quad + 2(a)_2(a)_4 x^6 \cos(\delta_2 - \delta_4) + \text{ etc.},\end{aligned}$$

folglich

$$(\text{Mod. } u)^2 < [(a)_1 x + (a)_2 x^2 + (a)_3 x^3 + \ldots \text{ in inf.}]^2.$$

Wird daher wiederum unter v die Hälfte des kleinsten der oben angegebenen Quotienten gedacht (das $(a)_1$, $(a)_2$, $(a)_3$, etc., jedoch in der jetzigen Bedeutung genommen), so wird offenbar Mod. $u < 1$, sobald man $x < v$ wählt.

Ist ferner x negativ oder imaginär, und stellt man Modulus und Argument von x resp. durch r und γ vor, so erhält man den Werth von $(\text{Mod. } u)^2$ aus dem obigen für positive x geltenden Werthe, wenn man x durch r, und δ_1, δ_2, δ_3, etc. resp. durch $\delta_1 + \gamma$, $\delta_2 + 2\gamma$, $\delta_3 + 3\gamma$, etc. ersetzt, und findet demnach

$$(\text{Mod. } u)^2 < [(a)_1 r + (a)_2 r^2 + (a)_3 r^3 + \ldots \text{ in inf.}]^2,$$

so dass nothwendig Mod. $u < 1$ werden muss, sobald $r < v$ gewählt wird.

Da nun u für alle zwischen 0 und α liegende Werthe von x convergirt, so kann (nach §. 169) v, und folglich auch α_1 in der That nie unendlich klein werden.

so ist der kleinste der obigen Quotienten gleich Eins, also $v = \frac{1}{2}$, und mithin wegen $\alpha = \infty$ keinenfalls α_1 kleiner als $\frac{1}{2}$. In der That wird auch für $x = \frac{1}{2}$, $A = \sqrt{e}$, also $X < 2$, d. h. das erste Glied von X grösser als die Summe aller folgenden Glieder.

Da α die Grenze ist, welcher sich der Werth von $\frac{(a)_n}{(a)_{n+1}}$ mit zunehmendem n nähert, so wird, wenn der Werth dieses Quotienten mit wachsendem n fortwährend abnimmt, $v = \frac{1}{2}\alpha$ sein. Für $A = \log(1+x)$ wird demnach z. B, weil in der logarithmischen Reihe jener Quotient allmälig abnehmend der Grenze Eins zugeht, $v = \frac{1}{2}$ werden. — Wächst dagegen $\frac{(a)_n}{(a)_{n+1}}$ mit n zugleich (wie z. B. bei $A = a^x$), so wird $v = \frac{1}{2(a)_1}$.

Hat man in $a^m U$ für u, u^2, u^3, etc. ihre Entwickelungen gesetzt, so hat das Ordnen nach Potenzen von x keine Schwierigkeiten mehr, und es wird das Vorhandensein einer normalen Entwickelung für A ausser Zweifel sein, sobald sich findet, dass durch diese Anordnung der Glieder weder die Coefficienten werthlos werden können, noch — wenigstens zwischen bestimmten die Null mitumfassenden Grenzwerthen von x — eine Aenderung im Werthe hervorgebracht wird.

Nennt man aber k_n den Coefficienten von x^n in der Entwickelung von U, und bedeuten a_n'', a_n''', a_n^{IV}, etc. die Coefficienten von x^n in den Entwickelungen von u^2, u^3, u^4, etc., so hat man

$$(187)\quad k_n = {}^1m a_n + {}^2m a_n'' + {}^3m a_n''' + \ldots {}^{n-1}m a_n^{(n-1)} + {}^n m a_n^{(n)},$$

und es ist also ersichtlich, da a_n, a_n'', a_n''', etc. nach dem Früheren nie werthlos sein können, dass die Coefficienten der Entwickelung von $a^m U$, und mithin von A^m, stets eine Bedeutung behalten.

Was den Werth dieser Entwickelung betrifft, so setze man einstweilen voraus, es seien die Coefficienten von X reell, und verstehe unter k_n' den numerischen Werth von k_n, unter p_1, p_2, p_3, etc. die numerischen Werthe von ${}^1m$, ${}^2m$, ${}^3m$, etc. und unter b_n, b_n'', b_n''', etc. die numerischen Werthe von a_n, a_n'', a_n''', etc. Alsdann ist

$$k_n' \overline{\lessgtr} p_1 b_n + p_2 b_n' + p_3 b_n'' + \ldots p_{n-1} b_n^{(n-1)} + p_n b_n^{(n)},$$

und, wenn man unter β sich einen schicklichen Mittelwerth von b_n, b_n'', b_n''', etc. denkt,

$$k_n' \overline{\lessgtr} \beta(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_{n-1} + p_n).$$

Man erhält daher, da $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n$ für wachsende Werthe von n nichts anderes ist, als die in §. 258 durch (B) bezeichnete Reihe, für zunehmende Werthe von n

$$k_n' = \overline{\lessgtr}\, \beta(B),$$

und folglich $\sqrt[n]{k_n'} \overline{\lessgtr} \sqrt[n]{\beta} \sqrt[n]{(B)}$.

Da ferner die Convergenz der Entwickelung davon abhängt, dass $\sqrt[n]{k_n'}$ für ein ins Unbestimmte wachsendes n einen endlichen Werth behalte, indem, wenn $\lim \sqrt[n]{k_n'} = g$ sich findet, dieselbe

nach §. 166 bis zu $x=\frac{1}{g}$ convergirt: so bleibt nur noch zu untersuchen, ob $\sqrt[n]{\beta}$ und $\sqrt[n]{(B)}$ bei wachsendem n einer endlichen Grenze sich nähern werden.

Dass $\lim\sqrt[n]{\beta}$ endlich ist, folgt daraus, dass die nte Wurzel aus keinem der Werthe von b_n, b_n'', b_n''', ... $b_n^{(n)}$ für ein wachsendes n unendlich gross werden kann. Denn b_n ist der numerische Werth von a_1^n, folglich ist $\sqrt[n]{b_n}$ dem numerischen Werthe von a_1 gleich, und b_n'', b_n''', ... $b_n^{(n)}$ sind die numerischen Werthe der Coefficienten von x^n in den bis zu $x=a_1$ convergirenden Entwickelungen von u^2, u^3, ... u^n, deren nte Wurzeln nach §. 166 sich mit wachsendem n der Grenze $\frac{1}{a_1}$ nähern. Man darf mithin $\lim\sqrt[n]{\beta}=\frac{1}{a_1}$ setzen.

Hinsichtlich der Grenze von $\sqrt[n]{(B)}$ bemerke man, dass nach §. 258 die Reihe (B) für positive Werthe von m convergirt, also von endlichem Werthe ist, und daher in diesem Falle $\lim\sqrt[n]{(B)}=1$ sein muss.

Ist m negativ und kleiner als -1, so setze man, wie in §. 258

$$\frac{\mathfrak{m}-m-1}{\mathfrak{m}}=1-\frac{m+1}{\mathfrak{m}}=r_{\mathfrak{m}},$$

also
$$p_{\mathfrak{m}}=r_1\,.\,r_2\,.\,r_3\ldots r_{\mathfrak{m}},$$

und nenne, unter h einen bestimmten aber beliebig kleinen echten Bruch verstehend, $\mathfrak{n}$ den kleinsten Werth von $\mathfrak{m}$, der numerisch grösser als $\frac{m+1}{h}$ ist. Alsdann liegt jeder der Faktoren $r_{\mathfrak{n}}$, $r_{\mathfrak{n}+1}$, $r_{\mathfrak{n}+2}$, ... $r_{\mathfrak{m}-1}$, $r_{\mathfrak{m}}$ zwischen 1 und $1+h$; es ist daher

$$p_n<r_1\,.\,r_2\,.\,r_3\ldots r_{\mathfrak{n}}\,(1+h)^{n-\mathfrak{n}},$$

und man hat folglich

$$p_{\mathfrak{n}+1}+p_{\mathfrak{n}+2}+p_{\mathfrak{n}+3}\ldots+p_n<p_{\mathfrak{n}}\,[(1+h)+(1+h)^2+(1+h)^3+\ldots(1+h)^{n-\mathfrak{n}}],$$

d. h., da nach §. 162

$$(1+h)+(1+h)^2+(1+h)^3\ldots+(1+h)^{n-\mathfrak{n}}=(1+h)\,\frac{(1+h)^{n-\mathfrak{n}+1}-1}{h}$$

und
$$(1+h)^{n-\mathfrak{n}+1}-1<(1+h)^{n-\mathfrak{n}+1}$$

ist, wenn man den endlichen Werth von $\frac{p_n}{h(1+h)^{n+2}}$ durch R bezeichnet,

$$p_{n+1}+p_{n+2}+p_{n+3}\ldots+p_n < R(1+h)^n.$$

Setzt man demnach $p_1+p_2+p_3\ldots\ldots+p_n = q$, so wird

$$(B) < q+R(1+h)^n,$$

mithin wegen $\lim\sqrt[n]{[q+R(1+h)^n]} = 1+h$ *),

$$\lim\sqrt[n]{(B)} \lesseqgtr 1+h,$$

oder vielmehr, da einerseits h beliebig klein gewählt werden kann, und andrerseits (B) nicht unendlich klein, also $\lim\sqrt[n]{(B)}$ nicht kleiner als Eins sein kann,

$$\lim\sqrt[n]{(B)} = 1.$$

Sollte m negativ sein, aber zwischen 0 und -1 liegen, so wird offenbar r_m und folglich auch p_m, und somit (B) kleiner als im vorigen Falle; es bleibt also $\lim\sqrt[n]{(B)}=1$, und es wird deswegen, mag m positiv oder negativ sein,

$$\lim\sqrt[n]{k_n'} \lesseqgtr \frac{1}{\alpha_1},$$

d. h. es convergirt die Entwickelung von U mindestens bis zu $x=\alpha_1$.

Hat man sich nun überzeugt, dass die Entwickelung von U (wenigstens bis zu $x=\alpha_1$ hin) überhaupt einen Werth habe, so erkennt man auch bald, dass dieser Werth bis zu $x=\alpha_1$ hin mit dem Werthe der unentwickelten Reihe U zusammenfällt. Es ergibt sich dies nämlich, wie folgt.

Man nenne $(u)_r$, $(u^2)_r$, $(u^3)_r$, etc. die Entwickelungen von

*) Es ist nämlich, wenn $\frac{q}{R(1+h)^n} = Q$ gesetzt wird,

$$\sqrt[n]{[q+R(1+h)^n]}=\sqrt[n]{[R(1+h)^n]}\sqrt[n]{(1+Q)}=(1+h)\sqrt[n]{R}\sqrt[n]{(1+Q)}.$$

Da ferner der Nenner von Q mit n zugleich wächst, während der Zähler ungeändert bleibt, also Q bei grossen Werthen von n kleiner als Eins ist, so bleibt $1+Q$ von endlichem Werthe, und es wird daher sowohl $\lim\sqrt[n]{R} = 1$, als $\lim\sqrt[n]{(1+Q)} = 1$, und mithin

$$\lim\sqrt[n]{[q+R(1+h)^n]} = 1+h.$$

u, u^2, u^3, etc. bis zu dem mit x^r multiplicirten Gliede, ferner $(U)_r$ die Reihe U bis zu dem mit u^r multiplicirten Gliede, und W die Entwickelung von U; endlich setze man

$$1+k_1x+k_2x^2+k_3x^3+\ldots k_rx^r=(W),$$

$$W=(W)+V,\ u=(u)_r+v_1,\ u^2=(u^2)_r+v_2,\ u^3=(u^3)_r+v_3,\ \text{etc.}$$

Denkt man alsdann $x^2<\alpha_1^2$, damit die Reihen U, W, u, so wie die Entwickelungen von u^2, u^3, etc. convergiren, und dabei r so gross, dass V, v_1, v_2, v_3, so wie $U-(U)_r$ verschwindend klein werden, so erhält man aus

$$(U)_r = 1+{}^1m[(u)_r+v_1]+{}^2m[(u^2)_r+v_2]+{}^3m[(u^3)_r+v_3]+\ldots {}^rm[(u^r)_r+v_r],$$

insofern

$$(W)=1+{}^1m(u)_r+{}^2m(u^2)_r+{}^3m(u^3)_r\ldots+{}^rm(u^r)_r$$

ist, $\quad (U)_r=(W)+{}^1mv_1+{}^2mv_2+{}^3mv_3+\ldots\ldots {}^rmv_r,$

und daher, wenn v' den grössten der Reste v_1, v_2, v_3, ..., vorstellt, sicher

(188) $\quad (U)_r-(W)<v'(p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots p_r).$

Es wird mithin $(U)_r-(W)$ mit zunehmendem r unendlich klein sein, und somit U und W einerlei Grenze haben, sobald sich findet, dass $v'(p_1+p_2+p_3+\ldots p_r)$ mit v' zugleich unendlich klein werden muss.

Wenn m positiv ist, so unterliegt dies keinem Bedenken, da die Reihe $p_1+p_2+p_3\ldots+p_r$ als Theil der in diesem Falle convergenten Reihe (B) einen endlichen Werth behält. Und sollte man Anstand nehmen, für negative Werthe von m das Produkt als unendlich klein werdend gelten zu lassen, so denke man unter α_2 eine absolute Zahl, die beliebig wenig, aber um ein Bestimmtes kleiner als α_1 ist, und unter α_3 eine bestimmte zwischen α_1 und α_2 liegende absolute Zahl; ferner setze man $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}=\gamma$, und bemerke, dass alle Glieder von v_1 den Faktor x, alle Glieder von v_2 den Faktor x^2, alle Glieder von v_3 den Faktor x^3, etc. gemein haben, so dass man $v_1=xw_1$, $v_2=x^2w_2$, $v_3=x^3w_3$, etc. setzen darf. Legt man daher dem x den Werth α_2 bei, so erhält man $v_1=\alpha_2w_1=\alpha_3\gamma w_1$, $v_2=\alpha_2^2w_2=\alpha_3^2\gamma^2w_2$, $v_3=\alpha_2^3w_3=\alpha_3^3\gamma^3w_3$, etc., folglich

$$(U)_r=(W)+{}^1m\gamma.\alpha_3w_1+{}^2m\gamma^2.\alpha_3^2w_2+{}^3m\gamma^3.\alpha_3^3w_3+\ldots {}^rm\gamma^r.\alpha_3^rw_r,$$

und demnach, wenn w' den grössten Werth der mit zunehmendem

r verschwindend klein werdenden Ausdrücke $\alpha_3 w_1$, $\alpha_3{}^2 w_2$, $\alpha_3{}^3 w_3$, . . . $\alpha_3{}^r w_r$, bedeutet,

(189) $(U)_r - (W) < w'(p_1\gamma + p_2\gamma^2 + p_3\gamma^3 + \dots + p_r\gamma^r)$.

Da nun w' unendlich klein wird, und wegen $\gamma < 1$, die Reihe $p_1\gamma + p_2\gamma^2 + p_3\gamma^3 \dots + p_r\gamma^r$ einen endlichen Werth behalten muss, so liegt es ausser Zweifel, dass auch $(U)_r - (W)$ mit zunehmendem r unendlich klein bleibt, und zwar, insofern das α_2 dem α_1 beliebig genähert werden kann, bis zu $x = \alpha_1$ hin; und hieraus folgt dann, dass auch das von $(U)_r - (W)$ sich unendlich wenig unterscheidende $U - W$ bis zu dieser Grenze hin einen unendlich kleinen Werth erhalten wird, d. h. dass U und W bis zu $x = \alpha_1$ einerlei Grenze haben müssen, und in der That also W eine normale Entwickelung der Potenz A^m ist *).

Im letzten Theile der Untersuchung ist zwar vorausgesetzt worden, dass die Coefficienten von X und der Exponent m reell seien, doch ändert sich an der Deduktion nichts, wenn man dieselben beliebig imaginär denkt, wofern man nur alsdann überall statt des Ausdrucks numerischer Werth den Ausdruck Modulus anwendet, und wofern man da, wo positive und negative Werthe von m unterschieden sind, $m = \mu + \nu i$ setzend, positive und negative Werthe von μ unterscheidet, indem sich immer noch n so wählen lässt, dass die Moduli r_n, r_{n+1}, . . r_m zwischen 1 und einer absoluten Zahl liegen, welche beliebig wenig grösser als 1 ist. Das x darf man ferner überall als reell voraussetzen, da nach §. 252 alle Convergenzen, die für reelle x bis zu $x = \alpha_1$ gehen, auch für imaginäre x bis zu dieser Grenze bestehen bleiben.

Ist Mod. $u = 1$, so wird Mod. $(1 + u) = \sqrt{2}$, folglich, wenn überdies (a) den Modulus von a vorstellt,

*) Dass α_1 nicht immer gerade der grösste Werth von x ist, bis zu welchem die Reihe W convergirt, und dass also die Entwickelung W für grössere Werthe von x der Potenz A^m gleichbleiben kann, als die Entwickelung U, sieht man am folgenden Beispiele.

Ist $A = e_x$, also $A^m = e^{mx}$, so ist $W = 1 + mx + \frac{m^2x^2}{2!} + \frac{m^3x^3}{3!} \dots +$ in inf., also für jeden Werth von x, $A^m = W$, während $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ oder unmerklich grösser als $\frac{1}{2}$ ist, mithin nur in einem beschränkten Intervalle $U = A^m$ bleibt.

$$\text{Mod.}\,A = \text{Mod.}\,a(1+u) = (a)\sqrt{2},$$

und mithin

$$(\text{Mod.}\,A)^2 = 2(a)^2.$$

Man kann daher das a_1 in den vorstehenden Erörterungen als den kleinsten Modulus derjenigen Werthe von x bezeichnen, für welche das Quadrat des Modulus von A doppelt so gross wird, wie in dem Falle, wo x den Werth Null hat.

2. Nimmt A für $x=0$ den Werth Null an, d. h. ist $a=0$, so hat man, wenn man der grösseren Allgemeinheit wegen $a_r x^r$ als das erste Glied der Reihe X voraussetzt, dessen Coefficient von Null verschieden ist,

$$X = x^r(a_r + a_{r+1}x + a_{r+2}x^2 + \ldots \text{in inf.})\ ^{*)},$$

und folglich $X^m = x^{rm}(a_r + a_{r+1}x + a_{r+2}x^2 + \ldots \text{ in inf.})^m\ ^{**)}$.

In dem vorstehenden Produkte ist aber der zweite Faktor, da dessen Dignand nicht mit x zugleich in Null übergeht, nach dem eben geführten Beweise stets einer normalen Entwickelung fähig, mithin auch X^m und folglich A^m, sobald gleichzeitig a^{rm} eine ganze Potenz ist; in jedem anderen Falle dagegen nicht. Es muss demnach entweder m eine ganze Zahl sein (für welchen Fall schon Eingangs des §. die normale Entwickelbarkeit anerkannt worden ist) oder einen positiven Bruch vorstellen, dessen Nenner ein Theiler von r ist. Namentlich wird also A^m keine normale Entwickelung haben, wenn m positiv irrational, oder negativ, oder imaginär ist, und selbst bei positiven rationalen Werthen von m nur in seltenen Fällen, und z. B. nie, wenn $r=1$ sein sollte.

§. 284. *Entwickelung der Logarithmen normaler Funktionen von x.* Der Logarithmus einer normalen Funktion von x ist allemal wiederum eine normale Funktion, sobald der Logarithmand nicht mit x zugleich verschwindet; und die Entwickelung des Lo-

*) Gibt man dem X nicht von vorn herein die obige Form, so erhält man bei jedem Versuche, in diesen Fällen für A^m eine Entwickelung nach ganzen Potenzen von x zu gewinnen, werthlose Coefficienten.

**) Zufolge des §. 251 müsste, wegen $(((x^r)^m)) = x^{rm}((1^m))$, um keinen Werth zu übergehen, noch der Faktor $((1^m))$ hinzugefügt werden. Es hat indess derselbe offenbar keinen Einfluss auf das Normal-Sein oder Nicht-Normal-Sein von X^m.

garithmen convergirt dann bis zu $x=\alpha_1$, wenn α_1 den kleinsten Modulus derjenigen Werthe von x vorstellt, für welche das Quadrat des Modulus des Logarithmanden doppelt so gross wird, wie in dem Falle, wo $x=0$ ist

Beweis. Stellt wiederum X die Entwickelung einer normalen Funktion A vor, und nimmt man

1) an, dass dieselbe nicht mit x zugleich in Null übergeht, so dass allgemein

$$X = a(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \text{ in inf.})$$

gesetzt werden darf, so hat man, wenn wie im vorigen §. die Reihe $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$ in inf. durch u bezeichnet und α die Grenze der Convergenz von X genannt wird,

$$\log X = \log a + \log(1 + u)$$

für jeden Werth von x, dessen Modulus kleiner als α ist. Folglich ist nach §. 254, so lange der Modulus von u kleiner als Eins bleibt,

$$\log X = \log a + u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 + \ldots \text{ in inf.}$$

Bedeutet wiederum α_1 den grössten Modulus von x, bis zu welchem Mod. $u<1$ bleibt, so convergiren die nach Potenzen von x geordneten Entwickelungen von u^2, u^3, u^4, etc. (vgl. den vorigen §.) bis zu $x=\alpha_1$, und man darf daher in der letzten Gleichung für u_2, u_3, u_4, etc. diese mit ihnen (bis zu $x=\alpha$ hin) gleichbedeutenden Entwickelungen setzen.

Um nun zu sehen, ob die dadurch entstehende Reihe den Werth von $\log X$ behalte, wenn dieselbe nach Potenzen von x geordnet wird, untersuchen wir wieder zunächst ihre Convergenz, und bezeichnen zu dem Ende durch k_n den Coefficienten von x^n in derselben, und durch a_n'', a_n''' etc. die Coefficienten von x^n in den Entwickelungen von u^2, u^3, etc.

Alsdann ist

$$(190)\quad k_n = a_n - \tfrac{1}{2}a_n'' + \tfrac{1}{3}a_n''' - \ldots \pm \frac{1}{n-1}\, a_n^{(n-1)} \mp \frac{1}{n}\, a_n^{(n)},$$

und wenn k'_n den Modulus von k_n, und β den Mittelwerth der Moduli von a_n, a_n'', a_n''', etc. bedeutet, offenbar

$$k'_n < \beta\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right),$$

und um so mehr $\qquad k'_n < \beta n.$

Da wir ferner aus dem vorigen §. wissen, dass $\lim \sqrt[n]{\beta} = \frac{1}{\alpha_1}$ ist, und da $\lim \sqrt[n]{n}$ den Werth Eins hat, so ist

$$\lim \sqrt[n]{(\beta n)} = \frac{1}{\alpha_1}$$

und demnach die nach Potenzen von x geordnete Entwickelung von $\log X$ mindestens bis zu $x = \alpha_1$ convergent.

Dass das α_1 sich auch so, wie im Lehrsatze charakterisiren lasse, ist nach der entsprechenden Stelle des vorigen §. klar.

Zur Vervollständigung des Nachweises, dass $\log A$ unter der Eingangs gemachten Voraussetzung stets normal entwickelbar sei, fehlt nunmehr nur noch 1) der Beweis, dass die Entwickelung von $\log X$ allemal existire und 2) der Beweis, dass das bis zu $x = \alpha_1$ hin mit $\log A$ gleiche $\log X$ auch hinsichtlich des Werthes mit seiner nach Potenzen von x geordneten Entwickelung übereinstimme.

Dass das Erste wahr ist, zeigt der bei (190) angegebene Ausdruck für die Coefficienten der Entwickelung, welcher als Summe von nicht-werthlosen Gliedern allemal eine Bedeutung hat; und das Zweite lässt sich ganz so nachweisen, wie die entsprechende Thatsache im vorigen §. Bezeichnet man nämlich $u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \ldots$ in inf. durch U, die Entwickelung von U durch W, und nimmt $(U)_r$, (W), v', w', γ in demselben Sinne wie dort, so sind die den Formeln (188) und (189) entsprechenden Ungleichungen, auf welche man hierbei kommt,

$$(U)_r - (W) < v'\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \ldots\ldots \frac{1}{r}\right)$$

$$(U)_r - (W) < w'\left(\gamma + \tfrac{1}{2}\gamma^2 + \tfrac{1}{3}\gamma^3 + \tfrac{1}{4}\gamma^4 \ldots \frac{1}{r}\gamma^r\right),$$

und erlauben dann dieselbe Schlussfolgerung.

Nimmt 2) A für $x=0$ den Werth Null an, und setzt man, wie im vorigen §.

$$X = x^r\,(a_r + a_{r+1}x + a_{r+2}x^2 + \;.\;.\text{ in inf.}),$$

a_r den ersten Coefficienten der Reihe X nennend, der von Null verschieden ist, so erhält man wegen $\log(x^r) = r \log x + \log 1$

$$\log X = r \log x + \log(a_r + a_{r+1}x + a_{r+2}x^2 + \;.\;.\text{ in inf.}).$$

Da nun nach dem Vorhergehenden das zweite Glied der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Summe normal ent-

wickelbar, das erste Glied dagegen einer nach ganzen Potenzen von x fortschreitenden Entwickelung überhaupt unfähig ist *), so lässt sich auch das bis zu $x = a$ hin mit $\log A$ identische $\log X$ nicht nach positiven ganzen Potenzen von x entwickeln.

Dass eine normale Entwickelung für $\log A$ im vorliegenden Falle unmöglich sein würde, liess sich übrigens voraussehen, da dieser Logarithmus hier für $x = 0$ werthlos wird, während jede nach positiven ganzen Potenzen von x fortgehende Reihe, wenn sie für einen Werth von x eine Bedeutung hat, auch für $x = 0$ eine Bedeutung behält, nie also mit $\log A$ zugleich werthlos werden kann, wenn sie für irgend einen anderen Werth von x dem $\log A$ gleich sein soll.

§. 285. *Entwickelung solcher Potenzen, deren Dignand von x unabhängig, und deren Exponent eine normale Funktion von x ist.* Jede Potenz, deren Exponent eine normale Funktion, und deren Dignand constant ist, bildet wiederum eine normale Funktion, und es convergirt deren Entwickelung, so oft die (normale) Entwickelung des Exponenten unabhängig von den Gliederzeichen convergirt.

Beweis. Ist m^{A} die gegebene Potenz, in der natürlich m von Null verschieden gedacht werden muss, und X die normale

*) Wäre $\log x$ nach ganzen Potenzen von x entwickelbar und etwa

$$\log x \doteq a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.,$$

so würde folgen:

$$e^{\log x} = e^{a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}$$

d. h. wegen $e^{\log x} = x$,

$$x = e^{a} e^{a_1 x} e^{a_2 x^2} \ldots\ldots,$$

oder, wenn man für $e^{a_1 x}$, $e^{a_2 x^2}$, etc. ihre Entwickelungen setzt und die Multiplikationen ausführt,

$$x = e^{a} + e^{a} a_1 x + s,$$

wo s die Summe der mit x^2, x^3, x^4, etc. multiplicirten Glieder vorstellt. Dies kann aber nach §. 171 für eine zusammenhängende Reihe von Werthen nur der Fall sein, wenn $e^{a} = 0$, $e^{a} a_1 = 1$ und $s = 0$ ist. Da indess für keinen Werth von a, $e^{a} = 0$ sein kann, und wenn dies auch wäre, $e^{a} a_1$ nicht gleich Eins, sondern gleich Null sein würde, so sind die Bedingungen der Entwickelbarkeit von $\log x$ unerfüllbar.

Entwickelung von A, deren Convergenzgrenze wiederum α sei, so hat man

$$(191)\quad m^X = e^{X\log m} = 1 + X\log m + X^2\frac{(\log m)^2}{2!} + X^3\frac{(\log m)^3}{3!} + \ldots \text{ in inf.},$$

für jeden Werth von x, für den X einen Werth hat, d. h. so lange nicht der Modulus von x grösser als α ist. Bezeichnet ferner k_n den Coefficienten von x^n in der nach Potenzen von x geordneten Entwickelung der vorstehenden Reihe, und bedeuten a_n, a_n'', a_n''', die Coefficienten von x^n in der Reihe X und den Entwickelungen von X^2, X^3, etc., so erhält man

$$(192)\quad k_n = a_n \log m + a_n''\frac{(\log m)^2}{2!} + a_n'''\frac{(\log m)^3}{3!} + \ldots + a_n^{(n)}\frac{(\log m)^n}{n!}.$$

Stellt also k_n' den Modulus von k_n, m' den Modulus von m, und β den grössten der Moduli von a_n, a_n'', a_n''', etc. vor, so ist sicher

$$k_n' < \beta\left(\mathrm{l}m' + \frac{(\mathrm{l}m')^2}{2!} + \frac{(\mathrm{l}m')^3}{3!} + \ldots \frac{(\mathrm{l}m')^n}{n!}\right),$$

wo die mit β multiplicirte Reihe mit zunehmendem n der Grenze $e^{\mathrm{l}m'} - 1$, d. h. der Grenze $m' - 1$ sich nähert. Es kann daher, da offenbar $\lim\sqrt[n]{\beta} = \frac{1}{\alpha}$, und $\lim\sqrt[n]{(m'-1)} = 1$ ist, $\sqrt[n]{k_n'}$ nicht grösser als $\frac{1}{\alpha}$ sein, d. h. es muss die nach Potenzen von x geordnete Entwickelung von m^X, welche, insofern der Coefficient k_n nie werthlos werden kann, allemal existirt, mindestens bis zu $x = \alpha$ hin convergiren.

Was die Uebereinstimmung dieser Entwickelung mit m^A hinsichtlich des Werthes betrifft, so kommt man in der Art, wie es in dem ähnlichen Falle in §. 283 geschehen ist, wenn man unter W jene Entwickelung, und unter (W) deren Glieder bis zu $k_r x^r$ hin, unter U die Reihe (191), unter $(U)_r$ deren Glieder bis zu $X^r\frac{(\log m)^r}{r!}$ hin, und endlich unter v_1, v_2, v_3, etc. die Reste der Reihe X und der Entwickelungen von X^2, X^3, etc. von dem mit x^r multiplicirten Gliede an, versteht, auf

$$(U)_r - (W) = v_1 \log m + v_2\frac{(\log m)^2}{2!} + v_3\frac{(\log m)^3}{3!} + \ldots v_r\frac{(\log m)^r}{r!},$$

und wenn v' den grössten der Moduli von v_1, v_2, v_3, etc. vorstellt, auf

$$\text{Mod.}\ [(U)_r - (W)] < v'\left(\text{l}m' + \frac{(\text{l}m')^2}{2!} + \frac{(\text{l}m')^3}{3!} + \dots \frac{(\text{l}m')^r}{r!}\right) < v'(m'-1).$$

Da nun v' mit zunehmendem r unendlich klein wird, so wird auch unter allen Umständen, so lange U convergirt, also bis zu $x=\alpha$ hin, $(U)_r - (W)$ unendlich klein sein, und somit den Reihen U und W einerlei Grenze zugeschrieben werden müssen.

Es ist folglich m^A stets normal entwickelbar, und die Entwickelung convergirt mindestens bis zu $x=\alpha$ hin.

§. 286. *Entwickelung von Potenzen, in denen Dignand und Exponent normale Funktionen von x sind.* Jede Potenz, in welcher Dignand und Exponent normale Funktionen von x sind, ist wiederum eine normale Funktion von x, so oft der Dignand nicht mit x zugleich verschwindet; und wenn die Entwickelung des Exponenten bis zu $x=\alpha$ convergirt, und α_1 den kleinsten Modulus derjenigen Werthe von x vorstellt, für welche das Quadrat des Modulus des Dignanden doppelt so gross wird, wie in dem Falle, wo $x=0$ ist: so convergirt die Entwickelung der Potenz bis zu $x=\alpha$ oder bis zu $x=\alpha_1$, jenachdem α oder α_1 die kleinere Zahl ist.

Beweis. Es seien in der Potenz A^C die Ausdrücke A und C normale Funktionen, und resp. X und Z deren Entwickelungen, etwa $X = a(1+a_1x+a_2x^2+\dots$ in inf.), $Z=c+c_1x+c_2x^2+\dots$ in inf.; ferner sei α die Convergenzgrenze von X, γ dieselbe für Z, und es werde

1) wie es sich schon in der für X angegebenen Reihenform ausdrückt, a als von Null verschieden vorausgesetzt.

Man hat alsdann, wenn wiederum $a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots = u$ gesetzt wird, $X^Z = a^Z(1+u)^Z$,
wo a^Z, und folglich auch a^C, nach §. 285 normal entwickelbar ist, so dass es auch A^C sein wird, so oft $(1+u)^Z$ eine normale Funktion ist. So lange nun Z einen Werth hat, also der Modulus von x nicht grösser als γ wird, und dabei $1+u$ von Null verschieden ist, besteht die Gleichung

$$(193)\quad (1+u)^Z = 1 + Z\log(1+u) + Z^2\frac{[\log(1+u)]^2}{2!} + Z^3\frac{[\log(1+u)]^3}{3!} + \dots \text{in inf.};$$

ferner sind nach §. 284 und 283 $\log(1+u)$ und die ganzen Potenzen von $\log(1+u)$ normal nach x entwickelbar und bis zu

$x = \delta$ hin convergent, wenn δ der grösste Modulus von x ist, für den der Modulus von u die Einheit nicht übersteigt, und hieraus folgt nach §. 282 und 283, wenn der kleinste der beiden Werthe γ und δ durch α_1 bezeichnet wird, dass auch $Z\log(1+u)$, $(Z\log(1+u))^2$, $(Z\log(1+u))^3$ mit ihren nach Potenzen von x fortschreitenden Entwickelungen bis zu $x = \alpha_1$ hin einerlei Werth haben.

Man darf daher in der Gl. (193) für die einzelnen Glieder ihre Entwickelungen in x setzen, ohne deren Richtigkeit bis zu $x = \alpha_1$ hin zu stören.

Bezeichnet nun U die dadurch entstehende Reihe, W deren nach Potenzen von x geordnete Entwickelung, ferner k_n den Coefficienten von x^n in der Reihe W, und a'_n, a_n'', a_n''', etc. die Coefficienten von x^n in den Entwickelungen von $Z\log(1+u)$, $Z^2[\log(1+u)]^2$, $Z^3[\log(1+u)]^3$, etc., so hat man

$$(194) \qquad k_n = a_n' + \frac{a_n''}{2!} + \frac{a_n'''}{3!} + \dots \frac{a_n^{(n)}}{n!},$$

und mithin, wenn k_n' den Modulus von k_n, und β den grössten der Moduli von a_n', a_n'', a_n''', etc. vorstellt,

$$k_n' < \beta\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \beta e,$$

folglich da $\lim \sqrt[n]{\beta}$ und sonach auch $\lim \sqrt[n]{(\beta e)}$ den Werth $\frac{1}{\alpha_1}$ hat,

$$\lim \sqrt[n]{k'_n} \overline{\overline{<}} \frac{1}{\alpha_1},$$

d. h. es convergirt die Entwickelung W mindestens bis zu $x = \alpha_1$ hin. Da endlich nach §. 285 die Entwickelung von a^Z bis zu $x = \gamma$ convergirt, und $\gamma \overline{\overline{>}} \alpha_1$ ist, so convergirt auch nach §. 282 die nach Potenzen von x geordnete Entwickelung von $\mathcal{A}^C$ wenigstens bis zu $x = \alpha_1$.

Zum Nachweise, dass $\mathcal{A}^C$ jedenfalls eine normale Funktion sei, bleibt daher nur noch zu zeigen übrig, dass diese Entwickelung keine werthlose Coefficienten in sich schliessen kann, und dass für ein genügendes Intervall von Werthen von x ihre Gleichheit mit der unentwickelten Funktion $\mathcal{A}^C$ bewahrt wird.

Das Erste folgt daraus, dass die Entwickelung keines der Faktoren des Produkts $a^Z(1+u)^Z$, aus welchem die Entwickelung von $\mathcal{A}^C$ gewonnen wird, werthlose Coefficienten hat. Für die Entwickelung des ersten Faktors geht dies nämlich aus dem vorigen §. hervor; für die des zweiten Faktors daraus, dass der allge-

meine Coefficient k_n desselben eine Summe von Gliedern ist, die jederzeit eine Bedeutung haben

Das Zweite ist als erwiesen zu betrachten, sobald sich zeigen lässt, dass U und W für alle Werthe von x, die zwischen endlichen, die Null mit einschliessenden Grenzwerthen liegen, einander gleich sind.

Man erkennt aber leicht, wenn man hierbei die in §. 283 angewendete Methode befolgt, und unter (W) den bis zu $k_r x^r$ gehenden Theil von W, unter $(U)_r$ den bis zu $Z^r[\log(1+u)]^r$ gehenden Theil von U, und endlich unter v_1, v_2, v_3, etc. die Reste der Entwickelungen von $Z\log(1+u)$, $Z^2[\log(1+u)]^2$, $Z^3[\log(1+u)]^3$, etc. versteht, dass

$$(U)_r - (W) = v_1 + \frac{v_2}{2!} + \frac{v_3}{3!} + \dots \frac{v_r}{r!}$$

hervorgehen wird, und dass daher, wenn v' den grössten der Moduli von v_1, v_2, v_3, .. v_r bezeichnet,

$$\text{Mod. } [(U)_r - (W)] < v'\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{r!}\right) < v'e$$

sein muss, d. h., da v' mit zunehmendem r unendlich klein wird, dass U und W bis zu $x = \alpha_1$ hin einerlei Grenze haben müssen.

2) Verschwindet A mit x zugleich, ist also etwa

$$A = x^r(a_r + a_{r+1}x + a_{r+2}x^2 + \dots \text{ in inf.}),$$

so hat man, wenn man die hier mit x^r multiplicirte Reihe A' nennt,

$$A^C = x^{Cr} A'^C,$$

während A'^C, weil A' mit x nicht zugleich verschwindet, nach dem Vorhergehenden einer normalen Entwickelung fähig ist. Dagegen ist der Faktor x^{Cr} nicht nach positiven ganzen Potenzen von x entwickelbar, weil derselbe gleich

$$1 + rC\log x + \frac{(rC\log x)^2}{2!} + \frac{(rC\log x)^3}{3!} + \dots \text{in inf.}$$

ist, und $\log x$ eine solche Entwickelung nicht erfahren kann.

Demnach ist A^C, wenn A mit x zugleich den Werth Null annimmt, weder eine normale Funktion von x, noch überhaupt für eine Entwickelung nach positiven ganzen Potenzen von x geeignet.

§. 287. *Erweiterung des Begriffes der Theilbarkeit einer Funktion.* Lässt sich $A:B$ in einen Ausdruck umformen, welcher für $B=0$ nicht werthlos wird, so nennen wir A durch B theilbar.

Ist $B = x^r$, und r reell oder imaginär, aber von x unabhängig, so sagen wir, x^r sei die höchste Potenz von x, durch welche A theilbar ist, wenn $A : x^r$ für $x = 0$ nicht bloss nicht werthlos wird, sondern sich auch nicht auf Null reducirt.

Aus diesem Begriffe der Theilbarkeit, welcher den in §. 144 aufgestellten Begriff der Theilbarkeit ganzer Funktionen als besonderen Fall in sich schliesst, folgt, dass, wenn A durch B theilbar ist, A mit B zugleich verschwindet. Denn ist C der Werth von $A:B$, so ist $A = BC$, also $A = 0$, so oft $B = 0$ ist.

Beispiele. Theilbar durch x sind z. B. $\sin x$ und der im Früheren durch $L(1+x)$ bezeichnete Hauptwerth von $\log(1+x)$, und zwar ist x^1 die höchste Potenz von x, durch welche die beiden Funktionen getheilt werden können, weil

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \text{etc.}, \quad \frac{L(1+x)}{x} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^2 - \text{ etc.},$$

ist, und diese beiden Reihen für $x = 0$ in 1 übergehen, also weder werthlos werden noch verschwinden.

Ferner ist $x^{\frac{5}{2}}$ die höchste Potenz von x, durch welche die Funktion $x^5 - 2x^2\sqrt{(x - x^2)}$ getheilt werden kann, da

$$[x^5 - 2x^2\sqrt{(x - x^2)}] : x^{\frac{5}{2}} = x^{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{(1 - x)}$$

ist, und dieser Ausdruck für $x = 0$ in $-2\sqrt{1}$ übergeht, also gleichfalls weder werthlos wird noch verschwindet.

§. 288. *Allgemeine Regeln für die Erkennung der normalen Entwickelbarkeit beliebig zusammengesetzter Funktionen, und für die Bestimmung der Convergenzgrenzen der normalen Entwickelungen.* Da, wie in §. 278 bemerkt worden ist, die näheren und entfernteren Bestandtheile jeder Funktion nur algebraische Summen, Produkte, Potenzen und Logarithmen von einfacheren und resp. einfachen Funktionen sein können, so lässt sich unter Anwendung der §§. 281—286, aus der Natur der einfachsten Bestandtheile über die Möglichkeit der normalen Entwickelung der nächst zusammengesetzteren Bestandtheile, und eventuell über deren Convergenzgrenzen; daraus wieder über die normale Entwickelbarkeit und resp. die Convergenzgrenzen der nächst höheren Bestandtheile, etc., und somit zuletzt über die vollständige Funktion in diesen beiden Beziehungen ein Urtheil fällen.

Bemerkt man, dass die einfachen Funktionen in denselben Fäl-

len normal sind, in denen nach den Resultaten der angeführten §§. eine normale Entwickelung für Verbindungen zweier normalen Funktionen vorhanden ist, nämlich wenn sie für $x = 0$ weder in log 0 noch in eine nicht-ganze Potenz von Null übergehen: so erkennt man augenblicklich die Richtigkeit der folgenden Regeln.

I. Jede Funktion eines Veränderlichen x, in welcher weder ein Logarithmus vorkommt, dessen Logarithmand, noch eine nicht positive ganze Potenz, deren Dignand mit x zugleich verschwindet, ist einer normalen Entwickelung nach Potenzen von x fähig*).

II. Enthält eine Funktion von x keine Logarithmen, deren Logarithmand mit x zugleich verschwindet, wohl aber Potenzen, A^u, B^v, C^w, etc., in denen u, v, w, etc. nicht positive ganze Zahlen sind, und deren Dignanden mit x zugleich in Null übergehen; sind ferner x^r, $x^{r'}$, $x^{r''}$, etc. die höchsten Potenzen von x, durch welche sich resp. A, B, C, etc. theilen lassen: so ist dieselbe auch dann noch normal, wenn ru, $r'v$, $r''w$, etc. ganze Zahlen sind.

B e i s p i e l e. *a*) Die Funktion $2^x\sqrt{(\cos x - 1)}$ ist normal (obgleich sie in der Form $2^x(\cos x - 1)^{\frac{1}{2}}$ geschrieben, zeigt, dass der Dignand der gebrochenen Potenz $(\cos x - 1)^{\frac{1}{2}}$ mit x zugleich verschwindet), da

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \text{etc.} = x^2(-\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \ldots),$$

und folglich x^2 die höchste Potenz von x ist, durch welche $\cos x - 1$ getheilt werden kann, während andrerseits $(x^2)^{\frac{1}{2}}$ den Werth einer ganzen Potenz hat. Der gegebenen Funktion kann also die Form

$$2^x x\sqrt{(-\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \ldots .)}$$

gegeben werden, in welcher sie der in Nr. I aufgestellten Bedingung des Normal-Seins genügt.

*) In der Bedingung, dass Logarithmanden und Dignanden nicht-ganzer Potenzen nicht mit x zugleich verschwinden dürfen, liegt die Bedingung eingeschlossen, dass weder die gesammte Funktion, noch in derselben einer der Logarithmanden oder Dignanden für $x = 0$ werthlos werden darf, da wir keine andere werthlose Formen kennen, als die Logarithmen von Null und gewisse Potenzen von Null — das Werthlos-Werden also immer seinen Ursprung in dem Verschwinden von Logarithmanden und Dignanden seinen Grund hat.

b) Handelt es sich um die Funktion $\frac{(m-x)^n}{\sin x + x\cos x^2}$, so gebe man derselben zunächst die Form

$$(m-x)^n \ [\sin x + x\cos x^2]^{-1}.$$

Der mit x zugleich verschwindende Dignand $\sin x + x\cos x^2$ gibt dann, da er gleich

$$x(\cos x^2 + 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \text{etc.})$$

ist, zu erkennen, dass x^1 die höchste Potenz von x ist, durch welche er getheilt werden kann. Wird diese Potenz herausgesondert und die Umformung der gegebenen Funktion in

$$x^{-1}(m-x)^n \ [\cos x^2 + 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \text{etc.}]^{-1}$$

hergestellt, so behält das ausgeschiedene x einen negativen Exponenten, und die oben gestellte Forderung bleibt unerfüllt. — Dass in Folge dessen eine normale Entwickelung unmöglich ist, erkennt man unmittelbar, wenn man die Entwickelung des mit x^{-1} multiplicirten normalen Theils, den wir A nennen wollen, durch

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ etc.}$$

vorstellt, so dass die gegebene Funktion gleich

$$ax^{-1} + a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ . \ . \text{ etc.}$$

wird. Diese Reihe kann nämlich keiner nach ganzen Potenzen von x fortschreitenden Reihe gleich sein, wenn nicht $a = 0$ ist *). Es kann aber nicht $a = 0$ sein, weil a der Werth ist, den A für $x = 0$ annimmt, also den von Null verschiedenen Werth $\frac{1}{2}m^n$ vorstellt. —

Was die Angaben betrifft, bis wohin die Convergenz mindestens gehe, so hat sich in den angeführten §§. herausgestellt, dass

*) Existirte nämlich für die Funktion eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Entwickelung und wäre dieselbe

$$b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ . \ . \text{ in inf.},$$

so würde man durch Gleichstellung derselben mit der obigen Reihe die Gleichung

$$ax^{-1} = (b-a) + (b_1 - a_1)x + (b_2 - a_2)x^2 + (b_3 - a_3)x^3 + \ . \ . \text{ in inf.}$$

erhalten, also links einen Ausdruck haben, dessen numerischen Werth (oder resp. Modulus) mit abnehmendem x über alle Grenzen hinaus wächst, während die Reihe zur Rechten mit abnehmendem x sich der endlichen Grenze $b-a$ nähert.

da, wo die Entwickelungen der sonstigen Bestandtheile der Funktion nicht schon engere Convergenzgrenzen hatten, die Grösse des Modulus des dort durch u bezeichneten Ausdruckes das Bestimmende war, nämlich dass die Convergenz immer mindestens bis zu $x = a$ gehe, wenn a den kleinsten Modulus derjenigen Werthe von x vorstellt, für welche das Quadrat des Modulus des in der Funktion vorkommenden Dignanden oder Logarithmanden doppelt so gross wird, wie in dem Falle, wo $x = 0$ ist. Bemerkt man überdies, dass die einfachen normalen Funktionen mit ihren Entwickelungen zusammenfallen, also gesagt werden darf, dass dieselben bis zu $x = \infty$ convergiren, und dass daher jeder Bestandtheil einer Funktion, dessen Entwickelung beschränkte Convergenzgrenzen hat, diese Beschränkung dadurch erlitten haben muss, dass er Potenzen mit veränderlichen Dignanden und nicht ganzen Exponenten oder Logarithmen mit veränderlichen Logarithmanden enthielt: so erscheint auch

III. die Regel begründet, dass die Entwickelung jeder noch so zusammengesetzten (nach I oder II) normalen Funktion von x mindestens bis zum Werthe des kleinsten Modulus derjenigen Werthe von x convergirt, welche das Quadrat des Modulus der in der Funktion vorkommenden Logarithmanden und Dignanden nicht-ganzer Potenzen doppelt so gross machen, als für den Fall, wo $x = 0$ ist.

Da der Modulus des im Vorhergehenden immer durch u bezeichneten Ausdrucks unter andern gleich Eins wird, so oft $1 + u = 0$ ist, so erkennt man, dass bei der Bestimmung des Minimums, bis zu welchem die Convergenz sicher ist, diejenigen Werthe von x concurriren, welche die Logarithmanden und die Dignanden nicht-ganzer Potenzen zum Verschwinden bringen. Ferner werden die Entwickelungen derjenigen Funktionen, in denen weder Logarithmen noch Potenzen mit nicht-ganzen Exponenten vorkommen, für jeden Werth von x convergiren.

Beispiel. Die Funktion

$$[\cos x - \log(2 + x^3)]\sqrt{(5 - x^2)}$$

ist nach der ersten Regel dieses §. eine normale. Für den Dignanden $5 - x^2$ ist $-\frac{1}{5}x^2$ der im Früheren durch u bezeichnete Ausdruck; dessen Modulus, welcher, wenn r den Modulus von x vorstellt, gleich $\frac{1}{5}r^2$ ist, erhält also den Werth Eins für $r = \sqrt{5}$. Für den Logarithmanden $2 + x^3$ entspricht das $\frac{1}{2}x^3$ dem u; es ist also

Mod. $u = \frac{1}{2}r^3$ und daher Mod. $u = 1$ für $r = \sqrt[3]{2}$. Da nun $\sqrt[3]{2} < \sqrt{5}$ ist, so muss die Convergenz für die Entwickelung der vorliegenden Funktion mindestens bis zu $x = \sqrt[3]{2}$ gehen.

§. 289. *Zusatz.* Ausser in dem in §. 288, II namhaft gemachten Falle lässt sich zuweilen eine Funktion von x, welche den in §. 288, I angegebenen Bedingungen der normalen Entwickelbarkeit nicht genügt, so umgestalten, dass sie in ihrer neuen Form jene Bedingungen erfüllt. Zu dem Ende hat man nur die mit x zugleich verschwindenden Logarithmanden und resp. Dignanden nichtganzer Potenzen auf die Form $x^r A$ zu bringen — unter x^r die höchste Potenz von x verstanden, durch welche sich selbige theilen lassen; und hierauf zu untersuchen, ob nicht unter Anwendung der einfachen arithmetischen Rechnungsregeln, welche sich in den auf pag. 177 mit (IX), (XI), (XII), (49) und (51) bezeichneten Gleichungen aussprechen, Umformungen ausführbar sind, durch welche jene abgesonderten Potenzen von x entweder herausfallen oder mittels Verbindung mit anderen Bestandtheilen auf ganze Potenzen von x führen *). Gelingt dies, so genügt die gegebene Funktion in ihrer neuen Gestalt, da A nicht mit x zugleich in Null übergeht, den Bedingungen des §. 288, I, und gehört folglich in die Klasse der normalen Funktionen.

Die nächste Umformung ist hierbei für die Logarithmen die Umgestaltung von $\log(x^r A)$ in $\log x^r + \log A$; für Potenzen, deren Exponent etwa v ist, die Umgestaltung von $(x^r A)^v$ in $x^{rv} A^v$.

B e i s p i e l e. 1) Die Funktion

$$\sqrt{(x^3 - 2x^5)}\,\sqrt[3]{(4x^7 + x^8 - 2x^{10})}\,\sqrt[6]{\left(\frac{2}{x^5} + \frac{3}{x^3}\right)}$$

zunächst durch Absonderung der höchsten Potenzen von x, durch welche die Radikanden theilbar sind, in

$$x^{\frac{3}{2}}(1 - 2x^2)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{3}}(4 + x - 2x^3)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{5}{6}}(2 + 3x^2)^{\frac{1}{6}}$$

umgestaltet **), liefert unter Benutzung der Gl. (IX) die Umformung

*) Die alleinige Anwendung der Gl. (XII) entspricht dem in §. 288, II schon vorweg betrachteten Falle.

**) Zunächst sind es in dem Faktor $\sqrt[6]{\left(\frac{2}{x^5} + \frac{3}{x^3}\right)}$, die Potenzen x^{-5} und

$$x^3\sqrt{(1-2x^2)}\sqrt[3]{(4+x-2x^3)}\sqrt[6]{(2+3x^2)},$$

und ist somit nach §. 288,I normal.

2) Die Funktion $\sin ax^2-\log(2x^2-x^5)+\log(x^2+4x^3)$ gibt nach Absonderung der höchsten Potenzen von x, welche die Logarithmanden theilen,

$$\sin ax^2-\log[x^2(2-x^3)]+\log[x^2(1+4x)],$$

und hierauf, nach Gl. (49) umgeformt,

$$\sin ax^2-\log x^2-\log(2-x^3)+\log x^2+\log(1+4x),$$

d. h. $$\sin ax^2-\log(2-x^3)+\log(1+4x),$$

in welcher Form sie den Bedingungen des §. 288, I genügt.

3) Die Funktion $3\log(\sin x^2)-\log\sqrt{(x^{12}+2x^{16})}$ gibt nach Absonderung der höchsten theilenden Potenzen

$$3\log[x^2(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\text{etc.})^2]-\log[x^6\sqrt{(1+2x^4)}],$$

und alsdann nach den Gll. (49) und (51)

$$3\log(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\text{etc.})^2-\log\sqrt{(1+2x^4)},$$

in welcher Form sie die Anforderungen des §. 288, I erfüllt.

Bemerkung. Nach dem Vorhergehenden steht fest, dass eine Funktion normal ist, sobald sie die Anforderungen des §. 288, I entweder unmittelbar oder nach den in diesem §. angegebenen leicht ausführbaren Umformungen erfüllt. Ob aber umgekehrt keine Funktion normal sein könne, ohne diese Bedingung zu erfüllen, ist eine dnrch das Obige noch nicht erledigte Frage.

Die Entscheidung hierüber steht indess nicht in näherem Zusammenhange mit dem hier verfolgten Zwecke, welcher darauf hinausging 1) zu zeigen, wie man bei der Prüfung zu verfahren habe, ob und wie weit die für Ausdrücke von geschlossener Form gültigen Umformungsregeln auch auf unendliche Reihen ausgedehnt werden dürfen, indem wir diese Prüfung für die Haupt-Reihenform, d. h. für die nach ganzen Potenzen fortschreitenden Reihen, ausführten; und 2) eine lückenfreie Grundlage für die Differenzial-Rechnung zu liefern, zu welchem Zwecke es vorzugsweise darauf ankam, die Lehrsätze der nachfolgenden §§. 191 und 192 zu begründen. Ich darf mich daher überheben, hierorts auf den angeregten Gegenstand weiter einzugehen.

Da inzwischen dieser Gegenstand bisher von Anderen noch nicht einer Untersuchung unterworfen worden ist, und er nicht bloss wissenschaftliches

x^{-3}, deren Dignanden mit x zugleich verschwinden, so dass die erste Umformung desselben $\sqrt[6]{(x^{-5}.2+x^{-3}.3)}$ ist, welche als gleichbedeutend mit $\sqrt[6]{[x^{-5}(2+3x^2)]}$ unter Anwendung der Gl. (XI) $x^{-\frac{5}{6}}(2+3x^2)^{\frac{1}{6}}$ gibt.

Interesse hat, sondern auch in seinem weiteren Verfolge für die von *Cauchy* erfundene Residuen-Rechnung sehr geeignete Anhaltspunkte bietet, so benutze ich diese Gelegenheit, wenigstens das Hauptresultat mitzutheilen, und den Gang anzudeuten, den ich dabei genommen habe.

Es wurde 1) eine Entwickelungsform gesucht, welche die normale Entwickelungsform als besonderen Fall in sich schloss, aber auf alle, noch so gehäuften Verbindungen (normaler wie nicht normaler) einfacher Funktionen gleich anwendbar war, mit vorläufiger Ausschliessung der Additions- und Subtraktions-Verbindungen. Dabei ergab sich eine Summenreihe, in welcher die Glieder die Form

$$(\odot) \qquad Ax_\alpha\,(\log{}^{\mathrm{m}}x)^{\nu}(\log{}^{\mathrm{m}_1}x)^{\nu_1}(\log{}^{\mathrm{m}_2}x)^{\nu_2}\ \ldots$$

haben, wo A, α, ν, ν_1, ν_2, etc. von x unabhängige, sonst aber beliebige Ausdrücke vorstellen, und $\log{}^{\mathrm{m}}x$ den *m*ten Logarithmus von x bezeichnet, so dass $\log^1 x$ mit $\log x$, $\log^2 x$ mit $\log(\log x)$, $\log^3 x$ mit $\log\log\log x$ etc., gleichbedeutend ist. Im Falle der normalen Entwickelbarkeit fallen die logarithmischen Faktoren heraus, und es sind also dann ν, ν_1, ν_2, etc. der Null gleich zu denken. Hierauf folgte

2) die Untersuchung, wann eine Funktion, für welche eine Entwickelung von der eben angeführten Form existirt, nach blossen Potenzen von x entwickelt werden könne, ohne dass die dem ν, ν_1, ν_2, etc. entsprechenden Exponenten den Werth Null annehmen; so wie der Beweis, dass für eine Funktion, für welche eine Entwickelung nach gebrochenen, negativen oder imaginären Potenzen von x existirt, eine nach ganzen Potenzen von x geordnete unmöglich ist. Endlich wurden

3) in derselben Weise, wie es in §. 281—§. 286 mit normalen Funktionen geschehen ist, die algebraischen Summen, Produkte, Potenzen und Logarithmen solcher Funktionen untersucht, welche sich in Reihen mit Gliedern von der Form $(\odot)$ verwandeln lassen. Es ergab sich dabei, dass sich das Resultat allemal wiederum auf dieselbe Form bringen lasse, dass also jede Funktion ohne Ausnahme dieser Entwickelungsform fähig sei. Zugleich erlaubte das Resultat, die Bedingungen zu ermitteln, unter denen eine Entwikkelung nach ganzen Potenzen ausführbar sei. Man kommt dabei auf die Fälle zurück, welche in diesem und dem vorigen §. als Fälle normaler Entwickelbarkeit namhaft gemacht worden sind, so dass die in §. 288, I und in diesem §. angegebenen Bedingungen für die normale Entwickelbarkeit in der That nothwendige sind. Ausserdem kommt man auf zwei Funktionsformen, welche zwar eine Entwickelung nach ganzen Potenzen, aber nicht eine noch für $x = 0$ gültige, d. h. nicht eine normale, gestatten. Es sind dies die folgenden beiden Funktionen.

a) Die Funktion $m^{\log(x^{\mathrm{r}})}$, so oft m^{r} eine ganze Potenz von e ist. Man hat nämlich, insofern $m = e^{\log m}$ ist,

$$m^{\log(x^r)} = e^{\log m \, \log(x^r)},$$

also, wegen $\log m \, \log(x^r) = \log(x^{r \log m})$,

$$m^{\log(x^r)} = x^{r \log m} = x^{\log(m^r)};$$

und man erhält daher eine ganze Potenz von x, so oft $\log(m^r)$ eine ganze Zahl ist, d. h. so oft m^r eine ganze Potenz von e ist. Dass aber diese ganze Potenz nicht mehr für $x=0$ der obigen Funktion gleich ist, sieht man unmittelbar, da alsdann $x^{\log(m^r)} = 0$ wird, während $m^{\log(x^r)}$ für $x=0$ jeden Werth verliert

b) Die zweite Funktion, welche sich, ohne normal zu sein, nach ganzen Potenzen von x entwickeln lässt, ist $A^{\frac{\alpha}{x}}$, wofern nur A eine normale Funktion ist, welche für $x=0$ den Werth 1 annimmt.

Es lässt sich dies unter andern auf folgende Weise zeigen:

Ist $A = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 +$ in inf.,

und setzen wir $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 +$ etc. $= u$, und der grösseren Allgemeinheit wegen αx^r statt $\frac{\alpha}{x}$, so gibt der binomische Lehrsatz

(C) $$A^{\alpha x^r} = 1 + \alpha x^r u + {}^2(\alpha x^r) u^2 + {}^3(\alpha x^r) u^3 + \text{ etc.},$$

während ${}^n(\alpha x^r)$, d. h.

$$\frac{\alpha x^r(\alpha x^r - 1)(\alpha x^r - 2) \dots (\alpha x^r - n + 1)}{n!},$$

mittels Ausführung der Multiplikationen im Zähler nach Potenzen von x entwickelt, eine Reihe von der Form

$$\beta x^{nr} + \beta_1 x^{(n-1)r} + \beta_2 x^{(n-2)r} + \dots \beta_{n-1} x^r + \beta_n$$

liefert. Setzt man daher in (C) für die Coefficienten diese Reihen und für u, u^2, u^3, etc. deren (normale) Entwickelungen, so erhält man, wenn man durch Ausführung der Multiplikationen die ganze Reihe nach Potenzen von x ordnet, nur ein einziges Glied, in welchem das x den Exponenten $nr+n$ hat, nämlich das Glied

$$\frac{(\alpha a_1 a_n)^n}{n!} x^{nr+n}.$$

Es muss also nothwendig $nr+n$ Null oder eine absolute ganze Zahl sein, und mithin r einen reellen ganzen Werth haben, wenn die Entwickelung nur ganze Potenzen von x enthalten soll. Da nun, wenn r Null oder eine positive ganze Zahl ist, $A^{\alpha x^r}$ zu den schon im Früheren betrachteten normalen Funktionen gehört, so bleibt für r nur der Werth -1 übrig. Ist aber $r = -1$, wird das allgemeine Glied der Reihe (C), weil u^n die Form $x^n B$ annehmen kann (unter B eine normale mit x nicht zugleich verschwindende Funktion verstanden)

$${}^n(\alpha x^r) u^n = (\beta x + \beta_1 x^2 + \beta_2 x^3 + \dots \beta_{n-1} x^n) B,$$

und es erscheinen daher in der ganzen Entwickelung nur ganze Potenzen von x. Es ist dieselbe aber nicht normal, weil sie für $x=0$ sich auf

$$1+\alpha a_1+\frac{\alpha^2 a_1{}^2}{2!}+\frac{\alpha^3 a_1{}^3}{3!}+\ldots \text{ in inf.},$$

d. h. auf $e^{\alpha a_1}$ reducirt, und mithin von völlig bestimmtem Werthe ist, während $A^{\frac{\alpha}{x}}$ für $x=0$ gar keinen Werth hat *).

§. 290. *Zusatz.* Der Angabe in §. 288, III über den kleinsten Modulus von x, bis zu welchem mindestens die Convergenz der Entwickelung einer Funktion A reicht, lässt sich noch mit Bestimmtheit für viele Fälle hinzufügen, dass die Convergenz nicht über den Modulus derjenigen Werthe von x hinausreichen könne, für welche die in A vorkommenden Logarithmanden und Dignanden nicht-ganzer Potenzen verschwinden. Stellt nämlich B denjenigen unter den Logarithmanden und Dignanden vor, welcher am frühesten verschwindet, und geschieht dies für $x=\gamma$, so bemerke man, dass sowohl $\log B$, als die meisten der nicht-ganzen Potenzen von B in der Nähe von $B=0$ (sei es positiv-, negativ- oder imaginär-) unendlich gross werden. Es wird daher meistentheils auch die Funktion A für $x=\gamma-\varepsilon$ (unter ε etwas positiv unendlich kleines gedacht) einen unendlich grossen Werth annehmen. Ist dies der Fall (was der Anblick der Funktion sogleich zu erkennen gibt), so divergirt die Entwickelung von A, wenn noch Werth-Uebereinstimmung bis zu $x=\gamma$ vorhanden war, sicher für $x=\gamma-\varepsilon$. Fände nun Convergenz bis zu $x=\beta$ statt, und wäre β numerisch grösser als γ, so würde nach dem Früheren auch Convergenz statt

*) Die in Rede stehende Entwickelung ist für den besonderen Fall, in welchem $A=1+x$ und $\alpha=1$ ist, schon längere Zeit bekannt gewesen, und man hat die Eigenthümlichkeit, dass sie für $x=0$ den Werth e annimmt, benutzt, um zu beweisen, dass die Grenze von $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ für ein verschwindendes x gleich e sei. Man vermisst aber dabei den zur vollständigen Begründung dieser Behauptung nöthigen Beweis, dass die Entwickelung auch bei $x=0$ continuirlich sei, und dass dieselbe in der Nähe von $x=0$ wirklich den Werth von $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ habe — was um so nöthiger ist, als letzteres dem Obigen nach bei $x=0$ selbst nicht der Fall ist.

finden für alle Werthe von x, deren Modulus kleiner als der von β ist, mithin auch der Voraussetzung zuwider für $x = \gamma - \varepsilon$ *).

§. 291. *Lehrsatz.* Jede Funktion von x lässt sich, nachdem in derselben x mit $x+h$ vertauscht worden ist, normal nach Potenzen von h entwickeln, und zwar in der Regel für jeden beliebigen Werth des Veränderlichen x, indem nur für einzelne besondere Werthe von x eine Ausnahme eintreten kann. Diese besonderen Werthe sind diejenigen, welche in der ursprünglichen Funktion

*) Eine Regel, welche sich darauf bezieht, wie man die Convergenzgrenzen für die nach ganzen Potenzen fortschreitenden Entwickelungen aus der Beschaffenheit der unentwickelten Funktion bestimmen könne, besassen wir bisher nur von *Cauchy*.

Diese *Cauchy*'sche Regel lässt sich wie folgt aussprechen:

„Jeder Ausdruck A, welcher von x abhängig ist, kann in eine convergente nach ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandelt werden, so lange der Modulus von x kleiner ist, als der kleinste Modulus derjenigen Werthe von x, für welche sowohl A als eine andere mit A in einem bestimmten Zusammenhange stehende Funktion B, welche man in der höheren Analysis mit dem Namen „erster Differenzial-Coefficient“ belegt, und welche sich jederzeit aus A leicht herleiten lässt, aufhört, endlich oder continuirlich zu sein.“

Mit den Fällen, in denen die Funktion für einen Werth α von x aufhört endlich zu sein, sind nach der im Texte angewendeten Sprechweise diejenigen gemeint, in denen die Funktion für die Nachbarwerthe von α einen unendlich grossen Werth erhält, und in denen daher meistentheils die Funktion für $x = \alpha$ werthlos wird.

Dieselbe Regel würde, in unsere Redeweise übertragen, etwa so lauten:

„Die Funktion A hat eine nach ganzen Potenzen von x geordnete convergente Entwickelung, so lange der Modulus von x kleiner ist, als der kleinste Modulus derjenigen Werthe von x, für welche ein Logarithmand oder der Dignand einer Potenz verschwindet, deren Exponent negativ, oder positiv gebrochen und dabei kleiner als Eins ist.“

Dass diese Regel in vielen Fällen auf richtige Convergenzgrenzen führen wird, ist aus dem Obigen klar. Ebenso aber, dass sie dieselben oft zu gross angeben wird, wie dies z. B. bei der Funktion $(1+x)^{\frac{5}{2}}$ der Fall ist, deren Entwickelung nach der angegebenen Regel für jeden Werth von x convergiren müsste, da sowohl das A als das B (welches hier gleich $\frac{5}{2}(1+x)^{\frac{3}{2}}$ ist) durchgehend endlich und continuirlich bleibt; während in der That die Convergenz nur bis zu $x = 1$ reicht.

(d. h. ehe man x mit $x+h$ vertauscht hat) einen Logarithmanden oder den Dignanden einer nicht-ganzen Potenz zum Verschwinden bringen würden.

Beweis. Es stelle f_x eine beliebige Funktion von x vor, also f_{x+h} diejenige Funktion, um deren Entwickelbarkeit es sich handelt. Nach §. 288 ist alsdann in der That f_{x+h} jedesmal einer normalen Entwickelung nach Potenzen von h fähig, wenn in dieser Funktion weder ein Logarithmand, noch ein Dignand einer nicht-ganzen Potenz für $h=0$ verschwindet. Es kann aber f_{x+h} keinen Logarithmanden oder Dignanden enthalten, wenn nicht ein solcher auch in f_x vorhanden ist; und stellt u_x einen solchen in f_x vorkommenden Logarithmanden oder Dignanden vor, so geht derselbe in der Funktion f_{x+h} in u_{x+h} über. Soll nun u_{x+h} für $h=0$ verschwinden, so muss, da u_{x+h} für $h=0$ sich in u_x verwandelt, $u_x=0$ sein. Es kann also die aus dem u_x entspringende Ausnahme für die Entwickelbarkeit von f_{x+h} nur für einzelne besondere Werthe von x eintreten, nämlich für die Wurzelwerthe der Gleichung $u_x=0$, und die Behauptung des Lehrsatzes findet sich folglich vollkommen gerechtfertigt *).

*) Auf den Lehrsatz, dass f_{x+h} höchstens für einzelne besondere Werthe von x aufhören kann, normal entwickelbar zu sein, muss die Differenzialrechnung gestützt werden, wenn sie den Anforderungen mathematischer Strenge Genüge leisten soll, mag dieselbe in der Form der *Lagrange*'schen Funktionstheorie (der sogenannten Ableitungsrechnung) oder in der Form der Grenzmethode entwickelt werden. Soviel ich weiss, hat bisher aber ein völlig genügender Beweis für diesen Lehrsatz nicht existirt. *Lagrange* hat zuerst die Nothwendigkeit ausgesprochen, denselben zu beweisen, jedoch nur einen unvollkommenen Beweis dafür geliefert. Da dieser Beweis sich aber noch hin und wieder in Lehrbüchern aufgenommen findet, so nehme ich hier Gelegenheit, auf die Mängel desselben aufmerksam zu machen.

Zunächst sucht *Lagrange* nachzuweisen, dass die Entwickelung von f_{x+h} nicht allgemein, sondern höchstens für einzelne besondere Werthe von x, positiv gebrochene Potenzen von h enthalten könne, indem er folgendermassen schliesst: Wäre

$$f_{x+h} = a + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots . p h^{\frac{m}{n}} + \ldots ,$$

so erhielte man zuvörderst, in dieser Gleichung $h=0$ setzend, $f_x = a$,

§. 292. *Lehrsatz.* Jede Funktion von x, bei deren Bildung keine anderen als die bisher betrachteten Rechnungsoperationen

und es würde folglich wegen der Mehrdeutigkeit der Potenz $h^{\frac{m}{n}}$ die vorstehende Reihe mehr Werthe, als ihr erstes Glied, also f_{x+h} mehr Werthe als f_x haben. Ist nun das x und das h unbestimmt, so lässt sich unter $x+h$ in dem f_{x+h} dasselbe denken, was man sich ein anderes Mal unter dem x in dem f_x gedacht hat; es würde also gewissermassen eine und dieselbe Funktion heute soviel und morgen soviel Werthe haben. — Allein dass die Mehrdeutigkeit einzelner Glieder nicht auf die Mehrdeutigkeit der ganzen Reihe zu schliessen berechtigt, haben wir in §. 227 und 231 an der Exponentialreihe gesehen, welche für reelle ganze Werthe von x trotz der Vieldeutigkeit der Glieder nur einen einzigen Werth hat. Und warum sollte es im entgegengesetzten Falle nicht möglich sein, dass jene Reihe mit gebrochenen Potenzen dem Werthe von f_{x+h} gleichkommen werde, wenn man diesen gebrochenen Potenzen bestimmte ihrer Werthe, z. B. die Hauptwerthe, beilegt?

Nächstdem schliesst *Lagrange*, dass die Entwickelung von f_{x+h} keine negative Potenzen von h enthalten könne, weil sonst die Reihe für $h=0$ einen unendlich grossen Werth annehmen würde, während f_{x+0}, d. h. die gegebene Funktion f_x selbst, in der That nur für besondere Werthe von x eines unendlich grossen Werthes fähig sein könne.

Wenn wir nun auch zugeben wollten, dass aus dem obigen Grunde eine Entwickelung nach positiv-gebrochenen Potenzen von h unmöglich sei, so wie, dass aus dem zuletzt angeführten Grunde negative Potenzen von h in der Entwickelung nicht vorkommen können (obwohl aus demselben zunächst nur folgt, dass die Entwickelung für einen besonderen Werth von h, nämlich für $h=0$, nicht mehr den Werth der Funktion darzustellen vermöge), so ist doch die Folgerung, welche *Lagrange* daraus zieht, dass nämlich eine Entwickelung nach positiven ganzen Potenzen existiren müsse, völlig ungerechtfertigt, da noch der Beweis fehlt 1) dass eine Entwickelung mit imaginären Potenzen von h unmöglich sei, und 2) dass überhaupt eine Entwickelung nach Potenzen von h vorhanden sein müsse. Dass es aber Entwickelungen nach imaginären Potenzen von h in einzelnen Fällen wirklich gibt, und dass in anderen Fällen Entwickelungen nach Potenzen von h überhaupt unmöglich sind, ist Thatsache.

Ueberdies ist bei diesem Beweise gar nicht gefragt, ob die auf irgend einem Wege hergestellte Entwickelung auch zwischen endlichen Grenzen von h convergiren, und den Werth der Funktion behalten werde.

angewendet worden sind, ist bei allen Werthen von x, welche die Funktion nicht werthlos machen, continuirlich.

Beweis. Stellt f_x die gegebene Funktion vor, so ist dieselbe zufolge der Erklärungen in §. 155 und 156 für jeden Werth von x continuirlich, für welchen $f_{x+h}-f_x$ mit h zugleich (reell- oder imaginär-) unendlich klein wird, oder — da unendlich kleine Werthe immer einen unendlich kleinen Modulus haben — für jeden Werth von x, für welchen der Modulus von $f_{x+h}-f_x$ mit h zugleich unendlich klein wird.

Bezeichnen nun $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$ etc. diejenigen einzelnen Werthe von x, für welche nach dem vorigen §. f_{x+h} sich nicht normal entwickeln lässt, und werden vorläufig diese Werthe $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$ etc. ausgeschlossen, so kann man

$$f_{x+h} = a + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

setzen, und hat mithin, da diese Gleichung noch für $h = 0$ besteht, und für diesen Werth von h, $f_x = a$ liefert,

$$f_{x+h} - f_x = a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \ldots \text{ in inf.}$$
$$= h(a_1 + a_2 h + a_3 h^2 + \ldots \text{ in inf.}).$$

Da ferner für die Entwickelung von f_{x+h}, und folglich auch für die Reihe $a_1 + a_2 h + a_3 h^2 + \ldots$ in inf. die Grenzwerthe von h, zwischen welchen Convergenz statt findet, nicht unendlich klein sind, so gibt es nach §. 169, wenn die Coefficienten a_1, a_2, a_3, etc. reell sind, einen endlichen absoluten Werth v, der so beschaffen ist, dass, so oft der numerische Werth von h zwischen 0 und v liegt, numerisch genommen,

$$a_1 > a_2 h + a_3 h^2 + \text{ etc.},$$

also, gleichfalls numerisch genommen,

$$f_{x+h} - f_x < 2a_1 h$$

wird. Nimmt man daher h positiv oder negativ unendlich klein, so wird der numerische Werth von $2a_1 h$, und folglich der von $f_{x+h}-f_x$ in der That gleichfalls unendlich klein.

Sollten die Coefficienten der Entwickelung von f_{x+h} imaginär, etwa $a_1 = b_1 + c_1 i$, $a_2 = b_2 + c_2 i$, $a_3 = b_3 + c_3 i$, etc. sein, so hat man $a_1 + a_2 h + a_3 h^2 + \ldots$ in inf. $= b_1 + b_2 h + b_3 h^2 + \ldots$ in inf. $+ i(c_1 + c_2 h + c_3 h^2 +$ in inf.) und folglich, da für alle Werthe von h, deren numerischer Werth kleiner als ein endlicher Werth v ist, die beiden vorstehenden

Reihen resp. numerisch kleiner als $2b_1$ und $2c_1$ werden, wenn man durch (h) den Modulus von h bezeichnet,

$$\text{Mod.}(f_{x+h}-f_x) < 2(h)\sqrt{(b_1{}^2+c_1{}^2)} \text{ d. h. } < 2(h)\,\text{Mod.}\,a_1.$$

Für unendlich kleine Werthe von (h) wird aber zugleich $2(h)\,\text{Mod.}\,a_1$, und folglich auch $\text{Mod.}(f_{x+h}-f_x)$ verschwindend klein. Mithin ist in der That f_x continuirlich, so oft eine normale Entwickelung für f_{x+h} existirt, d. h. überall, wo x mit keinem der Werthe $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc. zusammenfällt.

Da es sich von selbst versteht, dass f_x bei denjenigen unter den Werthen $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc. discontinuirlich ist, welche die Funktion werthlos machen, so bedarf es zur vollständigen Begründung des Lehrsatzes nur noch des Beweises, dass die Continuität bei denjenigen unter den Werthen $x_{,}$, $x_{,,}$, $x_{,,,}$, etc. nicht unterbrochen werde, für welche f_x noch eine Bedeutung behält. Es bleiben daher, insofern verschwindende Logarithmanden die Funktion jederzeit werthlos machen, hier nur diejenigen Fälle zu betrachten übrig, in denen durch das Verschwinden eines der in f_x vorkommenden Dignanden Potenzen von Null resultiren, welche eine Bedeutung haben, d. h. (nach §. 230) Potenzen, welche entweder den Werth Null, oder falls gleichzeitig der Exponent verschwindet, den Werth Eins erhalten.

Ist nun u_x ein solcher Dignand, etwa der Dignand der Potenz $u_x{}^v$, und wird $u_x = 0$ für $x = x_{,}$, so ist natürlich u_{x+h} noch für $x = x_{,}$ normal entwickelbar; es darf daher dem Obigen nach

$$u_{x+h} = u_x + k_1h + k_2h^2 + k_3h^3 + \ldots \text{ etc.}$$

gesetzt werden, und folglich, wenn man hier $x_{,}$ statt x setzt, wegen

$$u_{x_,} = 0, \qquad u_{x_,+h} = h^r A,$$

wo r eine positive ganze Zahl ist und A nicht mit h zugleich verschwindet. Es geht demnach $u_x{}^v$, wenn man v' den Werth nennt, in den sich v verwandelt, sobald x mit $x_{,}+h$ vertauscht wird, für $x = x_{,}+h$ über in $h^{rv'}A^{v'}$. Setzt man hierauf in f_x überall z statt $h^{rv'}$, so lässt sich, wenn für $x = x_{,}$ keine weiteren Dignanden verschwinden, sobald man vorläufig das z wie einen von h unabhängigen Ausdruck behandelt, $f_{x_,+h}$ normal entwickeln. Man erhalte dadurch

$$(195) \qquad f_{x_,+h} - f_{x_,} = ah + a_1h^2 + a_2h^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

Es kommt mithin nur darauf an, zu zeigen, dass diese Reihe, in welcher die Coefficienten noch Funktionen von z sein werden, für

unendlich kleine Werthe von h unendlich klein bleibt. Zu dem Ende nennen wir p den Werth, welchen $h^{rv'}$ für $h=0$ annimmt (so dass also p entweder die Null oder die Eins vorstellt), und setzen $h^{rv'} = p+k$, wo k für ein unendlich kleines h unendlich klein wird, weil nach §. 230 0^x nichts anderes als die Grenze von h^x für ein verschwindend kleines h vorstellt. Ferner bemerke man, dass α, α_1, α_2, etc. nach Potenzen von k normal entwickelt gedacht werden können*), also bei $z=p$ continuirlich sein müssen, so dass, wenn α', α_1', α_2', etc. die Werthe von α, α_1, α_2, etc. für $z=p$ sind, und $\alpha=\alpha'+\varepsilon$, $\alpha_1=\alpha_1'+\varepsilon_1$, $\alpha_2=\alpha_2'+\varepsilon_2$, etc. gesetzt wird, die Glieder ε, ε_1, ε_2 etc. unendlich klein sein werden, und die obige Gleichung übergeht in

(196) $f_{x_1+h} - f_{x_1} = \alpha'h + \alpha_1'h^2 + \alpha_2'h^3 + \dots + \varepsilon h + \varepsilon_1 h^2 + \varepsilon_2 h^3 + \dots$

Hätte man nun vor der Entwickelung von f_{x_1+h} in f_x für z den Werth p gesetzt, so hätte man in f_{x_1+h} eine normale Funktion gehabt, und würde

$$f_{x_1+h} - f_{x_1} = \alpha'h + \alpha_1'h^2 + \alpha_2'h^3 + \dots$$

erhalten haben; es wird also die Reihe $\alpha'h + \alpha_3'h^2 + \alpha_2'h^3 +$ etc. mit h zugleich unendlich klein vorausgesetzt werden dürfen, und folglich, da offenbar auch $\varepsilon h + \varepsilon_1 h^2 + \varepsilon_2 h^3 +$ etc. mit h zugleich

*) Die normale Entwickelung dieser Coefficienten α, α_1, α_2, etc. würde nämlich nur dann unmöglich werden können, wenn dieselben Potenzen enthielten, deren Dignanden mit k zugleich verschwinden. Aus den §§. 281—286 und insbesondere aus den Gleichungen (186) (187) (190) (192) (194) ist aber zu ersehen, dass die Coefficienten α, α_1, α_2, etc. im Allgemeinen Summen von Produkten sind, in denen die Faktoren unter Umständen theilweise Binomial-Coefficienten, im übrigen aber ganze Potenzen der Coefficienten derjenigen Reihen sind, in welche sich die nächst einfacheren Bestandtheile der Funktion entwickeln lassen, also zuletzt ganze Potenzen von den schon in der gegebenen Form der Funktion vorhandenen Bestandtheilen. Kommen also ausnahmsweise Potenzen der erwähnten Art in α, α_1, α_2, etc. vor, so mussten sie, wenn auch mit anderen Exponenten, schon in f_x enthalten sein. Wäre nun z. B. s ein solcher Exponent, der, wenn er von x abhängig sein sollte, für $x=x_1$ in s' übergehen mag, so hätte man nur nöthig gehabt, ursprünglich statt $h^{rv'}$ die Potenz $h^{rv's'}$ herauszusondern und unter dem obigen z zu denken, um den Fall vermieden zu sehen, wo α, α_1, α_2, etc. aufhören, normal nach k entwickelbar zu sein.

unendlich klein wird, in der That die Reihe (195) nur von unendlich kleinem Werthe sein können.

Sollte für $x = x,$ ausser dem u_x noch ein zweiter Dignand s_x verschwinden, so hat man neben der durch z vorgestellten Potenz $h^{rv'}$ in f_{x+h} noch eine zweite Potenz von h einzuführen, welche in demselben Verhältnisse zu der Potenz von s_x steht, wie das z zu der Potenz von u_x. Bezeichnen wir diese dem z analoge Potenz von h durch y, und sehen wir sie einstweilen, wie oben das z, als unabhängig von h an, so werden in Gl. (195) die Coefficienten α, α_1, α_2, etc. noch das y enthaltend gedacht werden müssen. Und wenn man den Werth, welchen y für $h = 0$ annimmt, p' nennt, und $y = p' + k'$ setzt; wenn ferner (α'), (α_1'), (α_2'), etc., (ε), (ε_1), (ε_2), etc. die Werthe vorstellen, welche α', α_1', α_2', etc. ε, ε_1, ε_2, etc. für $y = p'$ annehmen, und wenn $\alpha' = (\alpha') + \varepsilon'$, $\alpha_1' = (\alpha_1') + \varepsilon_1'$, $\alpha_2' = (\alpha_2') + \varepsilon_2'$, etc. $\varepsilon = (\varepsilon) + \varepsilon''$, $\varepsilon_1 = (\varepsilon_1) + \varepsilon_1''$, etc. gesetzt wird: so lässt sich im jetzigen Falle die Gleichung (195) ersetzen durch

$$\begin{aligned} f_{x,+h} - f_{x,} = {} & (\alpha')h + (\alpha_1')h^2 + (\alpha_2')h^3 + \dots \\ & + \varepsilon' h + \varepsilon_1' h^2 + \varepsilon_2' h^3 + \dots \\ & + (\varepsilon)h + (\varepsilon_1)h^2 + (\varepsilon_2)h^3 + \dots \\ & + \varepsilon'' h + \varepsilon_1'' h^2 + \varepsilon_2'' h^3 + \dots \end{aligned}$$

Da aber k', ε_1', ε_2', ε_2', etc., ε'', ε_1'', etc. unendlich klein sind, so lässt sich wiederum aus dem vorstehenden Reihen-Ausdrucke schliessen, dass auch jetzt noch $f_{x,+h} - f_{x,}$ unendlich klein, also $f_{x,+h}$ ein Nachbarwerth von $f_{x,,}$ sein muss. Es steht folglich fest, dass die Continuität einer Funktion von x, von welcher Beschaffenheit sie auch sein möge (wenn ihre Bildung nur auf keinen anderen als den bisher betrachteten Zusammensetzungsweisen beruht), bloss bei solchen Werthen von x unterbrochen werden kann, welche die Funktion werthlos machen.

Zulage.

I.

Beziehungen zwischen den analytischen und den geometrischen Sinus und Cosinus.

§. 1. *Lehrsatz.* Ist der geometrische Sinus und Cosinus eines Winkels z, der gleich oder kleiner als 90^0 ist, respective gleich dem analytischen Sinus und Cosinus einer Zahl x, die gleich oder kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so ist auch der geometrische Sinus und Cosinus von kz respective gleich dem analytischen Sinus und Cosinus von kx für jeden Werth von k, der zwischen 0 und 1 liegt.

Beweis. Bezeichnen wir den analytischen Sinus und Cosinus wie bisher durch sin und cos, den geometrischen Sinus und Cosinus dagegen durch Sin und Cos, so ist zu beweisen, dafs aus $\mathrm{Sin}\, z = \sin x$ und $\mathrm{Cos}\, z = \cos x$ folge: $\mathrm{Sin}\, kz = \sin kx$, $\mathrm{Cos}\, kz = \cos kx$, wofern nur z und x positiv und respective kleiner als 90^0 und $\frac{1}{2}\pi$ sind, und k zwischen Null und Eins liegt.

Die Gleichung

$$(1) \qquad \cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

liefert, wenn man $u = v = \frac{1}{2}w$ nimmt, und darauf achtet, dass $\sin w^2 + \cos w^2 = 1$ ist,

$$\sin\tfrac{1}{2}w = \pm\sqrt{\frac{1-\cos w}{2}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}w = \pm\sqrt{\frac{1+\cos w}{2}},$$

oder, wenn $w \overline{\gtrless} \frac{1}{2}\pi$ gedacht wird, weil dann $\sin\frac{1}{2}w$ und $\cos\frac{1}{2}w$ positiv sein müssen,

$$(2) \qquad \sin\tfrac{1}{2}w = +\sqrt{\frac{1-\cos w}{2}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}w = +\sqrt{\frac{1+\cos w}{2}}.$$

Die für geometrische Sinus und Cosinus geltende Gleichung

$$(3) \qquad \mathrm{Cos}(u_1 + v_1) = \mathrm{Cos}\, u_1 \,\mathrm{Cos}\, v_1 - \mathrm{Sin}\, u_1 \,\mathrm{Sin}\, v_1$$

giebt in gleicher Weise, wenn $u_1 = v_1 = \frac{1}{2} w_1$, und $w_1 \overline{\gtrless} 90^0$ genommen wird,

$$(4)\quad \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2} w_1 = + \sqrt{\frac{1-\mathrm{Cos}\,w_1}{2}},\ \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2} w_1 = + \sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}\,w_1}{2}}.$$

Setzt man nun $w = x$, $w_1 = z$, so ergiebt sich aus (2) und (4) wegen $\mathrm{Sin}\,z = \sin x$, und $\mathrm{Cos}\,z = \cos x$,

$$(5)\qquad \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2} z = \sin \tfrac{1}{2} x,\ \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2} z = \cos \tfrac{1}{2} x.$$

Setzt man ferner in (2) und (4) $w = \frac{1}{2} x$, $w_1 = \frac{1}{2} z$, so erhält man in Folge der Gleichungen (5)

$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{4} z = \sin \tfrac{1}{4} x,\ \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{4} z = \cos \tfrac{1}{4} x.$$

In Gemässheit dieser Gleichungen geben dann die Gleichungen (2) und (4), $w = \frac{1}{4} x$, $w_1 = \frac{1}{4} z$ setzend,

$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{8} z = \sin \tfrac{1}{8} x,\ \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{8} z = \tfrac{1}{8} x,$$

und so fortfahrend, allgemein

$$\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2^n} z = \sin \frac{1}{2^n} x,\ \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2^n} z = \cos \frac{1}{2^n} x$$

für jeden absoluten ganzen Zahlenwerth von n.

Wählen wir nun für n eine beliebige, aber sehr grosse Zahl, und setzen

$$\frac{1}{2^n} = \alpha,$$

so dass mit α zugleich αx und αz sehr kleine Zahlen werden, so gehen die letzten Gleichungen über in

$$(6)\qquad \mathrm{Sin}\,\alpha z = \sin \alpha x,\ \mathrm{Cos}\,\alpha z = \cos \alpha x,$$

und man hat unter andern gleichzeitig (statt n, $n-1$ nehmend)

$$(7)\qquad \mathrm{Sin}\,2\alpha z = \sin 2\alpha x,\ \mathrm{Cos}\,2\alpha z = \cos 2\alpha x.$$

Vergleicht man ferner die Gleichungen (1) und (3), sowie die Gleichungen

$$(8)\quad \begin{cases} \sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \\ \mathrm{Sin}(u_1 + v_1) = \mathrm{Sin}\,u_1\,\mathrm{Cos}\,v_1 + \mathrm{Cos}\,u_1\,\mathrm{Sin}\,v_1, \end{cases}$$

so findet man, $u = 2\alpha x$, $v = \alpha v$, $u_1 = 2\alpha z$, $v_1 = \alpha z$ setzend, in Folge der Gleichungen (6) und (7),

$$\mathrm{Sin}\,3\alpha z = \sin 3\alpha x,\ \mathrm{Cos}\,3\alpha z = \cos 3\alpha x,$$

und hiernach aus den Gleichungen (3, 4, 8), $v = \alpha x$, $v_1 = \alpha z$ belassend, für u und u_1 aber nach einander resp. $3\alpha x$ und $3\alpha z$, $4\alpha x$ und $4\alpha z$, $5\alpha x$ und $5\alpha z$, etc. setzend, die analytischen

Sinus und Cosinus von $4\alpha x$, $5\alpha x$, $6\alpha x$, etc. resp. gleich den geometrischen Sinus und Cosinus von $4\alpha z$, $5\alpha z$, $6\alpha z$ etc. und allgemein

$$(9)\qquad \mathrm{Sin}\,\mu\alpha z = \sin\mu\alpha x,\quad \mathrm{Cos}\,\mu\alpha z = \cos\mu\alpha x,$$

wo μ die Werthe 1, 2, 3, 4 etc. haben kann und im Maximum vorerst denjenigen Werth haben mag, welcher $\mu\alpha = 1$ macht.

Um nun zu erkennen, dass auch $\mathrm{Sin}\,kz = \sin kx$ sei, wenn k eine beliebige rationale oder irrationale zwischen 0 und 1 liegende Zahl vorstellt, bemerke man, dass sich $k = \mu'\alpha + \beta$ setzen lässt, wo μ' eine ganze Zahl ist, und β zwischen 0 und α liegt, und dass dann aus (8), für u, u_1, v, v_1 resp. $\mu'\alpha x$, $\mu'\alpha z$, βx, βz setzend, in Folge der Gleichungen (9) sich

$$\mathrm{Sin}\,(\mu'\alpha + \beta)z = \sin(\mu'\alpha + \beta)x \quad (\text{d. h. } \mathrm{Sin}\,kz = \sin kx)$$

ergiebt, sobald sich nachweisen lässt, dass auch

$$\sin\beta x = \mathrm{Sin}\,\beta z,\quad \cos\beta x = \mathrm{Cos}\,\beta z$$

sei. — Wäre nun $\sin\beta x \gtrless \mathrm{Sin}\,\beta z$, etwa $\mathrm{Sin}\,\beta z = \sin\beta x + p$, wo vorerst p positiv gedacht werden mag, so müsste wegen des stetigen Wachsens von $\sin u$, wenn u von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ zunimmt, ein positiver Werth γ existiren, welcher genau $\sin(\beta + \gamma)x = \sin\beta x + p$, also

$$\sin(\beta + \gamma)x = \mathrm{Sin}\,\beta z$$

machte, und dies ist aus folgenden Gründen unmöglich.

Ebenso wie aus $\sin x = \mathrm{Sin}\,z$ und $\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Cos}\,z$ die Gleichungen (6) und (9) abgeleitet worden sind, lassen sich aus den Gleichungen (6) wiederum die Gleichungen

$$\mathrm{Sin}\,\alpha_1\alpha z = \sin\alpha_1\alpha x,\quad \mathrm{Cos}\,\alpha_1\alpha z = \cos\alpha_1\alpha x,$$

$$\mathrm{Sin}\,\mu_1\alpha_1\alpha z = \sin\mu_1\alpha_1\alpha x,\quad \mathrm{Cos}\,\mu_1\alpha_1\alpha z = \cos\mu_1\alpha_1\alpha x$$

herleiten, in denen μ_1 eine beliebige absolute ganze Zahl und α_1 eine beliebige hohe ganze Potenz von $\frac{1}{2}$ vorstellt, und dabei wird sich μ_1 und α_1 stets so wählen lassen, dass $\mu_1\alpha_1\alpha$ zwischen β und $\beta + \gamma$ zu liegen kommt. Bezeichnen wir einen solchen Werth von $\mu_1\alpha_1\alpha$ durch δ, so haben wir $\mathrm{Sin}\,\delta z = \sin\delta x$. Weil aber $\delta < \beta + \gamma$ ist, so hat man $\sin\delta x < \sin(\beta + \gamma)x$, und es würde daher, wenn $\sin(\beta + \gamma)x = \mathrm{Sin}\,\beta z$ wäre, $\sin\delta x < \mathrm{Sin}\,\beta z$, und somit auch $\mathrm{Sin}\,\delta z < \mathrm{Sin}\,\beta z$ sein müssen, während doch $\delta > \beta$ vorausgesetzt wurde, d. h. $\delta z > \beta z$ sein soll. Dies widerspricht aber dem Gesetze, dass die geometrischen Sinus spitzer Winkel

mit dem Winkel zugleich wachsen, mithin kann nicht $\mathrm{Sin}\,\beta z > \sin\beta x$ gewesen sein. In ähnlicher Weise wird sich folgern lassen, indem man sich p negativ denkt, dass nicht $\mathrm{Sin}\,\beta z < \sin\beta x$ sein könne; und es ist daher in der That $\sin\beta x = \mathrm{Sin}\,\beta z$.

Da ferner

$$\cos\beta x = +\sqrt{[1-(\sin\beta x)^2]},\ \mathrm{Cos}\,\beta z = \sqrt{[1-(\mathrm{Sin}\,\beta z)^2]}$$

ist, so folgt wegen $\sin\beta x = \mathrm{Sin}\,\beta z$, auch $\cos\beta x = \mathrm{Cos}\,\beta z$, und somit

$$\sin kx = \mathrm{Sin}\,kz.$$

In Folge dieser Gleichung liefern die Gleichungen

$$\cos kx = +\sqrt{[1-(\sin kx)^2]},\ \mathrm{Cos}\,kz = \sqrt{[1-(\sin kz)^2]}$$

aber auch

$$\cos kx = \mathrm{Cos}\,kz,$$

mithin ist der Lehrsatz streng erwiesen.

§. 2. *Lehrsatz.* Der geometrische Sinus und Cosinus eines Winkels ist allemal gleich dem analytischen Sinus und Cosinus derjenigen Zahl, welche man erhält, wenn man die Zahl der Grade des Winkels mit $\frac{\pi}{180^0}$ multiplicirt, d. h. es ist, wenn m sich auf den Winkelgrad als Einheit bezieht,

$$\mathrm{Sin}\,m = \sin\frac{\pi m}{180^0},\ \mathrm{Cos}\,m = \cos\frac{\pi m}{180^0}.$$

Beweis. Da $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$, $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$ und $\mathrm{Sin}\,90^0 = 1$, $\mathrm{Cos}\,90^0 = 1$ ist, so hat man $\sin\frac{1}{2}\pi = \mathrm{Sin}\,90^0$, $\cos\frac{1}{2}\pi = \mathrm{Cos}\,90^0$, und folglich nach dem vorhergehenden Lehrsatze $\sin\frac{1}{2}\pi k = \mathrm{Sin}\,90^0 k$, $\cos\frac{1}{2}\pi k = \mathrm{Cos}\,90^0 k$ für jeden Werth von k zwischen 0 und 1. Da ferner für $90^0 k = m$, $\frac{1}{2}\pi k = \frac{\pi m}{180^0}$ wird, so fallen die letzten zwei Gleichungen mit denen des Lehrsatzes zusammen, und es ist folglich die Richtigkeit desselben für alle Winkel zwischen 0^0 und 90^0 erwiesen.

Wenn nun $u_1 = 90^0$, $v_1 = m$, $u = \frac{1}{2}\pi$, $v = \frac{\pi m}{180^0}$ gesetzt und dabei $m = 90^0$ oder zwischen 0^0 und 90^0 liegend angenommen wird, so werden in den Gleichungen (1 und 3), so wie in den Gleichungen (8) die Ausdrücke auf der rechten Seite nach dem eben Bewiesenen einander gleich. Es müssen daher auch die Ausdrücke auf den linken Seiten in beiden Gleichungspaaren einander gleich sein, d. h. es ist

$$\operatorname{Sin}(90^0+m)=\sin\frac{\pi}{180^0}(90^0+m),\quad \operatorname{Cos}(90^0+m)=\cos\frac{\pi}{180^0}(90^0+m),$$

und es gelten sonach die Gleichungen des Lehrsatzes noch von $m=90$ bis einschliesslich $m=180$.

Durch wiederholte Anwendung der Gleichungen (1, 3 u. 8) erhellt dann auch auf demselben Wege die Richtigkeit der aufgestellten Gleichungen für jeden noch grösseren Winkel; und wenn man von negativen Winkeln sprechen darf, wegen der Uebereinstimmung der Gleichungen

$$\sin-x=-\sin x,\ \cos-x=\cos x \text{ u. } \operatorname{Sin}-x=-\operatorname{Sin} z,\ \operatorname{Cos}-z=\operatorname{Cos} z,$$

auch für negative Winkel. Hiernach ist man also in den Stand gesetzt, mit Hülfe der Tafeln für die geometrischen Sinus und Cosinus sehr einfach die analytischen Sinus und Cosinus reeller Zahlen zu bestimmen, sowie für gegebene Werthe von $\sin x$ und $\cos x$, wenn sie numerisch $\overline{\gtrless}\ 1$ sind, die Werthe von x aufzufinden. Und umgekehrt lassen sich die Sinus- und Cosinus-Reihen benutzen, jeden geometrischen Sinus und Cosinus zu berechnen.

Zusatz. Bezeichnet man die geometrischen Tangenten durch Tang., so erhält man noch durch Division der beiden Gleichungen des Lehrsatzes: $\operatorname{Tang} m=\operatorname{tang}\frac{\pi m}{180^0}$.

II.

Von der Umkehrung der Reihen.

§. 3. *Erklärung.* Bezeichnet man den Werth einer nach Potenzen von x fortlaufenden Reihe durch y, und lässt sich alsdann das x in eine nach Potenzen von y fortlaufende Reihe verwandeln, so nennt man die letzte Reihe die Umkehrung der ersten.

§. 4. *Darstellung der umgekehrten Reihe, wenn die umzukehrende Reihe nach positiven ganzen Potenzen fortschreitet, und für $x=0$ verschwindet.* Die geforderte Umkehrung kann, falls eine solche mit Fortschritt wiederum nach ganzen Potenzen existirt, allemal durch die Methode der unbestimmten Coëfficienten ausgeführt werden.

Ist z. B. gegeben die Reihe

(10) $$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots,$$

so setze man vorerst mit unbestimmten Coëfficienten

(11) $$x = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \ldots,$$

Man sieht zunächst, dass $b_0 = 0$ seyn wird, weil aus (10) folgt, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ werden muss. Setzt man dann aus (10) den Werth von y in die Gleichung (11), so ergiebt sich, insofern nach dem polynomischen Lehrsatze

$$y^2 = a_1^2 x^2 + 2 a_1 a_2 x^3 + (a_2^2 + 2 a_1 a_3) x^4 + (2 a_1 a_4 + 2 a_2 a_3) x^5$$
$$+ (a_3^2 + 2 a_1 a_5 + 2 a_2 a_4) x^6 + \ldots$$
$$y^3 = a_1^3 x^3 + 3 a_1^2 a_2 x^4 + (3 a_1 a_2^2 + 3 a_1^2 a_3) x^5$$
$$+ (a_2^3 + 6 a_1 a_2 a_3 + 3 a_1^2 a_4) x^6 + \ldots$$
$$y^4 = a_1^4 x^4 + 4 a_1^3 a_2 x^5 + (6 a_1^2 a_2^2 + 4 a_1^3 a_3) x^6 + \ldots$$
$$y^5 = a_1^5 x^5 + 5 a_1^4 a_2 x^6 + \ldots$$
$$y^6 = a_1^6 x^6 + \ldots, \text{ etc.}$$

ist,

$$0 = (b_1 a_1 - 1) x + (b_1 a_2 + b_2 a_1^2) x^2 + (b_1 a_3 + 2 b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3) x^3$$
$$+ (b_1 a_4 + b_2 a_2^2 + 2 b_2 a_1 a_3 + 3 b_3 a_1^2 a_2 + b_4 a_1^4) x^4 + (b_1 a_5$$
$$+ 2 b_2 a_1 a_4 + 2 b_2 a_2 a_3 + 3 b_3 a_1 a_2^2 + 3 b_3 a_1^2 a_3 + 4 b_4 a_1^3 a_2$$
$$+ b_5 a_1^5) x^5 + (b_1 a_6 + b_2 a_3^2 + 2 b_2 a_1 a_5 + 2 b_2 a_2 a_4 + b_3 a_2^3$$
$$+ 6 b_3 a_1 a_2 a_3 + 3 b_3 a_1^2 a_4 + 6 b_4 a_1^2 a_2^2 + 4 b_4 a_1^3 a_3 + 5 b_5 a_1^4 a_2$$
$$+ b_6 a_1^6) x^6 + \ldots$$

Da diese Reihe für jeden Werth von x gleich Null sein muss, so müssen die Coëfficienten von x, x^2, x^3, x^4 etc. für sich gleich Null sein, und man hat sonach

$$b_1 a_1 - 1 = 0,\quad b_1 a_2 + b_2 a_1^2 = 0,\quad b_1 a_3 + 2 b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3 = 0 \text{ etc.}$$

das heisst

$$b_1 = \frac{1}{a_1},\quad b_2 = -b_1 \frac{a_2}{a_1^2} = -\frac{a_2}{a_1^3},$$

$$b_3 = -\frac{b_1 a_3 + 2 a_1 a_2 b_2}{a_1^3} = \frac{-a_3 a_1 + 2 a_2^2}{a_1^5},$$

$$b_4 = -\frac{b_1 a_4 + b_2 a_2^2 + 2 b_2 a_1 a_3 + 3 b_3 a_1^2 a_2}{a_1^4} = \frac{5 a_1 a_2 a_3 - 5 a_2^3 - a_1^2 a_4}{a_1^7},$$

$$b_5 = -\frac{b_1 a_5 + 2 b_2 a_1 a_4 + 2 b_2 a_2 a_3 + 3 b_3 a_1 a_2^2 + 3 b_3 a_1^2 a_3 + 4 b_4 a_1^3 a_2}{a_1^5}$$

$$= \frac{-a_5 a_1^3 + 6 a_1^2 a_2 a_4 - 21 a_1 a_2^2 a_3 + 14 a_2^4 + 3 a_1^2 a_3^2}{a_1^9}, \text{ etc. etc.}$$

Beispiele. 1) Ist $y = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$, so erhält man hiernach

$$x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - \ldots$$

2) Ist $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x_4 + \ldots$, so ergiebt sich

$$x = y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{1}{24}y^4 + \ldots = y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots$$

3) Ist $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$,

so kommt, da $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{1}{3!}$, $a_4 = 0$, $a_3 = \frac{1}{5!}$, etc.

$$x = y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{3}{2.4.5}y^5 + \ldots$$

Wie man aus den allgemeinen Werthen von b_1, b_2, b_3, ... erkennt, werden diese Coëfficienten nur dann bedeutungslos, wenn $a_1 = 0$ ist. Es existirt daher für die Reihe

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$$

keine Umkehrung in ganzen Potenzen von y.

Anmerkung. Eine besonders wichtige Gleichung ist die des dritten Beispiels, welche, weil dort $y = \sin x$ ist, für $\arcsin y$ eine nach Potenzen des Bogens fortschreitende Reihe liefert. Da aber das Gesetz der Reihenbildung hier und in den meisten Fällen, wo die Methode der unbestimmten Coëfficienten angewendet worden ist, sich nur schwer erkennen lässt, so folgt im Nachstehenden noch eine andere Ableitung jener Reihe, welche diesem Mangel nicht unterworfen ist.

III.

Entwickelung der Funktion $\sin^{-1}x$ nach Potenzen von x.

§. 5. *Lehrsatz.* Die Reihe

$$\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{1-(2\delta)^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{1-(3\delta)^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{1-(4\delta)^2}} + \ldots + \frac{\delta}{\sqrt{1-((n-1)\delta)^2}}$$

hat für ein unendlich klein werdendes δ zur Grenze den Hauptwerth von $\sin^{-1} n\delta$, wofern nur $n\delta$ reell und kleiner als Eins ist.

Beweis. Aus der identischen Gleichung

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha=2\cos(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)\sin\tfrac{1}{2}\beta$$

folgt, wenn sowohl α als β positiv und dabei $\alpha+\frac{1}{2}\beta<\frac{1}{2}\pi$ ist, weil man dann $\cos(\alpha+\frac{1}{2}\beta)<\cos\alpha$ und $2\sin\frac{1}{2}\beta<\beta$ *) hat,

$$(12)\qquad \sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha<\beta\cos\alpha.$$

Setzt man nun $\sin\alpha=x$ und $\sin(\alpha+\beta)=x+\delta$, so hat man $\alpha=\sin^{-1}x$, $\alpha+\beta=\sin^{-1}(x+\delta)$, also $\beta=\sin^{-1}(x+\delta)-\sin^{-1}x$, und es geht die Formel (12), weil überdiess $\cos\alpha=\sqrt{(1-x^2)}$ ist, wenn man noch durch $\sqrt{(1-x^2)}$ dividirt, über in

$$\frac{\delta}{\sqrt{1-x^2}}<\sin^{-1}(x+\delta)-\sin^{-1}x,$$

Hierin setze man jetzt für x nach und nach $0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots. (n-1)\delta$, dabei δ so klein wählend, dass $n\delta<1$ bleibe, bilde also die Formeln

$$\frac{\delta}{\sqrt{1}}<\sin^{-1}\delta$$

$$\frac{\delta}{\sqrt{(1-\delta^2)}}<\sin^{-1}2\delta-\sin^{-1}\delta$$

$$\frac{\delta}{\sqrt{(1-(2\delta)^2)}}<\sin^{-1}3\delta-\sin^{-1}2\delta,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\delta}{\sqrt{(1-(n-2)^2\delta^2)}}<\sin^{-1}(n-1)\delta-\sin^{-1}(n-2)\delta$$

$$\frac{\delta}{\sqrt{(1-(n-1)^2\delta^2)}}<\sin^{-1}n\delta-\sin^{-1}(n-1)\delta,$$

und addire dieselben. Man erhält alsdann, wenn man die Summe

*) Es ist nämlich

$$\sin\gamma=\gamma\left(1-\frac{\gamma^2}{3!}+\frac{\gamma^4}{5!}-\frac{\gamma^6}{7!}+\ldots\right)=\gamma\left[1-\frac{\gamma^2}{3!}\left(1-\frac{\gamma^2}{4.5}\right)-\frac{\gamma^6}{7!}\left(1-\frac{\gamma^2}{8.9}\right)-\ldots\right],$$

folglich, wenn $\gamma^2<4.5$, also namentlich gewiss, wenn $\gamma<\frac{1}{2}\pi$ ist, weil dann die binomischen Faktoren der vorstehenden Reihe sämmtlich positiv werden, die ganze mit γ multiplicirte Reihe positiv und kleiner als Eins; es müssten denn in der Reihe die negativen Glieder überwiegen, und dieselbe negativ machen. Dies ist aber nicht der Fall, da dieselbe sich auch so ordnen lässt: $\left(1-\frac{\gamma^2}{3!}\right)+\frac{\gamma^4}{5!}\left(1-\frac{\gamma^2}{6.7}\right)+\frac{\gamma^8}{9!}\left(1-\frac{\gamma^2}{10.11}\right)+$ etc., woraus ersichtlich ist, dafs sie für $\gamma<\frac{1}{2}\pi$ positiv werden mufs. Es wird somit, wenn γ überdies positiv ist, $\sin\gamma<\gamma$, oder $\gamma=\frac{1}{2}\beta$ setzend, $2\sin\frac{1}{2}\beta<\frac{1}{2}\beta$.

der zur Linken stehenden Ausdrücke (welche nichts Anderes ist als die Reihe unseres Lehrsatzes) durch $S\frac{\delta}{\sqrt{(1-x^2)}}$ bezeichnet,

$$S\frac{\delta}{\sqrt{(1-x^2)}} < \sin^{-1} n\delta.$$

Ferner findet man aus den identischen Gleichungen

$$\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta)\sin\tfrac{1}{2}\beta,$$

und $$\cos\alpha + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta)\cos\tfrac{1}{2}\beta$$

indem man dieselben durch einander dividirt, und dann mit $\cos\alpha + \cos(\alpha-\beta)$ multiplicirt, die Gleichung

$$\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta) = (\cos\alpha + \cos(\alpha-\beta))\frac{\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\beta},$$

und hieraus unter den obigen Voraussetzungen über α und β, und wenn überdies $\alpha > \beta$ ist, weil dann $\cos\alpha < \cos(\alpha-\beta)$, also $\cos\alpha + \cos(\alpha-\beta) > 2\cos\alpha$ und $\sin\frac{1}{2}\beta > \frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ *) ist,

$$\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta) > \beta\cos\alpha.$$

Wird hierin $\sin\alpha = x$, $\sin(\alpha-\beta) = x-\delta$, und demnach $\beta = \sin^{-1}x - \sin^{-1}(x-\delta)$ und $\cos\alpha = \sqrt{(1-x^2)}$ gesetzt, so erhält man

$$\frac{\delta}{\sqrt{(1-x^2)}} > \sin^{-1}x - \sin^{-1}(x-\delta).$$

In diese Formel substituire man für x nach und nach o, δ, 2δ, 3δ, ... $(n-1)\delta$, δ so klein nehmend, dass $n\delta < 1$ bleibt, und addire die entstehenden Ungleichungen. Man erhält alsdann, für $\sin^{-1} - \delta$ das identische $-\sin^{-1}\delta$ schreibend,

$$S\frac{\delta}{\sqrt{1-x^2}} > \sin^{-1}(n-1)\delta + \sin^{-1}\delta.$$

*) Es ist nämlich

$$\cos\gamma = 1 - \frac{\gamma^2}{2!}\left(1 - \frac{\gamma^2}{3.4}\right) - \frac{\gamma^6}{6!}\left(1 - \frac{\gamma^2}{7.8}\right) - \ldots,$$

folglich, wenn man diese Reihe von der Reihe für $\frac{\sin\gamma}{\gamma}$ aus der vorigen Note subtrahirt,

$$\frac{\sin\gamma}{\gamma} - \cos\gamma = \frac{\gamma^2}{3!}\left(2 - \frac{2\gamma^2}{3.4.5}\right) + \frac{\gamma^6}{6!}\left(6 - \frac{2\gamma^2}{7.8.9}\right) + \ldots,$$

während diese Reihe offenbar für $\gamma < \frac{1}{2}\pi$ positiv wird. Man hat daher $\frac{\sin\gamma}{\gamma} > \cos\gamma$, oder $\gamma = \frac{1}{2}\beta$ setzend, $\sin\frac{1}{2}\beta > \frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$.

Es liegt somit die fragliche Reihe $S\frac{\delta}{\sqrt{1-x^2}}$ für hinreichend kleine δ beständig zwischen

$$\sin^{-1} n\delta \text{ und } \sin^{-1}(n\delta-\delta)+\sin^{-1}\delta,$$

und da $\sin^{-1}x$ nach §. 268 und 292 bei reellem x eine durchweg continuirliche Funktion ist, also bei unendlich klein werdendem δ die Grösse $\sin^{-1}(n\delta-\delta)$ sich unendlich wenig von $\sin^{-1}n\delta$ unterscheidet, und überdies $\lim \sin^{-1}\delta=0$ ist, so wird der Unterschied zwischen beiden Grenzen, und folglich um so mehr der Unterschied zwischen

$$\sin^{-1} n\delta \text{ und } S\frac{\delta}{\sqrt{1-x^2}}$$

mit verschwindendem δ unendlich klein, d. h. es ist

$$(13)\qquad \sin^{-1} n\delta = \lim S\frac{\delta}{\sqrt{1-x^2}},$$

was zu beweisen war.

§. 6. *Entwickelung von* $\sin^{-1}x$.

Wendet man auf den Wurzelausdruck der Gleichung (13) den binomischen Lehrsatz an, so erhält man, $n\delta=x$ setzend,

$$\sin^{-1}x=\lim S\delta\left[1+\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^4+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4+\ldots\right].$$

Um nun die durch S angedeutete Summation auszuführen, hat man in der hinter dem S stehenden Reihe nach und nach $0,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta,\ \ldots (n-1)\delta$ für x zu substituiren und die so entstehenden Reihen zu addiren. Denken wir zu dem Ende die aus den Substitutionen hervorgehenden Reihen unter einander gestellt, und die vertikal unter einander kommenden Glieder für sich addirt, so ergiebt sich

$$\sin^{-1}x=\lim\left[S\delta+S\tfrac{1}{2}x^2\delta+S\frac{1.3}{2.4}x^4\delta+S\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6\delta+\ldots\right],$$

oder, wenn man in den einzelnen Summen die Faktoren, welche allen Gliedern gemeinschaftlich sind, heraussetzt,

$$(14)\qquad \sin^{-1}x=\lim\left[S\delta+\tfrac{1}{2}Sx^2\delta+\frac{1.3}{2.4}Sx^4\delta+\frac{1.3.5}{2.4.6}Sx^6\delta+\ldots\right].$$

Die einzelnen Summen in dieser Reihe haben sämmtlich die Form $Sx^r\delta$; und es bleibt daher noch übrig, allgemein einen passenden Ausdruck für die Grenze von $Sx^r\delta$, d. h. für

$$\lim \delta[\delta^r + (2\delta)^r + (3\delta)^r + \ldots + (n-1)\delta)^r]$$

zu finden.

Setzt man für δ den ihm gleichen Quotienten $\frac{x}{n}$, so hat man

$$Sx^r\delta = \frac{1^r + 2^r + 3^r + 4^r + \ldots + (n-1)^r}{n^{r+1}} x^{r+1},$$

und den Coëfficienten von x^{r+1} durch k bezeichnend,

$$\lim Sx^r\delta = \lim kx^{r+1}.$$

Man bemerke nun, dass wenn r eine ganze Zahl bedeutet,

$$(15) \quad \frac{a^{r+1} - b^{r+1}}{a-b} = a^r + a^{r-1}b + a^{r-2} + \ldots + a^2 b^{r-2} + ab^{r-1} + b^r$$

ist, also wenn a und b positiv sind und $a > b$ betrachtet wird, indem man auf der rechten Seite a statt b setzt, und dadurch jedes Glied, folglich auch die ganze Summe vergrössert,

$$\frac{a^{r+1} - b^{r+1}}{a-b} < (r+1)a^r,$$

oder $a = z$, $b = z - 1$, und demnach $a - b = 1$ nehmend,

$$z^{r+1} - (z-1)^{r+1} < (r+1)z^r,$$

d. h.
$$z^r > \frac{z^{r+1} - (z-1)^{r+1}}{r+1}.$$

Wenn man nun hier für z nach und nach $1, 2, 3, \ldots n-1$ substituirt, und dann die entstehenden Ungleichungen addirt, so kommt

$$1^r + 2^r + 3^r + \ldots + (n-1)^r > \frac{(n-1)^{r+1}}{r+1},$$

und wenn man ferner jederseits mit n^{r+1} dividirt, weil dann der Ausdruck links in k übergeht,

$$k > \left(\frac{n-1}{n}\right)^{r+1} \cdot \frac{1}{r+1},$$

d. h.
$$k > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r+1} \cdot \frac{1}{r+1}.$$

Vertauscht man dagegen in der Gleichung (15) auf der rechten Seite das a mit dem kleineren b, so verkleinert sich die ganze Summe, und man erhält

$$\frac{a^{r+1} - b^{r+1}}{a-b} > (r+1)b^r,$$

oder $b = z$ und $a = z + 1$ nehmend,

$$(z+1)^{r+1} - z^{r+1} > (r+1)z^r,$$

und folglich

$$z^r < \frac{(z+1)^{r+1} - z^{r+1}}{r+1}.$$

Auch hierin setze man für z nach einander $1, 2, 3, \ldots n-1$ und addire die entstehenden Resultate. Es ergiebt sich alsdann

$$1^r + 2^r + 3^r + \ldots + (n-1)^r < \frac{n^{r+1} - 1}{r+1},$$

und um so mehr

$$1^r + 2^r + 3^r + \ldots + (n-1)^r < \frac{n^{r+1}}{r+1}.$$

Dividirt man wiederum rechts und links durch n^{n+1} so kommt

$$k < \frac{1}{r+1}.$$

Es liegt somit k zwischen

$$\frac{1}{r+1} \text{ und } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r+1} \cdot \frac{1}{r+1}.$$

Da der letzte dieser Ausdrücke sich aber für ein unendlich wachsendes n nur unendlich wenig von dem ersten, d. h. von $\frac{1}{r+1}$ unterscheidet, so kann sich gleichzeitig auch k von $\frac{1}{r+1}$ nur unendlich wenig unterscheiden, und es muss daher für ein unendlich wachsendes n, oder was dasselbe ist, für ein unendlich abnehmendes δ

$$\lim k = \frac{1}{r+1},$$

und folglich

$$\lim S x^r \delta = \lim k x^{r+1} = x^{r+1} \lim k = \frac{x^{r+1}}{r+1}$$

sein.

Wird diese Formel nun auf die Glieder der Gleichung (14) angewendet, so verwandelt sich dieselbe in

$$\text{(I)} \qquad \sin^{-1} x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots \text{in ref.}$$

Zusatz. Wegen $\cos^{-1} x = \frac{1}{2}\pi - \sin^{-1} x$, hat man überdies

$$\cos^{-1} x = \frac{1}{2}\pi - \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} - \ldots$$

IV.

Zurückführung vom $\sin z^m$ und $\cos z^m$ auf Sinus und Cosinus vom Vielfachen von z.

§. 7. Es sei

$$\cos z + i \sin z = u, \quad \cos z - i \sin z = v.$$

Alsdann ist

$$(16) \qquad u + v = 2\cos z, \quad u - v = 2i \sin z, \quad uv = 1,$$

und man hat überdies für ganze Zahlenwerthe von m

$$\cos mz + i \sin mz = (\cos z + i \sin z)^m = u^m$$
$$\cos mz - i \sin mz = (\cos z - i \sin z)^m = v^m$$

folglich

$$(17) \qquad u^m + v^m = 2\cos mz, \quad u^m - v^m = 2i \sin mz, \quad u^m v^m = 1.$$

Die beiden ersten der Gleichungen (16) geben ferner

$$(2\cos z)^m = (u + v)^m, \quad (2i \sin z)^m = (u - v)^m.$$

Wendet man auf $(u+v)^m$ und $(u-v)^m$ den binomischen Lehrsatz an, so erhält man für die ganzen Potenzen von $\cos z$ und $\sin z$ endliche Ausdrücke in ganzen Potenzen von u und v, also in Sinus und Cosinus vom Vielfachen von z.

Es wird nämlich

$$(18) \quad (2\cos z)^m = u^m + {}^1m\, u^{m-1} v + {}^2m\, u^{m-1} v^2 + \ldots + {}^1m\, u v^{m-1} + v^m$$

$$(19) \quad (2i \sin z)^m = u^m - {}^1m\, u^{m-1} v + {}^2m\, u^{m-2} v^2 - \ldots \pm {}^1m\, u v^{m-1} \mp v^m.$$

Erwägt man nun, dass in diesen Reihen die gleichvielten Glieder vom Anfang und vom Ende gleiche Coëfficienten haben, und fasst diese Glieder paarweise zusammen, so erhält man zunächst für den Fall, dass m die gerade Zahl $2n$ vorstellt, aus der Gleichung (18)

$$2^{2n} \cos z^{2n} = (u^{2n} + v^{2n}) + {}^1(2n)(u^{2n-2} + v^{2n-2})\, uv + {}^2(2n)(u^{2n-4} + v^{2n-4})\, u^2 v^2 + \ldots + {}^{n-1}(2n)(u^2 + v^2)\, u^{n-1} v^{n-1} + {}^n(2n)\, u^n v^n,$$

d. h. in Folge der Gleichungen (17), wenn man nachgehend rechts und links durch 2 dividirt,

$$(\mathrm{II}) \quad 2^{2n-1} \cos z^{2n} = \cos 2nz + {}^1(2n) \cos 2(n-1)z + {}^2(2n) \cos 2(n-2)z + \ldots + {}^{n-1}(2n) \cos 2z + \tfrac{1}{2}\,{}^n(2n).$$

Für ungerade Exponenten ergiebt sich auf dieselbe Weise aus der Gleichung (18), $m = 2n+1$ setzend,

$$(\mathrm{III}) \quad 2^{2n} \cos z^{2n+1} = \cos(2n+1)z + {}^1(2n+1) \cos(2n-1)z + {}^2(2n+1) \cos(2n-3)z + \ldots + {}^{n-1}(2n+1) \cos 3z + {}^n(2n+1) \cos z.$$

Verfährt man endlich ebenso mit der Gleichung (19), so kommt man für gerade Exponenten auf

$$(\text{IV})\quad (-1)^n 2^{2n-1}\sin z^{2n} = \cos 2nz - {}^1(2n)\cos 2(n-1)z$$
$$+ {}^2(2n)\cos 2(n-2)z - \ldots \pm {}^{n-1}(2n)\cos 2z \mp \tfrac{1}{2}{}^n(2n),$$

und für ungerade Zahlen auf

$$(\text{V})\quad (-1)^n 2^{2n}\sin z^{2n+1} = \sin(2n+1)z - {}^1(2n+1)\sin(2n-1)z$$
$$+ {}^2(2n+1)\sin(2n-3)z - \ldots \pm {}^{n-1}(2n+1)\sin 3z \mp {}^n(2n+1)\sin z.$$

Demnach ist z. B.

$$2\cos z^2 = \cos 2z + 1$$
$$4\cos z^3 = \cos 3z + 3\cos z$$
$$8\cos z^4 = \cos 4z + 4\cos 2z + 3$$
$$16\cos z^5 = \cos 5z + 5\cos 3z + 10\cos z$$
$$32\cos z^6 = \cos 6z + 6\cos 4z + 15\cos 2z + 10, \text{ etc.}$$
$$-2\sin z^2 = \cos 2z - 1$$
$$-4\sin z^3 = \sin 3z - 3\sin z$$
$$+8\sin z^4 = \cos 4z - 4\cos 2z + 3$$
$$+16\sin z^5 = \sin 5z - 5\sin 3z + 10\sin z$$
$$-32\sin z^6 = \cos 6z - 6\cos 4z + 15\cos 2z - 10, \text{ etc.}$$

V.

Entwickelung der Functionen $\sin mx$ und $\cos mx$ nach Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$.

§. 8. *Entwickelung von* $\sin mx$ *und* $\cos mx$ *nach Potenzen von* $\sin x$.

Es ist nach §. 234,1 $\cos mx + i\sin mx$ für jeden reellen Werth von m und x der Hauptwerth von $(\cos x + i\sin x)^m$. Andererseits ist nach §. 257 die nach dem binomischen Lehrsatze hergestellte Entwickelung von $(1 + i\operatorname{tg} x)^m$ dem Hauptwerthe dieser Potenz gleich, und zwar unbedingt für ganze Zahlenwerthe von m, und im entgegengesetzten Falle, so lange der Modulus von $i\operatorname{tg} x$, oder was dasselbe ist, von $\operatorname{tang} x$ kleiner als Eins bleibt, für reelle Werthe von x daher namentlich wenigstens zwischen $x = -\frac{1}{4}\pi$ und $x = +\frac{1}{4}\pi$. Bemerkt man überdies, dass

$$(\cos x + i\sin x)^m = \cos x^m (1 + i\operatorname{tg} x)^m,$$

so erhellt, dass auch

$$\cos mx + i\sin mx = \cos x^m (1 + i\,\mathrm{tg}\,x)^m,$$

bleiben wird, wenn man für $(1 + i\,\mathrm{tg}\,x)^m$ die entsprechende binomische Reihe setzt, und zwar für ganze positive Zahlenwerthe stets, für nicht ganze reelle Werthe von m aber mindestens so lange x zwischen den Grenzen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ bleibt, dabei aber für $\cos x^m$ immer der Hauptwerth gewählt wird *).

Man hat daher

(20) $$\cos mx + i\sin mx = P + Qi, \text{ wo}$$

$$P = \cos x^m - {}^2m \cos x^{m-2} \sin x^2 + {}^4m \cos x^{m-4} \sin x^4 - \ldots$$

$$Q = {}^1m \cos x^{m-1} \sin x - {}^3m \cos x^{m-5} \sin x^3 + {}^5m \cos x^{m-5} \sin x^5 - \ldots$$

zu nehmen ist, wofern nur für die Potenzen von $\cos x$ überall die Hauptwerthe gesetzt werden.

Verbindet man die Gleichung (20) mit der unter denselben Umständen richtigen Gleichung

$$\cos mx - i\sin mx = P - Qi,$$

so erhält man durch Addition und Subtraktion, unter denselben Beschränkungen

(21) $$\cos mx = P, \ \sin mx = Q.$$

Setzt man ferner $\sin x = z$, also

$$\cos x = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \text{ und } \cos x^{m-r} = (1 - z^2)^{\frac{m-r}{2}},$$

und darauf den vom binomischen Lehrsatze gelieferten Hauptwerth von $(1 - z^2)^{\frac{m-r}{2}}$ für $\cos x^{m-r}$, d. h., setzt man

(22) $$\cos x^{m-r} = 1 - {}^1\!\left(\frac{m-r}{2}\right) z^2 + {}^2\!\left(\frac{m-r}{2}\right) z^4 - {}^3\!\left(\frac{m-r}{2}\right) z^6 + \ldots,$$

so ergiebt sich

1) Liegt nämlich x zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$, so ist jedenfalls $\cos x$ positiv, und somit auch der Hauptwerth aller Potenzen von $\cos x$ mit reellem Exponenten. Es hat daher der Hauptwerth von $\cos x^m$ das Argument Null. Ferner ist der Erklärung gemäss der Hauptwerth einer Potenz derjenige, dessen Argument Null ist oder zwischen 0 und 2π liegt, mithin hat (weil das Argument eines Produkts gleich ist der Summe der Argumente der Faktoren) $\cos x^m (1 + i\,\mathrm{tg}\,x)^m$, wenn von beiden Faktoren der Hauptwerth genommen wird, wiederum zum Argument die Null oder einen Werth zwischen 0 und 2π; d. h. es ist dasselbe dem Hauptwerthe von $(\cos x + i \sin x)^m$ gleich, d. h. gleich $\cos mx + i\sin mx$. Siehe den Zusatz zu §. 221.

$$(23)\quad \cos mx = P = 1 - \left[{}^{1}\frac{m}{2} + {}^{2}m\right] z^2 + \left[{}^{2}\left(\frac{m}{2}\right) + {}^{2}m\,{}^{1}\left(\frac{m-2}{2}\right) + {}^{4}m\right] z^4$$

$$- \left[{}^{3}\left(\frac{m}{2}\right) + {}^{2}m\,{}^{2}\left(\frac{m-2}{2}\right) + {}^{4}m\,{}^{1}\left(\frac{m-4}{2}\right) + {}^{6}m\right] z^6 + \ldots$$

$$+ (-1)^r \left[{}^{r}\left(\frac{m}{2}\right) + {}^{2}m\,{}^{r-1}\left(\frac{m-2}{2}\right) + {}^{4}m\,{}^{r-2}\left(\frac{m-4}{2}\right) + \ldots + {}^{2r}m)\right] z^{2r} + \text{etc.}$$

Die Coëfficienten dieser Reihe lassen sich folgendermassen umgestalten.

Nehmen wir aus dem Coëfficienten von z^{2r} das allgemeine Glied

$${}^{2n}m\,{}^{r-n}\left(\frac{m-2n}{2}\right),$$

d. h.

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-2n+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;.\;2n} \cdot \frac{(m-2n)(m-2n-2)\ldots(m-2r+2)}{2\;.\;4\;\ldots\;(2r-2n)} \;*)$$

und multipliciren Zähler und Nenner desselben mit

$$(2r-1)(2r-3)(2r-5)\ldots(2n+3)(2n+1)$$

so ergiebt sich

$$\frac{m(m-2)(m-4)\ldots(m-2r+2)}{1\;.\;3\;.\;5\;\ldots\;(2r-1)} \cdot \frac{(m-1)(m-3)\ldots(m-2n+1)}{2\;.\;4\;\ldots\;2n}$$

$$\cdot \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots(2n+1)}{2\;.\;4\;\ldots(2r-2n)}$$

$$= \frac{m(m-2)(m-4)\ldots(m-2r+2)}{1\;.\;3\;.\;5\;\ldots\;(2r-1)} \cdot {}^{n}\left(\frac{m-1}{2}\right) \cdot {}^{r-n}\left(\frac{2r-1}{2}\right).$$

Wird diese Umformung mit jedem Gliede des Coëfficienten von z^{2r} vorgenommen, so wird der vollständige Coëfficient:

$$(-1)^r \frac{m(m-2)(m-4)\ldots(m-2r+2)}{1\;.\;3\;.\;5\;\ldots\;(2r-1)} \times$$

$$\times \left[{}^{r}\left(\frac{2r-1}{2}\right) + {}^{1}\left(\frac{m-1}{2}\right){}^{r-1}\left(\frac{2r-1}{2}\right) + {}^{2}\left(\frac{m-1}{2}\right){}^{r-2}\left(\frac{2r-1}{2}\right) + \ldots + {}^{r}\left(\frac{m-1}{2}\right)\right],$$

oder weil der letzte Faktor nach S. 272 (Gl. 24) gleich

$${}^{r}\left(\frac{m+2r-2}{2}\right)$$

ist,

*) Es ist nämlich allgemein

$${}^{\alpha}\left(\frac{\mu}{2}\right) = \frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)\ldots(\mu-2\alpha+2)}{2\;.\;4\;.\;6\;\ldots\;2\alpha},$$

wie man sich sogleich überzeugt, wenn man in dem durch ${}^{\alpha}\left(\frac{\mu}{2}\right)$ definitionsgemäss vorgestellten Quotienten Zähler und Nenner mit 2^{α} multiplicirt.

$$(-1)^r \frac{m(m-2)(m-4)\dots(m-2r+2)}{1\,.\,3\,.\,5\,\dots\,(2r-1)} \cdot {}^{r}\!\left(\frac{m+2r-2}{2}\right)$$

$$= (-1)^r \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\dots(m^2-(2r-2)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,2r}.$$

Die Gleichung (23) reducirt sich sonach auf

(VI.) $$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{2!}\sin x^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}\sin x^4$$
$$- \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}\sin x^6 + \dots$$

Ist m eine ganze gerade Zahl, so giebt, weil dann in P nur gerade Potenzen von $\cos x$ vorkommen, die Gleichung (22) endliche Reihen, und die sich damit gleichfalls abschliessende Reihe (VI) ist dann für jeden Werth von x gültig.

Behandelt man die Gleichung $\sin mx = Q$ ebenso wie vorher die Gleichung $\cos mx = P$, d. h. eliminirt man den $\cos x$ mit Hülfe der Gleichung (22), so erhält man zunächst:

$$\sin mx = {}^{1}m\,z - \left[{}^{1}m\,{}^{1}\!\left(\frac{m-1}{2}\right) + {}^{3}m\right]z^3 + \left[{}^{1}m\,{}^{2}\!\left(\frac{m-1}{2}\right) + {}^{3}m\,{}^{1}\!\left(\frac{m-3}{2}\right) + {}^{5}m\right]z^5 - \dots$$
$$+ (-1)^r\left[{}^{1}m\,{}^{r}\!\left(\frac{m-1}{2}\right) + {}^{3}m\,{}^{r-1}\!\left(\frac{m-3}{2}\right) + {}^{5}m\,{}^{r-2}\!\left(\frac{m-5}{2}\right) + \dots + {}^{2r+1}m\right]z^{2r+1} + \dots$$

Es ist aber

$${}^{2n+1}m\,{}^{r-n}\!\left(\frac{m-2n-1}{2}\right)$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-2n)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots(2n+1)} \cdot \frac{(m-2n-1)(m-2n-3)\dots(m-2r+1)}{2\,.\,4\,\dots\,2(r-n)},$$

oder, wenn Zähler und Nenner mit

$$(2r+1)(2r-1)(2r-3)\dots(2n+5)(2n+3)$$

multiplicirt wird,

$$= \frac{m(m-1)(m-3)\dots(m-2r+1)}{1\,.\,3\,.\,5\,\dots\,(2r+1)} \cdot {}^{n}\!\left(\frac{m-2}{2}\right) \cdot {}^{r-n}\!\left(\frac{2r+1}{2}\right).$$

Setzt man hierin für n nach und nach 0, 1, 2, 3 ... r, und addirt die entstehenden Resultate, so ergiebt sich für den Coëfficienten von z^{2r+1} unter Benutzung der Gleichung (24) auf Seite 272,

$$(-1)^r . \frac{m(m-1)(m-3)\dots(m-2r+1)}{1\,.\,3\,.\,5\,\dots\,(2r+1)} \cdot {}^{r}\!\left(\frac{m+2r-1}{2}\right)$$

$$= (-1)^r . \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots(m^2-(2r-1)^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,(2r+1)},$$

und somit

$$(\text{VII.})\quad \sin mx = {}^1m\sin x - \frac{m(m^2-1^2)}{3!}\sin x^3 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}\sin x^5 - \ldots.$$

Diese Reihe bricht wiederum ab, so oft m einen ungeraden ganzen Zahlenwerth hat, und die Gleichung ist dann für jeden Werth von x gültig.

Will man für $\cos mx$ eine Reihe haben, welche für ungerade Zahlenwerthe von m endlich wird (und dann für jeden Werth von x gilt), so wie für $\sin mx$ eine Reihe, welche für gerade Zahlenwerthe von m endlich wird (und dann für jedes x gilt), so hat man nur vorher aus P und Q den Factor $\cos x$ abzusondern, also zuvörderst

$$P = \cos x(\cos x^{m-1} - {}^2m\cos x^{m-3}\sin x^2 + {}^4m\cos x^{m-5}\sin x^4 - \ldots)$$

$$Q = \cos x({}^1m\cos x^{m-2}\sin x - {}^3m\cos x^{m-4}\sin x^3 + {}^5m\cos x^{m-6}\sin x^5 - \ldots)$$

zu schreiben, dann mit Hülfe der Gleichung (22) $\cos x$ aus den vorstehenden eingeklammerten Reihen zu eliminiren, und ganz analoge Umformungen wie vorher anzuwenden. Es findet sich dadurch

$$(\text{VIII.})\quad \cos mx = \cos x\Big[1 - \frac{m^2-1}{2!}\sin x^2 + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{4!}\sin x^4 - \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{6!}\sin x^6 + \ldots \pm \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{(m-1)!}\sin x^{m-1}\Big]$$

$$(\text{IX.})\quad \sin mx = \cos x\Big[m\sin x - \frac{m(m^2-2^2)}{3!}\sin x^3 + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{5!}\sin x^5 - \ldots \pm \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{(m-1)!}\sin x^{m-1}\Big].$$

Die Gleichungen VI und VII bleiben noch gültig von $z = -\frac{1}{2}\pi$ bis $z = +\frac{1}{2}\pi$. Schlömilch*) hat dafür folgenden einfachen Beweis geliefert.

*) Handbuch der algebraischen Analysis von Schlömilch. 2. Aufl. Jena 1851.

Was die Gleichung (VI) anlangt, so setze man in dieselbe zunächst $x=\frac{1}{2}u$. Die entstehende Gleichung muss alsdann dem Vorhergehenden zufolge mindestens für alle Werthe von u zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ bestehen. Da überdies die Gleichung für jeden reellen Werth von m richtig bleibt, so setze man gleichzeitig $2m$ für m, wodurch man erhält:

$$(24)\quad \cos mu = 1 - \frac{4m^2}{2!}\left(\sin\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{4m^2(4m^2-2^2)}{4!}\left(\sin\frac{u}{2}\right)^4 - \frac{4m^2(4m^2-2^2)(4m^2-4^2)}{6!}\left(\sin\frac{u}{2}\right)^6 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{m^2}{2!}\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{m^2(m^2-1^2)}{4!}\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^4 - \frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)}{6!}\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^6 + \ldots$$

oder wegen

$$2\left(\sin\frac{u}{2}\right)^2 = 1 - \cos u = 1 - (1 - \sin u^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin u^2 + \frac{1}{2.4}\sin u^4 + \frac{1.3}{2.4.6}\sin u^6 + \ldots,$$

wenn man nach Potenzen von $\sin u$ ordnet,

$$\cos mu = 1 - \frac{m^2}{2!}\sin u^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}\sin u^4 - \ldots$$

Weil nun diese Reihe für $u=x$, $\cos mx$ liefert, also für alle Werthe von x zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $+\frac{1}{4}\pi$ mit der Reihe (VI) dieselben Werthe geben muss, und beide Reihen dann nach Potenzen von $\sin x^2$ fortschreiten, so müssen nach §. 171 in ihnen (wie sich dies auch an den ersten hier berechneten Coëfficienten bestätigt) die Coëfficienten einzeln einander gleich sein. Es unterscheidet sich daher dann die letzte Reihe nicht weiter von der Reihe (VI), und diese giebt daher wie jene den Werth von $\cos mx$ mindestens für den Intervall von $x=-\frac{1}{2}\pi$ bis $x=+\frac{1}{2}\pi$.

Auf gleiche Weise findet sich, dass die Gleichung (VII) auf das Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ ausgedehnt werden dürfe. Dass die Gleichungen (VI und VII) nicht mehr gelten, wenn $x^2 > (\frac{1}{2}\pi)^2$ wird, obgleich in diesem Falle die Reihen noch convergent bleiben, geht daraus hervor, dass die Reihen wegen $\sin(\frac{1}{2}\pi - z) = \sin(\frac{1}{2}\pi + z)$ dieselben Werthe geben, mag man

$x=\frac{1}{2}\pi-z$ oder $x=\frac{1}{2}\pi+z$ nehmen, während die durch jene Gleichungen den Reihen zugeschriebenen Werthe $\cos mx$ und $\sin mx$ dies im Allgemeinen nicht thun.

§. 9. *Zusatz.* Dividirt man die Gleichung (VII) durch m, und setzt nachgehend $m=0$, so erhält man, weil $\frac{\sin mx}{m}$ für $m=0$ in x übergeht, nachdem man $\sin x=z$, also $x=\sin^{-1}z$ gesetzt hat,

$$\sin^{-1}z=z+\tfrac{1}{2}\frac{z^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7}+\ldots,$$

übereinstimmend mit der Formel (I) des §. 6.

Ferner erhält man aus der Gleichung (VI):

$$\frac{1-\cos mx}{m^2}=\frac{\sin x^2}{2}-\frac{(m^2-2^2)}{2.3}\frac{\sin x^4}{4}+\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2.3.4.5}\frac{\sin x^6}{6}-\ldots;$$

und wenn man für $\cos mx$ die Reihe

$$1-\frac{m^2x^2}{2!}+\frac{m^4x^4}{4!}-\frac{m^6x^6}{6!}+\ldots$$

substituirt, darauf die Division durch m^2 ausführt und zuletzt $m=0$ nimmt,

$$x^2=\sin x^2+\tfrac{2}{3}\frac{\sin x^4}{2}+\frac{2.4}{3.5}\frac{\sin x^6}{3}+\ldots$$

Man würde dieselben Gleichungen erhalten, und überdies für die höheren Potenzen von x Reihen gewinnen, welche nach ganzen Potenzen von $\sin x$ fortlaufen, wenn man in den Gleichungen (VI) und (VII) die Ausdrücke links und rechts vom (=) Zeichen nach Potenzen von m entwickelte, und die Coëfficienten der gleichvielten Potenzen von m einander gleich setzte.

§. 10. *Entwickelung der Funktionen* $\sin mx$ *und* $\cos mx$ *nach Potenzen von* $\cos x$. Vertauscht man x mit $\frac{1}{2}\pi-x$, so behalten die Gleichungen (VI) und (IX) für gerade ganze Zahlenwerthe von m, und die Gleichungen (VII) und (VIII) für ungerade ganze Zahlenwerthe von m ihre Gültigkeit, was man auch dem x für Werthe beilegen möge. Da nun für gerade Werthe von m

$$\cos m(\tfrac{1}{2}\pi-x)=(-1)^{\frac{m}{2}}\cos mx$$

$$\sin m(\tfrac{1}{2}\pi-x)=(-1)^{\frac{m+2}{2}}\sin mx$$

und für ungerade Werthe von m

$$\cos m(\tfrac{1}{2}\pi - x) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin mx$$

$$\sin m(\tfrac{1}{2}\pi - x) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos mx,$$

so gestalten sich die Formeln (VI) bis (IX) dadurch so:

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \cos mx = 1 - \frac{m^2}{2!} \cos x^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!} \cos x^4$$
$$- \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!} \cos x^6 + \ldots \pm \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{m!} \cos x^m,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos mx = m \cos x - \frac{m(m^2-1^2)}{3!} \cos x^3$$
$$+ \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!} \cos x^5 - \ldots \pm \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{m!} \cos x^m,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin mx = \sin x \left[1 - \frac{(m^2-1^2)}{2!} \cos x^2\right.$$
$$\left. + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{4!} \cos x^4 - \ldots \pm \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{(m-1)!} \cos x^{m-1}\right],$$

$$(-1)^{\frac{m-2}{2}} \sin mx = \sin x \left[m \cos x - \frac{m(m^2-2^2)}{3!} \cos x^3\right.$$
$$\left. + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{5!} \cos x^5 - \ldots \pm \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{(m-1)!} \cos x^{m-1}\right],$$

von welchen Formeln die erste und letzte sich auf gerade Werthe von m, die zweite und dritte sich auf ungerade Werthe von m beziehen.

VI.
Verwandelung der Funktionen $\sin mx$ und $\cos mx$ in Produkte.

§. 11. Stellt m eine gerade Zahl vor, so wird die Reihe der Gleichung (VI) eine ganze Funktion von $\sin x$, und zwar vom m^{ten} Grade. Da dieselbe nun gleich $\cos mx$ ist, und $\cos mx$ für folgende m von einander verschiedene Werthe von x verschwindet:

$$\pm\frac{\pi}{2m},\quad \pm\frac{3\pi}{2m},\quad \pm\frac{5\pi}{2m},\ \ldots\ \pm\frac{(m-1)\pi}{2m},$$

so dass

$$\sin\pm\frac{\pi}{2m},\ \sin\pm\frac{3\pi}{2m},\ \sin\pm\frac{5\pi}{2m},\ \ldots\ \sin\pm\frac{m-1}{2m}\pi$$

die Wurzelwerthe der Gleichung sind, welche entsteht, wenn man jene Reihe gleich Null setzt; so muss selbige nach §. 145 und 147 gleich sein dem Produkte

$$A\left(\sin x-\sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x+\sin\frac{\pi}{2m}\right)\left(\sin x-\sin\frac{3\pi}{2m}\right)\left(\sin x+\sin\frac{3\pi}{2m}\right)\ldots$$
$$\left(\sin x-\sin\frac{m-1}{2m}\pi\right)\left(\sin x+\sin\frac{m-1}{2m}\pi\right),$$

oder, die Faktoren paarweise vereinigend, dem Produkte

$$A\left[\sin x^2-\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2\right]\left[\sin x^2-\left(\sin\frac{3\pi}{2m}\right)^2\right]\left[\sin x^2-\left(\sin\frac{5\pi}{2m}\right)^2\right]\ldots$$
$$\left[\sin x^2-\left(\sin\frac{(m-1)}{2m}\pi\right)^2\right],$$

wo A unabhängig von x ist.

Bezeichnet man nun das gleichfalls von x unabhängige Produkt

$$\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{2m}\right)^2\left(\sin\frac{5\pi}{2m}\right)^2\ldots\left(\sin\frac{m-1}{2m}\right)^2$$

durch B, so wird demgemäss die letzte Reihe gleich

$$-AB\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{m-1}{2m}\pi\right)^2}\right],$$

und, weil sie gleich $\cos mx$ ist, mithin für $x=0$ in Eins übergehen muss, so ist nothwendig $-AB=1$, und folglich

$$(25)\quad \cos mx = \left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{5\pi}{2m}\right)^2}\right]\cdots$$

$$\cdot\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{m-1}{2m}\pi\right)^2}\right].$$

Ein ähnliches Produkt erhält man, unter der Voraussetzung, dass m eine gerade Zahl ist, für $\sin mx$ aus der Gleichung (IX). Es giebt dieselbe nämlich zunächst

$$\frac{\sin mx}{m\sin x\cos x} = 1 - \frac{m^2-2^2}{3!}\sin x^2 + \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{5!}\sin x^4 - \ldots$$

$$\pm\frac{(m^2-2^2)\ldots(m^2-(m-2)^2)}{(m-1)!}\sin x^{m-2}.$$

Bezeichnet man die Reihe zur Rechten des (=) Zeichens durch G, so ist $G=0$ in Bezug auf $\sin x$ eine algebraische Gleichung vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade, deren $m-2$ Wurzelwerthe

$$\pm\sin\frac{2\pi}{2m},\ \pm\sin\frac{4\pi}{2m},\ \ldots\ \pm\sin\frac{(m-2)\pi}{2m}$$

sind, weil

$$\pm\frac{2\pi}{2m},\ \pm\frac{4\pi}{2m},\ \ldots\pm\frac{m-2}{2m}\pi$$

$m-2$ von einander verschiedene Werthe von x sind, welche den Werth von G, nämlich $\frac{\sin mx}{m\sin x\cos x}$, zum Verschwinden bringen. Daraus folgt

$$G = A\left(\sin x-\sin\frac{2\pi}{2m}\right)\left(\sin x+\sin\frac{2\pi}{2m}\right)\left(\sin x-\sin\frac{4\pi}{2m}\right)\left(\sin x+\sin\frac{4\pi}{2m}\right)\cdots$$

$$\left(\sin x+\sin\frac{m-2}{2m}\pi\right),$$

und hieraus in gleicher Weise, wie bei der vorher behandelten Reihe, weil auch G für $x=0$ in 1 übergehen muss,

$$G = \left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right]\cdots\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{m-2}{2m}\pi\right)^2}\right],$$

d. h.

$$(26)\quad \sin mx = m\sin x\cos x\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right]\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right]\cdots$$

$$\left[1-\frac{\sin x^2}{\left(\sin\frac{m-2}{2m}\pi\right)^2}\right].$$

Ganz ebenso findet man für ungerade Zahlenwerthe von m aus den Gleichungen (VII und VIII)

$$(27)\quad \sin mx = m \sin x \left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{2\pi}{2m}\right)^2}\right] \left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{4\pi}{2m}\right)^2}\right] \cdots \left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{m-1}{2m}\pi\right)^2}\right].$$

$$(28)\quad \cos mx = \cos x \left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{\pi}{2m}\right)^2}\right] \left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{3\pi}{2m}\right)^2}\right] \cdots \left[1 - \frac{\sin x^2}{\left(\sin \frac{m-2}{2m}\pi\right)^2}\right].$$

VII.

Von den Produktreihen.

§. 12. *Erklärung.* Unendliche Produktreihe heisse ein Produkt von unendlich vielen Faktoren, die in ihrer Aufeinanderfolge ein bestimmtes Bildungsgesetz befolgen. Darf man einer solchen Reihe trotz der unendlichen Anzahl der Faktoren einen bestimmten endlichen Werth zuschreiben, so nenne man sie convergent, im entgegengesetzten Falle divergent.

§. 13. *Merkmale der Convergenz unendlicher Produktreihen.* Man stelle die zu prüfende Reihe durch

$$P = u_0 . u_1 . u_2 . u_3 . u_4 \ldots \text{ in inf.}$$

vor, und beachte, dass

$$u_0 = e^{\log u_0},\ u_1 = e^{\log u_1},\ u_2 = e^{\log u_2} \ldots$$

ist, wo $\log u_0$, $\log u_1$, $\log u_2 \ldots$, irgend welche Werthe (etwa die Hauptwerthe) der natürlichen Logarithmen von u_0, u_1, $u_2 \ldots$ bezeichnen, und dass die Reihe sich daher auch so

$$P = e^{\log u_0 + \log u_1 + \log u_2 + \ldots}$$

schreiben lässt.

Ist nun die Reihe

(29) $$\log u_0 + \log u_1 + \log u_2 + \ldots \text{ in inf.}$$

convergent und gleich s, oder divergent und gleich $-\infty$, so wird resp. $P = e^s$ oder $P = e^{-\infty}$, und folglich die zu prüfende Reihe convergent. Im ersten Falle hat sie nämlich den bestimmten, jederzeit von Null verschiedenen Werth e^s, im zweiten Falle zur Grenze die Null.

Wenn dagegen die Reihe (29) mit zunehmender Gliederzahl zu $+\infty$ hinansteigt, oder sich doch keiner *bestimmten* Grenze nähert, so wird auch P ohne Werth, also divergent sein.

Um nun die Reihe (29) weiter zu untersuchen, setze man $u_0 - 1 = v_0$, $u_1 - 1 = v_1$, $u_2 - 1 = v_2$, etc. so dass dieselbe übergeht in

(30) $$\log(1+v_0) + \log(1+v_1) + \log(1+v_2) + \ldots \text{ in inf.},$$

und wähle für die Logarithmen ihre Hauptwerthe. Es ist dann, wenn v_r reell und numerisch kleiner als Eins ist,

$$\log(1+v_r) = v_r - \tfrac{1}{2}v_r^2 + \tfrac{1}{3}v_r^3 - \tfrac{1}{4}v_r^4 + \tfrac{1}{5}v_r^5 - \ldots \text{ in inf.}$$
$$= v_r - v_r^2\left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}v_r + \tfrac{1}{4}v_r^2 - \tfrac{1}{5}v_r^3 + \ldots\right].$$

Ist überdies v_r positiv, so liegt der Werth der eingeklammerten Reihe wegen des Zeichenwechsels und der beständigen Abnahme ihrer Glieder nach §. 164, IV zwischen dem ersten Gliede $\frac{1}{2}$ und der Summe der beiden ersten Glieder $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}v_r$, mithin, weil v_r selber < 1 ist, zwichen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$. Man darf demnach

$$\log(1+v_r) = v_r - \alpha v_r^2$$

nehmen, wenn man unter α eine (durch den Werth von v_r näher bestimmte) zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{2}$ liegende positive Zahl denkt. Ist dagegen v_r negativ, etwa gleich $-w$, so wird die eingeklammerte Reihe gleich

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}w + \tfrac{1}{4}w^2 + \tfrac{1}{5}w^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

mithin kleiner als

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}w + \tfrac{1}{2}w^2 + \tfrac{1}{2}w^3 + \ldots \text{ in inf.}$$

d. h. kleiner als

$$\frac{1}{2(1-w)},$$

und sonach, wenn $w \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ ist, kleiner als Eins.

Es folgt hiernach allgemein, mag v_r positiv oder negativ sein,

$$(31) \qquad \log(1+v_r)=v_r-\alpha_r v_r,$$

wo α_r einen positiven echten Bruch bedeutet, mindestens so oft v_r numerisch kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Da nun die Reihe (30) nicht convergiren kann, wenn nicht, wenigstens von irgend einer Stelle ab die Glieder ins Unendliche abnehmen, d. h. $\log(1+v_n)$ mit zunehmendem n der Grenze Null sich nähert, so muss v_n von einem Gliede an mit wachsendem n der Grenze Null zugehen, so dass also sicher für einen bestimmten Werth von n, v_n numerisch kleiner als $\frac{1}{2}$ sein wird, und dasselbe dann auch um so mehr mit v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3},... statt haben muss. Es wird alsdann in Folge der Gleichung (31) der Rest der Reihe (30)

$$\log(1+v_n)+\log(1+v_{n+1})+\log(1+v_{n+2})+\log(1+v_{n+3})+\ldots$$
$$=v_n+v_{n+1}+v_{n+2}+v_{n+3}+\ldots$$
$$-(\alpha_n v_n^2+\alpha_{n+1}v_{n+1}^2+\alpha_{n+2}v_{n+2}^2+\alpha_{n+3}v_{n+3}^2+\ldots)$$

Es wird ferner sich offenbar ein zwischen dem grössten und kleinsten der Werthe α_n, α_{n+1}, α_{n+2}, α_{n+3}, etc. liegender Werth α denken lassen, welcher die eingeklammerte Reihe der vorstehenden Gleichung genau gleich

$$\alpha(v_n^2+v_{n+1}^2+v_{n+2}^2+v_{n+3}^2+\ldots)$$

macht, so dass wenn man den endlichen Werth der endlichen Reihe

$$\log(1+v_0)+\log(1+v_1)+\log(1+v_2)+\ldots+\log(1+v_{n-1})=V$$

setzt, die Reihe (30) sich wie folgt schreiben lässt:

$$(32) \qquad V+v_n+v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots \text{ in inf.}$$
$$-\alpha(v_n^2+v_{n+1}^2+v_{n+2}^2+\ldots \text{ in inf.}),$$

während α einen positiven echten Bruch vorstellt.

Hiernach wird also die Reihe (30) convergiren, sobald die Reihen

$$(33) \qquad v_0+v_1+v_2+v_3+\ldots \text{ in inf.}$$

$$(34) \qquad v_0^2+v_1^2+v_2^2+v_3^2+\ldots \text{ in inf.}$$

gleichzeitig convergent sind, und folglich wird dann auch die Produktreihe P convergiren und einen von Null verschiedenen Werth haben. Convergirt dagegen die Reihe (33), während die Reihe (34) divergirt, so wird $P=e^{-\infty}$, also die Produktreihe convergent sein und den Werth Null haben. Divergiren

endlich die Reihen (33) und (34) gleichzeitig, so bedarf es einer besonderen Untersuchung, um zu entscheiden, ob die Reihe (32) $-\infty$ werde oder nicht, d. h. ob P convergire oder divergire.

Da die Reihe (34) von selber convergirt, sobald die Reihe (33) unabhängig von den Gliederzeichen convergent ist, so kommt man insbesondere auf das Resultat, dass P zu einer von Null verschiedenen Grenze convergirt, sobald die Reihe (33) unabhängig von den Gliederzeichen convergent ist.

Was den Fall angeht, wo die Glieder der Produktreihe imaginär sind, so bemerke man, dass die logarithmische Reihe für $\log(1+v_r)$ auch für imaginäre Werthe von v_r gültig bleibt, sobald der Modulus von v_r kleiner als Eins ist. Man hat daher unter dieser Voraussetzung, den Modulus von v_r durch ϱ, das Argument durch φ bezeichnend, also $v_r = \varrho e^{\varphi i}$ nehmend,

$$\log(1+v_r) = \varrho\cos\varphi - \varrho^2\cos 2\varphi\,(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\varrho\cos\varphi + \tfrac{1}{4}\varrho^2\cos 2\varphi - \tfrac{1}{5}\varrho^3\cos 3\varphi + \ldots)$$
$$+ i[\varrho\sin\varphi - \varrho^2\sin 2\varphi\,(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\varrho\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\varrho^2\sin 2\varphi - \tfrac{1}{5}\varrho^3\sin 3\varphi + \ldots)].$$

Die Reihen, die hier mit $-\varrho^2\cos 2\varphi$ und $-\varrho^2\sin 2\varphi$ multiplicirt erscheinen, haben nun offenbar wegen $\varrho < 1$ einen positiven Werth, der geringer ist als der Werth der Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\varrho + \tfrac{1}{4}\varrho^2 + \tfrac{1}{5}\varrho^3 + \ldots$$

und um somehr geringer, als der Werth der Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\varrho + \tfrac{1}{2}\varrho^2 + \tfrac{1}{2}\varrho^3 + \ldots$$

d. h. geringer als

$$\frac{1}{2(1-\varrho)}.$$

Sie sind demnach kleiner als Eins mindestens für alle Werthe von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \frac{1}{2}$, und es werden demnach positive (rationale oder irrationale) kleiner als Eins seiende Werthe α und β existirend gedacht werden können, welche, wofern $\varrho \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}$ ist,

$$\log(1+v_r) = (\varrho\cos\varphi - \alpha\varrho^2\cos 2\varphi) + i(\varrho\sin\varphi - \beta\varrho^2\sin 2\varphi)$$

machen.

Man kommt demzufolge durch dieselben Schlüsse, welche im vorigen Falle angewendet worden sind, auf die Wahrheit, dass, wenn $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ die Moduli von $v_0, v_1, v_2, \ldots$ vorstellen, und dieselben von einer bestimmten Stelle ab sich der Grenze

Null nähern, die Produktreihen convergiren und einem von Null verschiedenen Werthe gleich werden müssen, sobald die Reihen

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho^2 + \varrho^3 + \ldots \text{ in inf.}$$
$$\varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \varrho_3^2 + \ldots \text{ in inf.}$$

convergent sind.

Das Resultat der vorstehenden Erörterungen ist sonach folgendes.

a) *Die Reihe*

$$P = u_0 \,.\, u_1 \,.\, u_2 \,.\, u_3 \,.\, u_4 \ldots \text{ in inf.}$$

ist convergent und von Null verschieden,

1) *wenn die Faktoren reell sind und die Reihe*

$$(u_0 - 1) + (u_1 - 1) + (u_2 - 1) + (u_3 - 1) + \ldots$$

unabhängig von den Gliederzeichen convergirt,

2) *wenn die eben angeführte Reihe durch Zeichenwechsel convergirt, dabei aber auch die Reihe*

$$(u_0 - 1)^2 + (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 1)^2 + (u_3 - 1)^2 + \ldots$$

convergent ist;

3) *wenn die Faktoren imaginär sind, und die Moduli, so wie die Quadrate der Moduli der Glieder*

$$u_0 - 1,\ u_1 - 1,\ u_2 - 1,\ u_3 - 1, \ldots$$

eine convergente Summenreihe bilden.

b) *Die Reihe P ist convergent und gleich Null, wenn die Faktoren reell sind, die Summe der Glieder*

$$u_0 - 1,\ u_1 - 1,\ u_2 - 1,\ u_3 - 1, \ldots$$

eine convergente Reihe bildet, und die Summe der Quadrate dieser Glieder unendlich wird.

Hiernach würde also z. B. das Produkt

$$\left(1 + \frac{a}{\sqrt{1}}\right)\left(1 - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{a}{\sqrt{4}}\right) \ldots$$

für reelle Werthe von a zur Grenze Null convergiren, weil von den Reihen

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots \text{ und } \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

die erste convergirt, die zweite divergirt.

Das Produkt

$$\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\left(1-\frac{a}{4}\right)\cdots$$

wird für reelle Werthe von a zu einer von Null verschiedenen Grenze convergiren, weil die beiden Reihen

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots,\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

gleichzeitig convergent sind.

Dasselbe ist der Fall mit dem Produkte

$$\left(1+\frac{a}{1^2}\right)\left(1+\frac{a}{2^2}\right)\left(1+\frac{a}{3^2}\right)\left(1+\frac{a}{4^2}\right)\cdots$$

Bemerkung. Die Reihe

$$x\left(1-\frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\ldots \text{ in inf,}$$

welche, abgesehen vom ersten Faktor, die Reihe des letzten Beispiels für $a=-\frac{x^2}{\pi^2}$ ist, hat den Werth $\sin x$. Der Beweis, den Cauchy in seinem *Cours d'analyse* dafür geliefert hat, ist aus der Gleichung (26) hergeholt. Er setzt nämlich in derselben zuerst $\frac{x}{m}$ statt m und nimmt zuletzt m unendlich gross an, nachdem er vorher mehrere Umformungen ausgeführt hat, um auf eine leichte und unzweideutige Weise die Grenze für $m=\infty$ bestimmen zu können.

Der Beweis, den Schlömilch in seine »algebraische Analysis« aufgenommen hat, ist nicht ganz einwurfsfrei. Es leitet derselbe nämlich aus (24) die Gleichung

$$(a)\qquad \frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}=1-\frac{\lambda^2}{1^2}-\frac{\lambda^2(1^2-\lambda^2)}{1^2.2^2}-\frac{\lambda^2(1^2-\lambda^2)(2^2-\lambda^2)}{1.2^2.3^2}-\text{etc.}$$

ab, setzt $\lambda\pi=x$ und zeigt dann, dass die obige Produktreihe sich auf eben dieselbe Reihe zurückführen lässt. Das Störende dabei ist, dass er, um die Gleichung (a) aus (24) abzuleiten $x=\pi$ setzen muss, obgleich die Gleichung (24) für $x=\pi$ nicht mehr gilt.

Der von Euler gegebene Beweis geht davon aus, dass

$$e^x=\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

ist, die Grenze auf ein ins Unendliche wachsendes n bezogen. Es lässt sich in Folge dessen nämlich setzen

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = \lim \left[\left(1 + \frac{xi}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{xi}{n}\right)^n\right]$$

oder, wenn

$$1 + \frac{xi}{n} = a, \quad 1 - \frac{xi}{n} = z$$

genommen wird,

$$\sin x = \lim(a^n - z^n).$$

Nachdem nun Euler das Binom $a^n - z^n$ (das n vorläufig als ganze Zahl gedacht) in seine einfachen Faktoren zerlegt hat, lässt er n ins Unendliche wachsen, vernachlässigt aber dann in jedem Faktor ein Glied wegen seiner unendlichen Kleinheit. Wenn sich dies nun auch bei einer endlichen Faktorenzahl rechtfertigen würde, so ist es doch bedenklich, ohne Weiteres so auch bei einer unendlich grossen Zahl von Faktoren zu verfahren, weil bei der Ausführung der Multiplication auch die Zahl der Glieder die mit jenen unendlich kleinen Faktoren multiplicirt sind und endliche Coëfficienten haben, unendlich gross wird, und deren Summe daher nicht ohne Begründung mit dem Grenzwerth Null belegt werden darf.

Der einfachste Beweis, den man hin und wieder angeführt findet, der aber auch der Strenge entbehrt, beruht darauf, dass jede ganze Funktion F vom n^{ten} Grade, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ die Wurzelwerthe der Gleichung $F = 0$ vorstellen, identisch ist mit dem Produkte,

$$k(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n)$$

wo k den Coëfficienten des höchsten Gliedes von F bedeutet (s. §. 147), oder, was dasselbe ist, mit dem Produkte

$$h\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_3}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right),$$

in welchem h das von x unabhängige Glied der Function F vorstellen wird. Dieser Satz wird nun auf die Sinusreihe

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

angewendet, indem man dieselbe als ganze Funktion von unendlich hohem Grade betrachtet. Weil hier, wenn man den

allen Gliedern gemeinsamen Factor x heraussondert, $h = 1$ ist und die einzigen Werthe von x, für welche $\sin x$ verschwindet, $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$, etc. sind, so nimmt die obige Reihe die Gestalt

$$x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\ldots$$

oder

$$x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots \text{ in inf}$$

an. Der Satz §. 145 inzwischen, auf welchen §. 147 sich stützt, setzt zu seinem Beweise voraus, dass in F ein angebbares höchstes Glied vorhanden ist, und verliert daher bei unendlichen Reihen seine Anwendbarkeit.

VIII.

Die Interpolationsformel von Lagrange.

§. 14. Sind die Werthe bekannt, welche eine unbekannte Funktion von x für eine endliche Anzahl bestimmter einzelner Werthe von x annimmt, so lässt sich die Forderung stellen, genau oder annäherungsweise den Werth der Funktion für irgend welchen anderen Werth von x anzugeben. Dieser Forderung würde man vollkommen genügen, namentlich jeden Zwischenwerth der Funktion genau angeben können, wenn sich die Zusammensetzung der Funktion in x selber aus den bekannten Einzelwerthen ableiten liesse. Man wird aber unendlich viele von einander verschiedene Funktionen denken können, welche für die erwähnten Einzelwerthe von x einander gleich werden, ohne für die dazwischen liegenden Werthe übereinzustimmen, und es wird daher die Aufgabe eine unbestimmte sein, und die Bestimmung der Zwischenwerthe der Funktion (d. h. die Interpolation) höchstens auf mehr oder weniger angenäherte Werthe führen, wenn nicht eine hinlänglich bestimmte Form für die fragliche Funktion vorausgesetzt wird. Die Interpola-

tionsformel von Lagrange z. B. beruht auf der Voraussetzung, dass die Funktion eine ganze Funktion von so vielen Gliedern sei, als Werthe derselben bekannt sind. Es löst diese Formel daher in vollkommener Bestimmtheit die Aufgabe, die Coëfficienten einer ganzen Funktion vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade zu finden, welche für n gegebene Werthe von x bestimmte gegebene Werthe der Funktion liefert. Wenn $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ die gegebenen Werthe von x, und $u_0, u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ die entsprechenden Werthe der Funktion, die wir u nennen wollen, sind, so ist die Formel folgende:

$$(35)\qquad u = A_0 u_0 + A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_{n-1} u_{n-1},$$

wo

$$(36)\qquad \begin{cases} A_0 = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_{n-1})} \\[2ex] A_1 = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x^{n-2})} \\[2ex] A_2 = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{n-1})} \\[1ex] \qquad\qquad \text{etc.} \\[1ex] A_{n-1} = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x^{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})} \end{cases}$$

ist.

Von den vielen Beweisen dieser Formel möge hier einer von denen aufgenommen werden, welche Cauchy in seinem *Cours d'Analyse* gegeben hat, zu welchem Ende wir indessen nachstehende zwei Sätze vorausschicken müssen.

§. 15. *Entwickelung des Produktes* $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)$ *nach ganzen Potenzen von* x.

Bemerkt man, dass man bei der Ausführung der Multiplicationen in dem vorstehenden Ausdrucke eine Summe von Producten erhält, von denen jedes aus jedem der gegebenen n binomischen Faktoren ein Glied als Faktor enthält, in der Art, dass zuletzt jedes Glied der gegebenen Faktoren mit jedem Gliede der $n-1$ übrigen Faktoren multiplicirt erscheint, so ersieht man, dass das Resultat bestehen wird 1) aus dem Produkte der sämmtlichen ersten Glieder der n binomischen Faktoren, d. h.

aus dem Gliede x^n; 2) aus den Produkten der ersten Glieder von je $n-1$ der binomischen Faktoren mit dem zweiten Gliede des übrig bleibenden n^{ten} Faktors, d. h. aus den Produkten

$$-a_1 x^{n-1},\ -a_2 x^{n-1},\ -a_3 x_{n-1},\ \text{etc.},\ -a_n x^{n-1},$$

oder dieselben in ein Glied zusammenfassend, aus dem Gliede

$$-(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. a_n) x^{n-1};$$

3) aus den Produkten der ersten Glieder von je $n-2$ der binomischen Faktoren mit den zweiten Gliedern der jedesmal übrigbleibenden zwei Faktoren, d. h. aus den Produkten $a_1 a_2 x^{n-2}$, $a_1 a_3 x^{n-2}$, $a_1 a_4 x^{n-2}$, ... $a_1 a_n x^{n-2}$, $a_2 a_3 x^{n-2}$, ... $a_{n-1} a_{n-2} x^{n-2}$, oder dieselben in ein Glied zusammenfassend, aus dem Gliede

$$(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + \ldots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \ldots a_{n-1} a_{n-2}) x^{n-2};$$

4) aus den Produkten der ersten Glieder von je $n-3$ der gegebenen Faktoren mit den zweiten Gliedern der jedesmal übrigbleibenden drei Faktoren, d. h. aus dem Gliede

$$-(a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \ldots + a_1 a_2 a_n + a_1 a_3 a_4 + a_1 a_3 a_5 + \ldots$$
$$+ a_{n-3} a_{n-2} a_{n-2}) x^{n-3};$$

etc. etc.; und zuletzt aus dem Produkte aller zweiten Glieder, d. h. aus dem Gliede

$$\pm a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$$

Das Gesammtresultat wird sich sonach so schreiben lassen:

$$(37)\qquad x^n - \Sigma_1 x^{n-1} + \Sigma_2 x^{n-2} - \Sigma_3 x^{n-3} + \ldots \mp \Sigma_{n-1} x \pm \Sigma_n,$$

wo allgemein Σ_r die Summe aller Produkte aus je r zweiten Gliedern der Faktoren des gegebenen binomischen Produkts bedeutet.

§. 16. *Auflösung des Systems der n Gleichungen*

$$(38)\left\{\begin{array}{l}
z_0 + z_1 + z_2 + \ldots\ldots\ldots + z_{n-2} + z_{n-1} = 1 \\
x_0 z_0 + x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots\ldots\ldots + x_{n-2} z_{n-2} + x_{n-1} z_{n-1} = v \\
x_0^2 z_0 + x_1^2 z_1 + x_2^2 z_2 + \ldots\ldots\ldots + x^2_{n-2} z_{n-2} + x^2_{n-1} z_{n-1} = v^2 \\
x_0^3 z_0 + x_1^3 z_1 + x_2^3 z_2 + \ldots\ldots\ldots + x^3_{n-2} z_{n-2} + x^3_{n-1} z_{n-1} = v^3 \\
\text{etc.} \\
x_0^{n-1} z_0 + x_1^{n-1} z_1 + x_2^{n-1} z_2 + \ldots + x^{n-1}_{n-2} z_{n-2} + x^{n-1}_{n-1} z^{n-1} = v^{n-1}
\end{array}\right.$$

wo $z_0, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ die n Unbekannten, und $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ gegebene Constanten vorstellen.

Nach §. 15 ist

$$(39) \quad (x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_{n-1}) \\ = x_0^{n-1} - \Sigma_1 x_0^{n-2} + \Sigma_2 x_0^{n-3} - \ldots \pm \Sigma_{n-1},$$

wenn Σ_r die Summe der Produkte von je r der $n-1$ Constanten x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$ bezeichnet. Substituirt man nun hierin für x_0 nach und nach x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$, so entstehen folgende Gleichungen:

$$(40) \quad \begin{cases} 0 = x_1^{n-1} - \Sigma_1 x_1^{n-2} + \Sigma_2 x_1^{n-3} - \ldots \pm \Sigma_{n-1} \\ 0 = x_2^{n-1} - \Sigma_1 x_2^{n-2} + \Sigma_2 x_2^{n-3} - \ldots \pm \Sigma_{n-1} \\ 0 = x_3^{n-1} - \Sigma_1 x_3^{n-2} + \Sigma_2 x_3^{n-3} - \ldots \pm \Sigma_{n-1} \\ \text{etc.} \\ 0 = x_{n-1}^{n-1} - \Sigma_1 x_{n-1}^{n-2} + \Sigma_2 x_{n-1}^{n-3} - \ldots \pm \Sigma_{n-1}. \end{cases}$$

Multiplicirt man ferner von den Gleichungen (38) die erste mit $\pm\Sigma_{n-1}$, die zweite mit $\mp\Sigma_{n-2}$, die dritte mit $\pm\Sigma_{n-3}$ etc., die vorletzte mit $-\Sigma_1$, die letzte mit 1, und addirt die Resultate, so kommt in Folge der Gleichungen (40)

$$(x_0^{n-1} - \Sigma_1 x_0^{n-2} + \Sigma_2 x_0^{n-3} - \ldots \pm \Sigma_{n-1}) z_0 \\ = v^{n-1} - \Sigma_1 v^{n-2} + \Sigma_2 v^{n-3} - \ldots \pm \Sigma_{n-1},$$

welche Formel sich in Gemässheit des §. 15 so schreiben lässt:

$$(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_{n-1}) z_0 \\ = (v-x_1)(v-x_2)(v-x_3)(v-x_{n-1}),$$

und mithin

$$z_0 = \frac{(v-x_1)(v-x_2)(v-x_3)\ldots(v-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots(x_0-x_{n-1})}$$

Da ferner die Gleichungen (38) in Bezug auf z_0, z_1, $z_2, \ldots z_{n-1}$ vollkommen symmetrisch sind, so ergiebt sich ebenso:

$$z_1 = \frac{(v-x_0)(v-x_2)(v-x_3)\ldots(v-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{n-1})},$$

$$z_2 = \frac{(v-x_0)(v-x_1)(v-x_3)\ldots(v-x_{n-1})}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_1-x_3)\ldots(x_2-x_{n-1})},$$

etc. etc.

§. 17. *Aufgabe.* Die Coëfficienten der Gleichung

$$u = a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_{n-1} x^{n-1}$$

so zu bestimmen, dass u für $x = x_0$, x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$ resp. die Werthe u_0, u_1, $u_2, \ldots u_{n-1}$ annimmt.

Gegeben sind hiernach die Gleichungen

$$(41)\quad \begin{cases} u = a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \\ u_0 = a + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_{n-1} x_0^{n-1} \\ u_1 = a + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} \\ u_2 = a + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} \\ \qquad\text{etc.} \\ u_{n-1} = a + a_1 x_{n-1} + a_2 x^2_{n-1} + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}_{n-1}. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit 1, A_0, A_1, A_2, ... A_{n-1} und subtrahirt alsdann die Summe der n letzten Gleichungen von der ersten, so erhält man

$$(42)\quad u - (A_0 u_0 + A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_{n-1} u_{n-1}) =$$
$$(1 - S_0) a + (x - S_1) a_1 + (x^2 - S_2) a_2 + \ldots + (x^{n-1} - S_{n-1}) a_{n-1}$$

wo

$$(43)\quad \begin{cases} S_0 = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_{n-1} \\ S_1 = A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots\ldots + A_{n-1} x_{n-1} \\ S_2 = A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 + A_2 x^2_2 + \ldots\ldots + A_{n-1} x^2_{n-1} \\ \qquad\text{etc.} \\ S_{n-1} = A_0 x_0^{n-1} + A_1 x_1^{n-1} + A_2 x_2^{n-1} + \ldots\ldots + A^{n-1} x^{n-1}_{n-1} \end{cases}$$

Wählt man nun A_0, A_1, A_2, ... A_{n-1} so, dass $S_0 = 1$, $S_1 = x$, $S_2 = x^2$, ... $S_{n-1} = x^{n-1}$ wird, so reducirt sich die Gleichung (42) auf

$$(44)\quad u = A_0 u_0 + A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_{n-1} u_{n-1},$$

während sich, wenn man in (43) für S_0, S_1, S_2, ... S_{n-1} resp. jene Werthe 1, x, x_2, ... x^{n-1} hineinsetzt, nach §. 16 für A_0, A_1, A_2, ... A_{n-1} dieselben Ausdrücke finden, welche oben in §. 14 unter (36) verzeichnet stehen, und es ist demnach die Formel (44) keine andere als die Lagrange'sche Gleichung (35) des §. 14.

Wenn man in die Gleichung (35) für u die Funktion $u - \alpha$ setzt, und unter α eine beliebige Constante denkt, so dass sich u_0 in $u_0 - \alpha$, u_1 in $u_1 - \alpha$, u_2 in $u_2 - \alpha$, etc. umwandelt, so entsteht die ebenmässig richtige Gleichung

$$u-\alpha=(u_0-\alpha)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots.(x_0-x_{n-1})}$$

$$+(u_1-\alpha)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots.(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots.(x_1-x_{n-1})}$$

$$+(u_2-\alpha)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{n-1})}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)\ldots.(x_2-x_{n-1})}$$

etc.

$$+(u_{n-1}-\alpha)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots.(x_{n-1}-x_{n-2})}$$

Wünscht man sonach den Unterschied zwischen dem zu einem beliebigen Werth x gehörigen Werth u und einem der bekannten Werthe u_0, u_1, u_2, ... u_{n-1}, etwa u_r, so hat man in die letzte Gleichung nur x_r für α zu setzen, und hat folglich

$$u-u_r=A_0(u_0-u_r)+A_1(u_1-u_r)+\ldots.A_{n-1}(u_{n-1}-u_r),$$

wo das mit A_r behaftete Glied herausgefallen ist.

Berichtigungen.

Seite 3 Zeile 7 v. u. lese man $\frac{1}{2}$ statt $\frac{1}{4}$.

» 6 » 20 v. u. » » $\frac{97}{40}$ statt $\frac{9.7}{40}$

» 9 » 6 v. u. » » §§. 170, 171, 172, 238 statt §§. 21, 22, 23, 89

» 29 » 8 v. o. » » 19 statt 64

» 31 » 17 v. u. » » $\frac{a-b}{a-c}$ statt $\frac{a-b}{ac}$

» 39 » 16 v. u. » » $c+b$ statt $c+d$

» 42 » 1 v. o. » » »und a« statt »und b«

» 66 » 14 v. u. » » $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}$ statt $\frac{a}{b}.\frac{c}{b}$,

» 78 » 11 v. u. » » $\frac{ac}{bc}$ statt $\frac{ac}{ac}$

» 78 » 7 v. u. » » $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\,.\,1$ statt $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$.

» 79 » 12 v. u. » » »ein oder« statt »ein der«

» 80 » 5 v. o. muss der Zähler $aabbce$ heissen

» 80 » 10 und 12 v. o. ist in den Nennern ein e ausgefallen

» 84 » 7 und 8 v. u. l. m. c'en statt a'en, und $a+b$ statt $b+c$

» 96 » 16 v. u. lese man in der Gleichung (α) g statt g_1

» 108 » 15 v. u. » » a^b statt ab

» 109 » 13 v. o. » » a^0 statt α^0

» 109 » 7 v. u. » » a^b statt a

» 110 » 5 v. o. » » $\sqrt[c]{(a^b)}$ statt $\left(\sqrt[c]{a^b}\right)$

» 110 » 6 v. u. » » $\left(\sqrt[c]{a}\right)^c$ statt $\left(\sqrt[c]{a^c}\right)$

» 110 » 3 v. u. » » $\sqrt[bc]{a}$ statt $\sqrt{a}$

» 111 » 7 v. u. » » $\sqrt[c]{a^1}$ statt $\sqrt{a^1}$

» 116 » 11 v. o. ist 0 hinter dem Zeichen = zu ergänzen

» 126 » 12 v. u. lese man $\frac{(r+1)^b}{n^b}=$ statt $\frac{(r+1)^b}{n}$

» 147 » 1 v. u. » » bx^2 statt b^2x

» 150 » 1 v. o. » » x statt x_1.

» 150 » 15 v. o. » » $-\frac{5}{2}$ statt $\frac{5}{2}-$

Seite 150 Zeile 17 und 19 v. o. lese man $\frac{41}{16}$ statt $\frac{9}{16}$
» 151 » 10 v. u. lese man $(ac-bd)$ statt $i(ac-bd)$
» 152 » 7 v. o. » » $-n$ statt $-m$, und $(a+bi)^{-m}$ statt $(a+bi)^{m}$
» 152 » 8 u. 9 v. o. lese man in den Exponenten überall n statt m
» 152 » 8 v. o. » » $(a+bi)^{n}$ statt $(a+bi)^{m}$
» 155 » 7 v. o. » » $e+c_1$ statt $e+c$
» 155 » 13 v. u. » » 3572 statt 3573
» 156 » 12 v. o. » » a_1 statt a
» 156 » 13 v. u. » » 28576o statt 28567o
» 159 » 10 v. u. » » n_1 statt r_1
» 159 » 9 v. u. » » $n_3 10^3 + n_2 10^2$ statt $n_3 10 + n_2 10$
» 160 » 2 v. o. » » 24556 statt 24526
» 160 » 12 v. o. » » 10^1 statt 10^0
» 162 » 4 v. u. » » n_2 statt n_3
» 163 » 18 v. o. » » 10^5 statt 10^6
» 173 » 18 v. u. » » $\sqrt[3]{\frac{a.10^{3\beta}}{10^{3\beta}}}$ statt $\frac{\sqrt[3]{a}.10^{3\beta}}{10^{3\beta}}$
» 176 » 7 v. o. » » 18 statt 21
» 179 » 10 v. u. » » c^{20} statt b^{20}
» 183 » 2 v. u. ist das — hinter = zu streichen
» 188 » 5 v. o. » » c^3 statt c^2
» 188 » 9 v. u. lese man $(3a+3x^2-5)^2$ statt $(3a+3x^2-5^2)$
» 188 » 5 v. u. lese man $6\sqrt[3]{(x+3)}$ statt $6x\sqrt[3]{}+3$
» 190 » 4 v. u. » » bc_1-b_1c statt b_1c-bc_1
» 200 » 16 v. u. » » b^2x^2 statt xb^2
» 224 » 3 v. u. ist das Wort »etwas« zu streichen
» 226 » 11 v. o. lese man $A\alpha$ statt A^{α}
» 227 » 4 v. o. ist das Wort »vor« zu streichen
» 241 » 1 v. o. ist das Wort »auf« zu streichen
» 243 » 3—5 v. o lese man »grössere« statt »kleinere«
» 246 » 13 v. u. lese man x^6 statt x^5
» 251 » 2 v. o. » » $a_n{}^2$ statt a^{n2}
» 262 » 3 v. o. » » x^2 und x^3 statt x_2 und x^4
» 263 » 17 v. u. » » x statt x_1
» 263 » 11 v. u. » » $s_1{}''$ statt $s_1{}'$
» 271 » 10 v. u. » » ${}^{\alpha}(\alpha+\beta)$ statt ${}_{\alpha}(\alpha+\beta)$
» 272 » 14 v. o. » » $r(r-1)$ statt $(r-1)$
» 272 » 7 v. u. » » ${}^{\alpha-s}n$ statt ${}^{\alpha-s+1}n$
» 273 » 3 v. u. » » $(n-\alpha+1)$ statt $(n-\alpha)$
» 274 » 13 v. o. » » ${}^{\alpha-2}n$ statt $\alpha^{-2}n$
» 275 » 14 v. u. » » ${}^{m}n$ statt ${}^{m}m$
» 277 » 6 v. o. » » f_n statt f
» 277 » 14 v. u. » » ${}^{2}0$ statt ${}^{0}0$
» 277 » 4 v. u. » » ${}^{1}1x$ statt ${}^{1}x$

Seite 284 Zeile 4 v. o. lese man $\frac{y^n}{n!}$ statt y^n

» 290 » 5 v. o. und S. 325 Zeile 15 und 21 v. o. l. m. A^x statt Ax

» 296 » 2 v. u. lese man $\sin(z_1+\mathfrak{e})$ statt $\sin(z_1+n)$

» 297 » 12 v. o. » » z_1 statt z_2

» 299 » 4 v. u. » » $\sin\frac{3}{2}\pi = -\sin\frac{1}{2}\pi$ statt $\sin\frac{1}{2}\pi = -\sin\frac{1}{2}\pi$

» 299 » 12 v. u. » » 0^x statt 0_x

» 319 » 10 v. u. » » $e^{+\infty}$ statt $+\infty$

» 332 » 12 v. o. » » $v'+v''+2m\pi$ statt $v+v'+2m\pi$

» 337 » 20 v. u. » » von $\alpha_1\gamma_2$ statt: von $\alpha_2\gamma_1$

» 337 » 13 v. u. » » $a^{\frac{2}{9}}$ statt $a^{\bar{9}}$

» 341 » 5 v. o. » » m statt h

» 345 » 16 v. o. » » n_1 statt n'

» 366 » 2 v. u. » » x^m statt x^r

» 373 » 15 v. o. » » gebracht statt gedacht

» 379 » 13 v. u. » » $-\mathfrak{m},^{\varepsilon}$ statt $-\mathfrak{m},$

» 391 » 10 v. o. » » $n\pi+\cot^{-1}x$ statt $n\pi-\cot^{-1}x$

» 400 ergänze man in der zweiten der Gleichungen (XXVIII, b) vor dem Logarithmen den Faktor i, und ebenso:

» 401, 404, 406 resp. in der zweiten der Gleichungen (168), in den Gleichungen (XXXIX, a) nnd (XXIX, b), und in den Gleichungen (XXX), (XXX, a), (XXX, b)

» 403 Zeile 3 v. u. ist in dem zweiten Quotienten (r^2+1) statt $(r^2+1)^2$ zu lesen

» 415 Zeile 17 v. o. lese man α statt x

» 415 » 2 v. u. » » Vorhergehenden statt Vorgehenden

» 418 » 5 v. u. ist das Zeichen $=$ hinter k'_n zu streichen

» 422 » 4 v. u. lese man e^x statt e_x

» 438 » 16 v. o. $A^{\alpha x^r}$ statt $A^{\alpha xr}$

» 448 » 3 v. u. lese man (1, 4, 8) statt (3, 4, 8)

» 453 » 4 v. o. » » x^4 statt x_4

» 454 » 1 v. u. » » $2\sin\frac{1}{2}\beta < \beta$ statt $2\sin\frac{1}{2}\beta < \frac{1}{2}\beta$

Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin, Grünstr. 18.

LEHRBUCH

DER

ARITHMETIK

UND

NIEDEREN ANALYSIS

ZUM GEBRAUCHE BEI VORLESUNGEN UND ZUM SELBST-UNTERRICHTE

BEARBEITET

VON

DR. G. RADICKE,

PROFESSOR AN DER RHEIN. FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BONN.

ZWEITE MIT EINER ZULAGE VERMEHRTE AUSGABE.

BERLIN,

VERLAG DER NICOLAISCHEN BUCHHANDLUNG.

1853.

Im Verlage der Nicolaischen Buchhandlung in Berlin sind ferner erschienen:

J. E. Bode's

Anleitung zur Kenntnifs des gestirnten Himmels.

Zehnte verbesserte Auflage.

Herausgegeben von Dr. **C. Bremiker.**

Mit 3 Kupfertafeln u. einer allgemeinen Himmelskarte nebst transparentem Horizont.

Preis 3 Thlr. 20 Sgr.

Dr. C. Bremiker,

Logarithmorum VI decimalium

nova tabula Berolinensis

et

numerorum vulgarium ab 1 usque ab 100000

et

functionum trigonometricarum ad decades minutorum secundorum.

geh. Preis 4 Thlr.

F. W. G. Radicke,

Professor an der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn,

Handbuch der Optik.

Mit besonderer Rücksicht auf die neuesten Fortschritte der Wissenschaft bearbeitet.

Zwei Bände mit 9 lithographirten Tafeln.

Preis 6 Thlr.

Dr. W. A. Rüst,

Die Arithmetik.

Zunächst für Divisionsschulen und sonstige Militair-Unterrichts-Anstalten bearbeitet.

Preis 1 Thlr. 7½ Sgr.

Arithmetik
Analysis niedere

ZM 1107

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Radicke, Gustav,

Lehrbuch der Arithmetik u. niedern Analysis

Berlin 1853

Math.p. 448 x
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082632-6